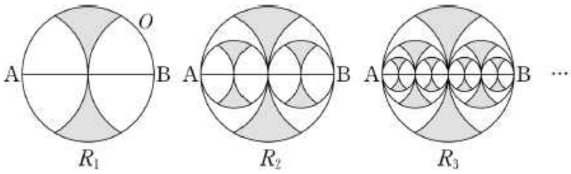
유형 3-5. [2013학년도 9월 9번]

그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 원 O가 있다. A, B를 각각 중심으로 하고 원 O와 반지름의 길이가 같은 두 원의 외부와 원 O의 내부의 공통부분인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에 선분 AB를 2등분한 선분을 각각 지름으로 하는 두 원을 그리고, 이 두 원 안에 각각 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 모양의 두 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

그림 R_2에 선분 AB를 4등분한 선분을 각각 지름으로 하는 네 원을 그리고, 이 네 원 안에 각각 그림 R_1얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 모양의 네 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 모양의 모든 도형의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]



① $3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi$　② $2\sqrt{3}-\frac{2}{3}\pi$

③ $2\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}$　④ $3\sqrt{3}-\pi$

⑤ $3\sqrt{3}-\frac{2}{3}\pi$

유형 3-6. [2013학년도 수능 14번]

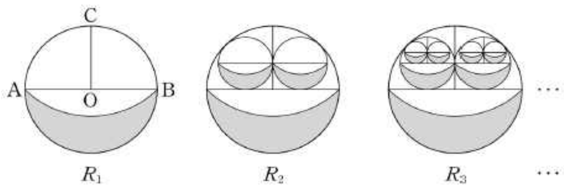
그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 원 O 가 있다. 원 O 의 중심을 지나고 선분 AB와 수직인 직선이 원과 만나는 2개의 점 중 한 점을 C라 하자.

점 C를 중심으로 하고 점 A와 점 B를 지나는 원의 외부와 원 O 의 내부의 공통부분인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 색칠된 부분을 포함하지 않은 원 O의 반원을 이등분한 2개의 사분원에 각각 내접하는 원을 그리고, 이 2개의 원 안에 그림 R_1 을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 모양의 2개의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자.

그림 R_2 에서 새로 생긴 2개의 원의 색칠된 부분을 포함하지 않은 반원을 각각 이등분한 4개의 사분원에 각각 내접하는 원을 그리고, 이 4개의 원 안에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 모양의 4개의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



① $\frac{5+2\sqrt{2}}{7}$　② $\frac{5+3\sqrt{2}}{7}$

③ $\frac{5+4\sqrt{2}}{7}$　④ $\frac{5+5\sqrt{2}}{7}$

⑤ $\frac{5+6\sqrt{2}}{7}$

유형 3-6. [2013학년도 수능 14번] 해설

1. 1. 문제분석

① 조건 - R_1: 지름 2인 원에서 점 C가 중심이고 A와 B를 지나는 원을 뺀다.

- R_2: 사분원에 내접하는 원 2개

② 구하라: 원에서 중심이 C인 원을 뺀 넓이 급수의 합

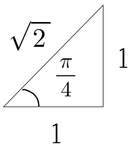
2. 2. 필요개념

① 도형의 면적

원·부채꼴 $=\dfrac{1}{2}\times r^2\times(\text{중심각})$

삼각형 $=\dfrac{1}{2}\times \text{밑변}\times\text{높이}$

② 피타고라스 정리

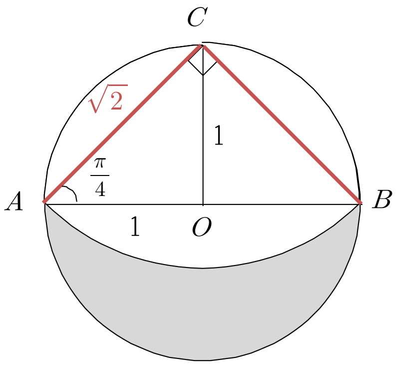


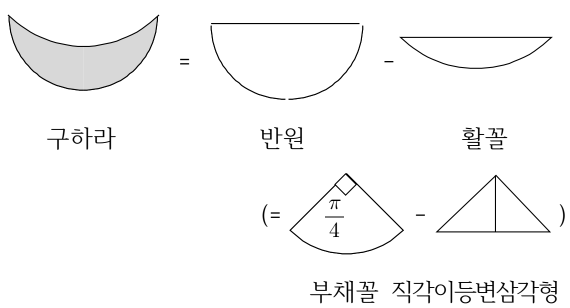
③ 무한등비급수의 합

$$S=\frac{a}{1-r}$$

3. 3. 알고리즘

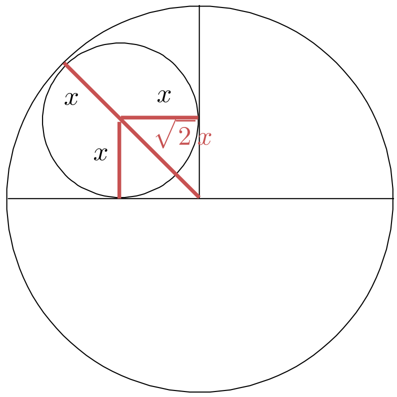
① 첫째 항 a를 구하기 위해 **중심이 C인 원의 반지름인 보조선 CA와 CB**를 긋고 도형을 단순화한다.





$\angle ACB$는 원주각이므로 $\triangle ACB$는 직각삼각형이다. 피타고라스 정리에 의하여 $AC=\sqrt{2}$

② 공비 r을 구하기 위해 **큰 원과 작은 원의 중심을 잇는 보조선**을 그리고, 내접한다 하였으므로 각각 **수선의 발**을 보조선으로 긋는다.



작은 원의 반지름을 x라 하면

$x+\sqrt{2}x=1$ (큰 원의 반지름)

도형의 수가 2배씩 증가하므로

$$r=\left(\frac{R_2\text{ 작은 원의 반지름}}{R_1\text{ 큰 원의 반지름}}\right)^2\times 2$$

③ 무한등비급수를 계산한다.

4. 4. 계산

① $a=\dfrac{1}{2}\times 1^2\times\pi$

$\quad -\left(\dfrac{1}{2}\times(\sqrt{2})^2\times\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\times 2\times 1\right)$

$\quad =1$

② $r=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^2\times 2=\dfrac{1}{3+2\sqrt{2}}\times 2$

$\quad =6-4\sqrt{2}$

③ $S=\dfrac{1}{1-(6-4\sqrt{2})}=\dfrac{5+4\sqrt{2}}{7}$

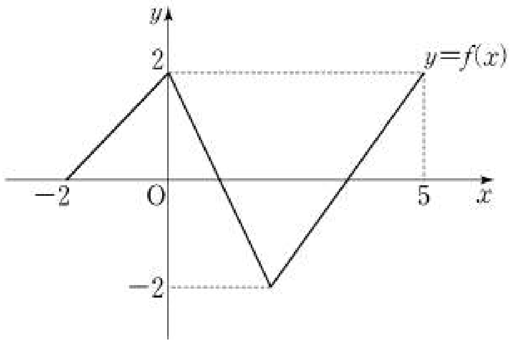
정답: ③

꿀팁

무한등비급수의 활용 문제 중 가장 보조선이 많이 필요했던 문제이다. 보조선 긋는 걸 어렵게 생각하지 말고 기본적으로 원이 나오면 (반)지름을 무조건 긋고, 삼각형에서 피타고라스 정리와 관련된 보조선을 생각하면 쉽게 찾아낼 수 있다.

유형 4-5. [2013학년도 6월 20번]

닫힌 구간 $[-2,5]$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{n\to\infty}\dfrac{|nf(a)-1|-nf(a)}{2n+3}=1$을 만족시키는 상수 a의 개수는? [4점]

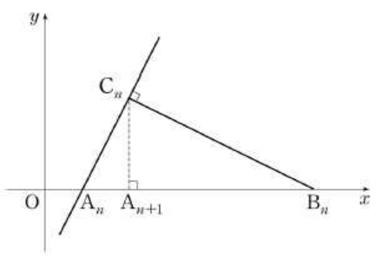
① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

유형 4-6. [2014학년도 예비시행 19번]

좌표평면에서 점 A_1의 좌표가 $(1,0)$일 때, 모든 자연수 n에 대하여 점 A_{n+1}을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) 점 A_n을 x축의 방향으로 n만큼 평행이동시킨 점을 B_n이라 한다.
(나) 점 B_n에서 기울기가 2이고 점 A_n을 지나는 직선에 내린 수선의 발을 C_n이라 한다.
(다) 점 C_n에서 x축에 내린 수선의 발을 A_{n+1}이라 한다.

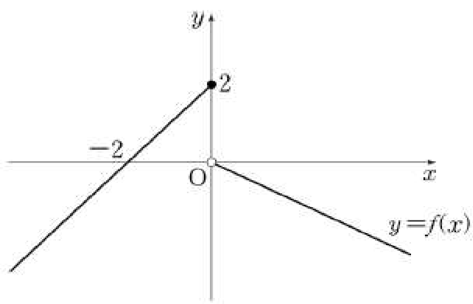
점 A_n의 x좌표를 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n^2}$의 값은? [4점]



① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{3}{10}$ ④ $\frac{2}{5}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

유형 4-7. [2014학년도 6월 14번]

함수 $f(x)=\begin{cases} x+2 & (x\le 0) \\ -\frac{1}{2}x & (x>0) \end{cases}$ 의 그래프가 다음과 같다. 13번과 14번의 두 물음에 답하시오.

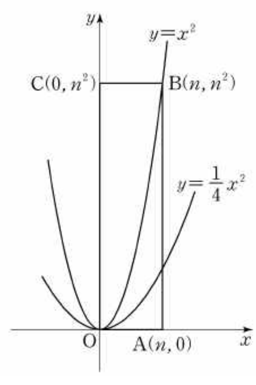


수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고 $a_{n+1}=f(f(a_n))$ $(n\ge 1)$을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

유형 4-8. [2014학년도 9월 14번]

그림은 두 곡선 $y=x^2$, $y=\frac{1}{4}x^2$과 꼭짓점의 좌표가 $O(0,0)$, $A(n,0)$, $B(n,n^2)$, $C(0,n^2)$인 직사각형 $OABC$를 나타낸 것이다. 13번과 14번의 두 물음에 답하시오. (단, n은 자연수이다.)



자연수 n에 대하여 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점 중에서 직사각형 $OABC$또는 그 내부에 있고 부등식 $y\ge x^2$을 만족시키는 모든 점의 개수를 a_n이라 하자.

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n^3}$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{7}{12}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

유형 4-7. [2014학년도 6월 14번] 해설

5. 1. 문제분석

① 조건: 두 직선의 방정식과 graph,
a_1과 합성함수를 통한 점화식 관계

② 구하라: 무한수열의 극한값

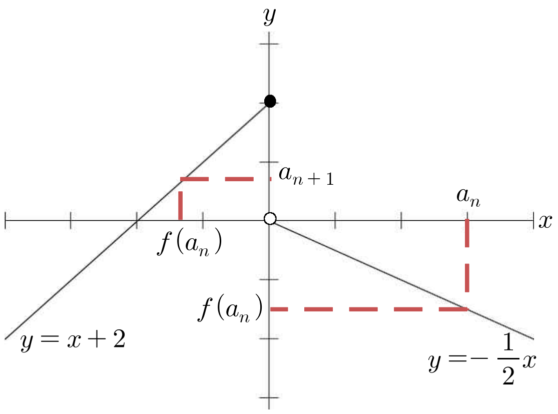
6. 2. 필요개념

① 합성함수
$f(x)=\alpha$라 할 때
$f(f(x))=f(\alpha)$

② 극한의 개념
$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$

7. 3. 알고리즘-1

① graph 상에 임의의 좌표 a_n을 정하여 합성함수를 통하여 a_{n+1}항을 구한 후, **점화식을 찾는다.**



위 graph에서 $a_n>0$이므로 $f(a_n)=-\frac{1}{2}a_n$

$-\frac{1}{2}a_n<0$이므로 $f(f(a_n))=-\frac{1}{2}a_n+2$

② **극한의 개념**을 이용하여 무한수열의 극한값을 구한다.

$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$라 하면 $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\alpha$

8. 4. 계산

① $a_{n+1}=f(f(a_n))=-\frac{1}{2}a_n+2$

② $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}a_n+2\right)$

$\alpha=-\frac{1}{2}\alpha+2,\ \alpha=\frac{4}{3}$

정답: ④

꿀팁: 극한의 개념

수열 $\{a_n\}$에서 n이 한없이 커질 때 a_n의 값이 α에 수렴하면 a_{n+1}의 값도 α에 수렴한다.

이와 같이 일반적인 수학 연산에서는 있을 수 없는 경우가 극한에서는 발생한다. 이는 극한의 심오한 개념에 기인한 것인데 이해하기 어려우므로 더 깊이 들어가지는 말고 단순 암기하기 바란다.

여기서 한 가지 더, 두 알고리즘 중 어느 것이 더 출제자의 의도에 부합되는 걸까?

정답은 알고리즘-2이다. 왜냐하면 문제에서 $a_1=1$이라는 조건을 준 것은 반드시 사용하라는 출제자의 지시사항이기 때문이다. 필요없는 조건을 줄 리는 없지 않겠는가?

그렇지만 알고리즘-1처럼 조건과 관계없이 해결할 수 있는 다른 solution도 항상 가능하므로 여러 가지 시각으로 문제를 바라보는 습관을 가져야 사고력이 더욱 향상될 수 있다.

9. 3. 알고리즘-2

① 알고리즘-1 ①과 동일

② $a_{n+1}=-\frac{1}{2}a_n+2$을 **등비점화식으로 변형**하면 $\left(a_{n+1}-\frac{4}{3}\right)=-\frac{1}{2}\left(a_n-\frac{4}{3}\right)$이고

일반항 $\left(a_n-\frac{4}{3}\right)=\left(a_1-\frac{4}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

③ 공비 $-1<r<1$이므로 등비수열의 수렴조건에 의거하여 무한수열의 극한값을 구한다.

10. 4. 계산

①, ② $a_1=1$

$\left(a_n-\frac{4}{3}\right)=\left(1-\frac{4}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

③ $\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{4}{3}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=0$

$\lim_{n\to\infty} a_n=\frac{4}{3}$

정답: ④

꿀팁: 등비점화식

$a_{n+1}=p\cdot a_n+q$ 꼴의 점화식을 변형하여 보면 $\left(a_{n+1}+\frac{q}{p-1}\right)=p\left(a_n+\frac{q}{p-1}\right)$와 같이 등비점화식으로 나타낼 수 있다. 그러므로 일반항 $a_n=\left(a_1+\frac{q}{p-1}\right)\cdot p^{n-1}-\frac{q}{p-1}$

수열의 점화식에서 종종 출제되는 유형이므로 알아두기 바란다.

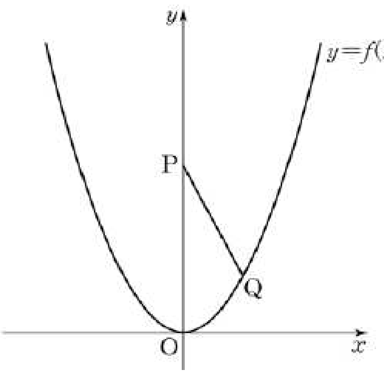
유형 4-13. [2016학년도 수능 10번]

수열 $\{a_n\}$에 대하여 곡선 $y=x^2-(n+1)x+a_n$은 x축과 만나고, 곡선 $y=x^2-nx+a_n$은 x축과 만나지 않는다. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{20}$ ② $\frac{1}{10}$ ③ $\frac{3}{20}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

유형 4-14. [2016학년도 수능 14번]

자연수 n에 대하여 좌표가 $(0,2n+1)$인 점을 P라 하고, 함수 $f(x)=nx^2$의 그래프 위의 점 중 y좌표가 1이고 제 1사분면에 있는 점을 Q라 하자. 13번과 14번의 두 물음에 답하시오.

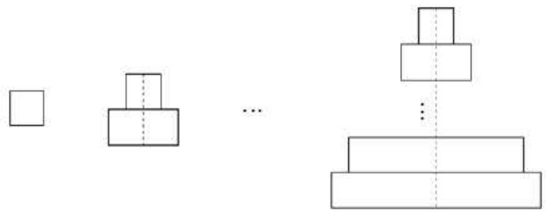


점 $R(0,1)$에 대하여 삼각형 PRQ의 넓이를 S_n, 선분 PQ의 길이를 l_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{{S_n}^2}{l_n}$의 값은? [4점]

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{5}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

유형 4-15. [고2학력평가 2015년 6월 30번]

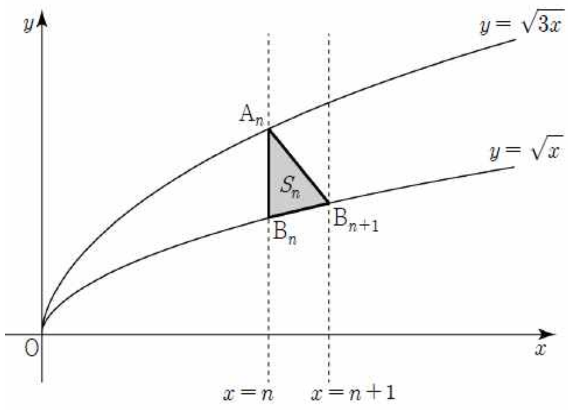
그림과 같이 한 편의 길이가 2인 정사각형을 [도형 1]이라 하자.
[도형 1]의 아랫변에 가로의 길이 4, 세로의 길이 2인 직사각형을 한 직선에 대해 대칭이 되도록 이어 붙여 만든 도형을 [도형 2]라 하자. 이때 직선은 [도형 2]의 가장 긴 변의 중점을 지난다.
이와 같은 방법으로 3 이상의 자연수 n에 대하여 [도형 $(n-1)$]의 아랫변에 가로의 길이 $2n$, 세로의 길이 2인 직사각형을 붙여 만든 도형을 [도형 n]이라 하자.



자연수 n에 대하여 [도형 n]을 포함하는 원들 중 가장 작은 원의 넓이를 a_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{80a_n}{\pi n^2}$의 값을 구하시오. [4점]

유형 4-16. [고2학력평가 2015년 9월 28번]

자연수 n에 대하여 직선 $x=n$이 두 곡선 $y=\sqrt{3x}$, $y=\sqrt{x}$와 만나는 점을 각각 A_n, B_n이라 하고 삼각형 $A_nB_nB_{n+1}$의 넓이를 S_n이라 하자.
$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(S_{n+1}-S_n)=a+b\sqrt{3}$일 때, $40(a^2+b^2)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.) [4점]



유형 4-15. [고2학력평가 2015년 6월 30번] 해설

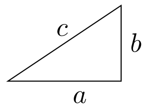
11. 1. 문제분석

① 조건: 가로 길이 $2n$, 세로 길이 2씩 늘어나는 도형에 외접하는 가장 작은 원의 넓이

② 구하라: $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴 부정형 극한값

12. 2. 필요개념

① 피타고라스 정리



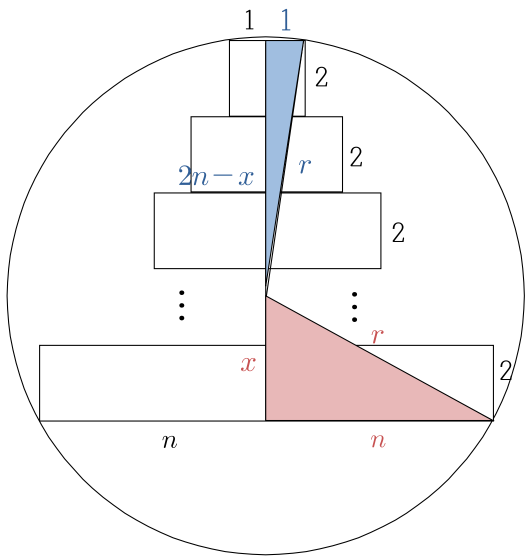
$$c^2 = a^2 + b^2$$

② $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴 부정형 극한값

- 최고차항 계수의 비를 계산

13. 3. 알고리즘

① 도형을 포함하고 가장 작은 원이 되려면 외접해야 한다. **도형에 원이 외접**할 때,



피타고라스 정리를 이용하면

$(2n-x)^2 + 1^2 = r^2 = x^2 + n^2$

먼저 x를 구하고, 이를 위 식에 대입하여 원의 반지름 r을 구한다.

② $a_n = \pi \cdot r^2$이므로 **구하라는 식에 대입**하여 최고차항으로 나누어 계수의 비를 구한다.

14. 4. 계산

① $x^2 + n^2 = (2n-x)^2 + 1^2$

$x^2 + n^2 = x^2 - 4nx + 4n^2 + 1$

$x = \frac{1}{4}\left(3n + \frac{1}{n}\right)$

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + n^2 \\ &= \left\{\frac{1}{4}\left(3n + \frac{1}{n}\right)\right\}^2 + n^2 \\ &= \frac{1}{16}\left(25n^2 + 6 + \frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

② $$\lim_{n\to\infty} \frac{80a_n}{\pi n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{80 \times \frac{\pi}{16}\left(25n^2 + 6 + \frac{1}{n^2}\right)}{\pi n^2} = 5 \times 25$$

정답: 125

꿀팁: 고난이도 문제에의 접근

난이도 있는 문제라 해서 어디서 어려운 공식을 이용하여 푸는 문제가 아니다. 어렵게 느껴지는 이유는 보다 깊이 있는 사고를 요구하기 때문이다. 그러나 기본 개념을 활용하여 하나씩 단계별로 접근하면 충분히 해결할 수 있다.

이 문제에서 구하라는 식이 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴이므로 a_n은 n에 관한 2차식임을 추론할 수 있으며, 또한 a_n은 원의 넓이이므로 당연히 제일 먼저 원의 중심을 정한다.

이 원의 반지름 r을 구하기 위해 어떤 주어진 조건을 사용해야 할지 생각해야 한다. 외접하는 첫 번째 사각형의 길이가 2이고 마지막 사각형의 길이가 $2n$이므로 결국 피타고라스 정리를 활용하여 접근하면 의외로 문제가 쉽게 풀리게 된다.

그러므로 이 문제는 정답률이 3%밖에 안 되는 고난이도 문제지만 어려운 문제일수록 기본 개념에 바탕을 두고 차근차근 접근하도록 하자.