



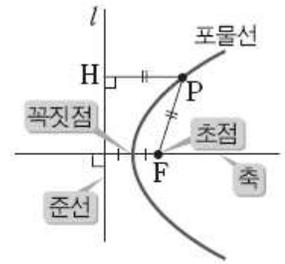
CHAPTER 01 평면곡선

개념 1 포물선

1. 포물선의 정의

평면 위의 한 점 F 와 이 점을 지나지 않는 한 직선 l 이 주어질 때, 점 F 와 직선 l 에 이르는 거리가 같은 점들의 집합을 **포물선**이라고 한다. 이때 점 F 를 포물선의 **초점** 이라고 하며 직선 l 을 포물선의 **준선**이라고 한다.

또 포물선의 초점 F 를 지나고 준선 l 에 수직인 직선을 포물선의 **축**이라고 하며 포물선 과 그 축의 교점을 포물선의 **꼭짓점**이라고 한다.

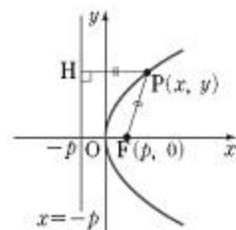


2. 포물선의 방정식

(1) 초점이 $F(p, 0)$ 이고 준선이 $x = -p$ 인 포물선의 방정식은

$$y^2 = 4px \quad (\text{단, } p \neq 0)$$

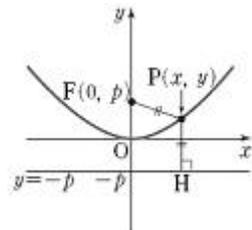
- ① 초점 : $F(p, 0)$ ② 꼭짓점 : $(0, 0)$
- ③ 준선 : $x = -p$ ④ 축 : $y = 0$



(2) 초점이 $F(0, p)$ 이고 준선이 $y = -p$ 인 포물선의 방정식은

$$x^2 = 4py \quad (\text{단, } p \neq 0)$$

- ① 초점 : $F(0, p)$ ② 꼭짓점 : $(0, 0)$
- ③ 준선 : $y = -p$ ④ 축 : $x = 0$



3. 포물선의 평행이동

(1) 포물선 $y^2 = 4px$ 를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$$(y - n)^2 = 4p(x - m)$$

- ① 초점 : $(m + p, n)$ ② 꼭짓점 : (m, n)
- ③ 준선 : $x = -p + m$ ④ 축 : $y = n$

(2) 포물선 $x^2 = 4py$ 를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$$(x - m)^2 = 4p(y - n)$$

- ① 초점 : $(m, n + p)$ ② 꼭짓점 : (m, n)
- ③ 준선 : $y = -p + n$ ④ 축 : $x = m$

4. 포물선의 방정식의 일반형

(1) x 축에 평행한 축을 가진 포물선의 방정식

$$\Rightarrow y^2 + Ax + By + C = 0 \text{ (단, } A \neq 0)$$

(2) y 축에 평행한 축을 가진 포물선의 방정식

$$\Rightarrow x^2 + Ax + By + C = 0 \text{ (단, } B \neq 0)$$

[원태샘의 TIP]

1. 포물선의 방정식을 다룰 때는 기본형을 기준으로 평행이동으로 생각하면 쉽다.

2. 이차곡선 문제의 대부분은 그림을 이용한 정의관련 문제가 출제가 된다.

따라서 문제에서 주어진 그림에서 부족한 부분들을 작도하여 이차곡선의 정의를 활용할 수 있도록 하는 것이 이차곡선 문제를 해결하는 핵심이다.

3. 포물선 $y^2 = 4px$ 의 초점 F 를 지나는 직선이 포물선과 만나는 두 점을 각각 P, Q 라 하고 $\overline{PF} = a, \overline{QF} = b$ 라 하면 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{p}$ 이 성립한다.

필수 유형 01

초점이 $F(2, 1)$ 이고 준선이 $x = 4$ 인 포물선이 있다. 이 포물선이 점 $(a, 5)$ 를 지날 때, 상수 a 의 값은?

① -1

② $-\frac{1}{2}$

③ 0

④ $\frac{1}{2}$

⑤ 1

유제 01

원 $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 4$ 의 중심을 초점으로 하고 점 $(2, 4)$ 를 꼭짓점으로 하는 포물선이 점 $(a, 6)$ 을 지날 때, 상수 a 의 값은?

① 2

② 3

③ 4

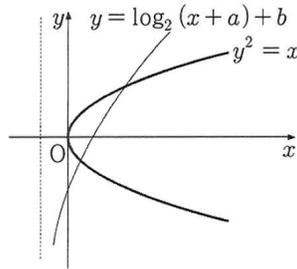
④ 5

⑤ 6



필수유형 02

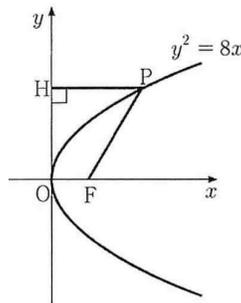
로그함수 $y = \log_2(x+a)+b$ 의 그래프가 포물선 $y^2 = x$ 의 초점을 지나고 이 로그함수 그래프의 점근선이 포물선 $y^2 = x$ 의 준선과 일치할 때, 두 상수 a, b 의 합 $a+b$ 의 값은? [2008학년도 수능기출]



- ① $\frac{5}{4}$
- ② $\frac{13}{8}$
- ③ $\frac{9}{4}$
- ④ $\frac{21}{8}$
- ⑤ $\frac{11}{4}$

유제 02

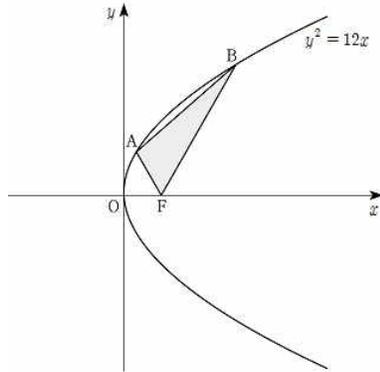
그림과 같이 초점이 F인 포물선 $y^2 = 8x$ 위의 제 1사분면에 있는 점 P에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하자. $\overline{PF} : \overline{PH} = 4 : 3$ 일 때, 점 P의 x좌표는? [2016년 10월 교육청]



- ① 3
- ② 4
- ③ 5
- ④ 6
- ⑤ 7

필수유형 03

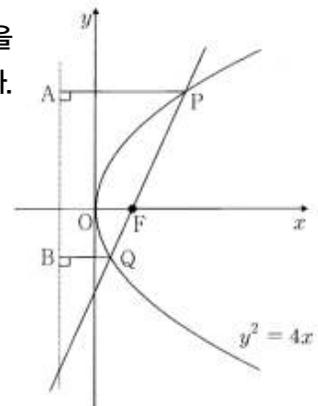
그림과 같이 초점이 F인 포물선 $y^2 = 12x$ 위에 $\angle OFA = \angle AFB = \frac{\pi}{3}$ 인 두 점 A, B가 있다. 삼각형 AFB의 넓이는? (단, O는 원점이고 두 점 A, B는 제 1사분면 위의 점이다.) [2012년 10월 교육청]



- ① $8\sqrt{3}$
- ② $10\sqrt{3}$
- ③ $12\sqrt{3}$
- ④ $14\sqrt{3}$
- ⑤ $16\sqrt{3}$

유제 03

그림과 같이 포물선 $y^2 = 4x$ 의 초점 F를 지나는 직선이 포물선과 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하고 두 점 P, Q에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 A, B라 하자. $\overline{PF} = 5$ 일 때, 사각형 ABQP의 넓이는? [2009학년도 사관기출]



- ① $\frac{57}{4}$
- ② $\frac{115}{8}$
- ③ 15
- ④ $\frac{125}{8}$
- ⑤ $\frac{135}{8}$



필수유형 04

포물선 $y^2 = 8x$ 의 초점 F를 지나는 직선이 포물선과 만나는 두 점을 A, B라 하자. $\overline{AF} : \overline{BF} = 3 : 1$ 일 때, 선분 AB의 길이는? [2013학년도 사관기출]

① $\frac{26}{3}$

② $\frac{28}{3}$

③ 10

④ $\frac{32}{3}$

⑤ $\frac{34}{3}$

유제 04

그림과 같이 포물선 $y^2 = 12x$ 의 초점 F를 지나는 직선 l 과 이 포물선이 만나는 두 점을 A, B라 하자. $\overline{AF} : \overline{BF} = 4 : 1$ 일 때, 직선 l 의 방정식은 $ax + by = 12$ 이다. 이 때, 상수 a, b 에 대하여 $a - b$ 의 값은? [2005학년도 사관기출]

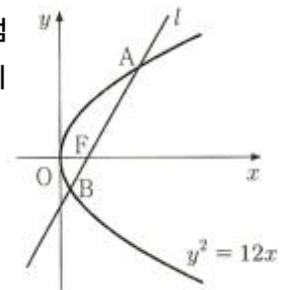
① 4

② 5

③ 6

④ 7

⑤ 8



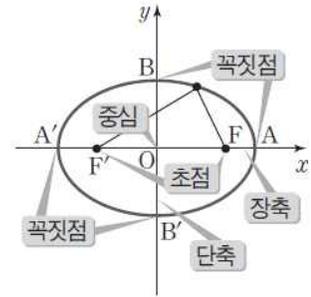


개념 2

타원

1. 타원의 정의

평면 위에 두 점 F, F' 이 주어져 있을 때, 점 F 와 점 F' 로부터의 거리의 합이 일정한 점들의 집합을 **타원**이라고 한다. 이때 두 점 F, F' 을 타원의 **초점**, 네 점 A, A', B, B' 을 타원의 **꼭짓점**, $\overline{AA'}$ 을 타원의 **장축**, $\overline{BB'}$ 을 타원의 **단축**, 장축과 단축의 교점을 타원의 **중심**이라 한다.



2. 타원의 방정식

(1) 두 초점 $F(c, 0), F'(-c, 0)$ 에서 거리의 합이 $2a$ ($a > c > 0$) 인 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{단, } b^2 = a^2 - c^2)$$

- ① 초점 : $F(\sqrt{a^2 - b^2}, 0), F'(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$
- ② 장축의 길이 : $2a$
- ③ 단축의 길이 : $2b$
- ④ $\overline{PF} + \overline{PF'} = 2a$ (일정)

(2) 두 초점 $F(0, c), F'(0, -c)$ 에서 거리의 합이 $2b$ ($b > c > 0$) 인 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{단, } a^2 = b^2 - c^2)$$

- ① 초점 : $F(0, \sqrt{b^2 - a^2}), F'(0, -\sqrt{b^2 - a^2})$
- ② 장축의 길이 : $2b$
- ③ 단축의 길이 : $2a$
- ④ $\overline{PF} + \overline{PF'} = 2b$ (일정)

3. 타원의 평행이동

타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 을 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 방정식은

$$\frac{(x - m)^2}{a^2} + \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1$$

4. 타원의 방정식의 일반형

$Ax^2 + By^2 + 2Fx + 2Gy + C = 0$ (단, $AB > 0, A \neq B$)의 꼴로 나타내어지는 이차방정식은 타원을 나타내 고 이 방정식을 타원의 방정식의 일반형이라 한다.

[원태샘의 TIP]

타원의 방정식을 다룰 때도 기본형을 기준으로 평행이동으로 생각하면 쉽다.

필수유형 06

원 $(x-6)^2 + (y-5)^2 = 36$ 과 x 축의 두 교점을 초점으로 하고 원의 중심을 지나는 타원의 장축의 길이를 구하시오. [2012년 7월 교육청]

유 제 06

타원 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ 과 두 초점을 공유하고 단축의 길이가 $2\sqrt{2}$ 인 타원의 장축의 길이는?

① 4

② $3\sqrt{2}$

③ 5

④ 6

⑤ $4\sqrt{3}$



필수유형 07

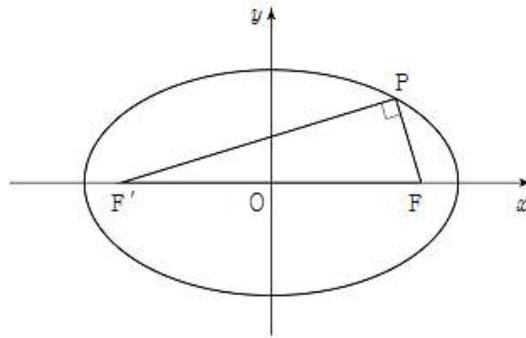
두 정점 $F(2, 3)$, $F'(-4, 3)$ 에 대하여 $\overline{PF} + \overline{PF'} = 10$ 을 만족하는 점 P 의 자취의 방정식을 구하여라.

유제 07

두 초점 $A(2, 2)$, $B(2, -4)$ 로부터의 거리의 합이 8인 타원의 방정식을 구하여라.

필수유형 08

타원 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 의 두 초점을 F, F'라 하자. 타원 위의 점 P가 $\angle FPF' = \frac{\pi}{2}$ 를 만족시킬 때, 삼각형 FPF'의 넓이는? [2016년 7월 교육청]



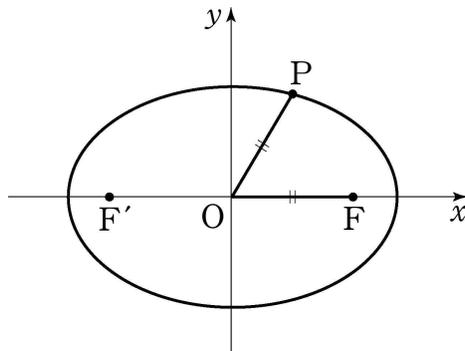
- ① 6
- ④ 9

- ② 7
- ⑤ 10

- ③ 8

유제 08

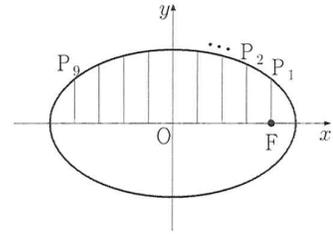
타원 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$ 의 두 초점을 F, F'이라 하자. 이 타원 위의 점 P가 $\overline{OP} = \overline{OF}$ 를 만족시킬 때, $\overline{PF} \cdot \overline{PF'}$ 의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [2007학년도 9월 평가원]





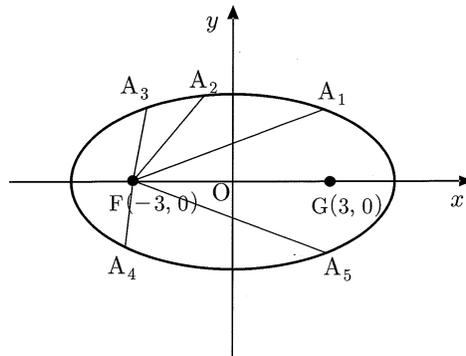
필수유형 09

그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ 의 장축을 10등분한 후 장축의 양 끝점을 제외하고 각 등분점에서 장축에 수직인 직선을 그어 x 축 위쪽 부분에 있는 타원과의 교점을 차례로 $P_1, P_2, P_3, \dots, P_9$ 라 하자. 타원의 한 초점을 F 라고 할 때, $\sum_{k=1}^9 \overline{FP_k}$ 의 값을 구하시오. [2004년 10월 교육청]



유제 09

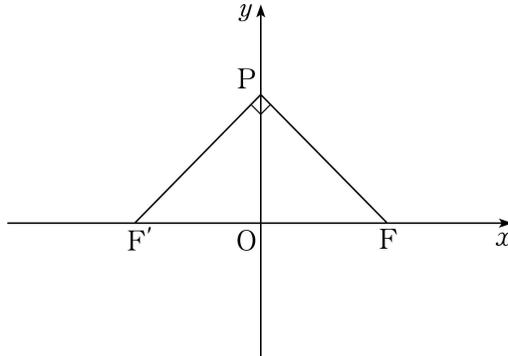
타원 $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$ 위의 다섯 개의 점 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 에서 점 $F(-3, 0)$ 까지 거리에 대하여 $\sum_{i=1}^5 \overline{A_i F} = 20$ 일 때, 점 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 에서 $G(3, 0)$ 까지의 거리의 합 $\sum_{i=1}^5 \overline{A_i G}$ 를 구하면?



- ① 20
- ② 25
- ③ 30
- ④ 35
- ⑤ 40

필수유형 10

그림과 같이 좌표평면에 x 축 위의 두 점 F, F' 과 점 $P(0, n)$ ($n > 0$)이 있다. 삼각형 $PF'F$ 가 $\angle FPF' = \frac{\pi}{2}$ 인 직각이등변삼각형일 때, 두 점 F, F' 을 초점으로 하고 점 P 를 지나는 타원과 직선 PF' 이 만나는 점 중 점 P 가 아닌 점을 Q 라 하자. 삼각형 FPQ 의 둘레의 길이가 $12\sqrt{2}$ 일 때, 삼각형 FPQ 의 넓이는?
[2015년 10월 교육청]



- ① 11
④ 14

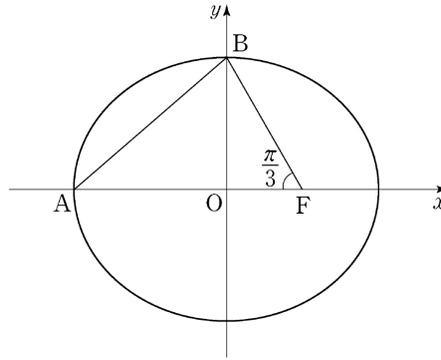
- ② 12
⑤ 15

- ③ 13



유 제 1 0

타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 한 초점을 $F(c, 0)$ ($c > 0$), 이 타원이 x 축과 만나는 점 중에서 x 좌표가 음수인 점을 A , y 축과 만나는 점 중에서 y 좌표가 양수인 점을 B 라 하자. $\angle AFB = \frac{\pi}{3}$ 이고 삼각형 AFB 의 넓이는 $6\sqrt{3}$ 일 때, $a^2 + b^2$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.) [2014년 9월 평가원]



① 22

② 24

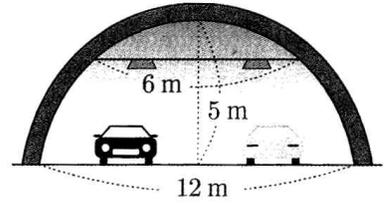
③ 26

④ 28

⑤ 30

필수유형 11

오른쪽 그림과 같이 폭이 12m 이고 높이가 5m 인 어떤 터널의 단면은 면을 장축으로 하는 타원의 절반과 같은 모양이다. 이 터널의 위쪽에 길이가 6m 인 철제 빔이 수평으로 양쪽 벽에 고정되어 있을 때, 도로 면에서 철제 빔까지의 높이는? [2002년 10월 교육청]



- ① $\frac{5\sqrt{3}}{2}$
- ② $\frac{5\sqrt{3}}{3}$
- ③ $\frac{3}{5}$
- ④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- ⑤ $\frac{\sqrt{5}}{2}$

유제 11

케플러의 법칙에 의하여 다음 사실이 알려져 있다.

행성은 태양을 하나의 초점으로 하는 타원궤도를 따라 공전한다. 태양으로부터 행성까지의 거리를 r , 행성의 속력을 v 라 하면 장축과 공전궤도가 만나는 두 지점에서 거리와 속력의 곱 rv 의 값은 서로 같다.

두 초점 사이의 거리가 $2c$ 인 타원궤도를 따라 공전하는 행성이 있다. 단축과 공전궤도가 만나는 한 지점과 태양 사이의 거리가 a 이다. 장축과 공전궤도가 만나는 두 지점에서의 속력의 비가 $3:5$ 일 때, $\frac{c}{a}$ 의 값은?

[2004학년도 9월 평가원]

- ① $\frac{1}{2}$
- ② $\frac{1}{3}$
- ③ $\frac{1}{4}$
- ④ $\frac{1}{5}$
- ⑤ $\frac{1}{6}$