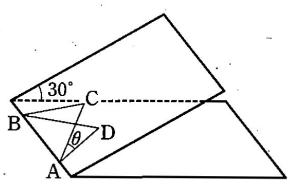
유형 1. 직선과 평면의 위치 관계

2009 07 종로월례 3점

1. 그림과 같이 두 정삼각형 ABC와 ABD는 서로 각 30°를 이루는 두 평면 위에 각각 놓여 있다. $\angle CAD=\theta$라고 할 때, $\cos\theta$의 값은?



① $\dfrac{3+5\sqrt{3}}{64}$

② $\dfrac{1+2\sqrt{3}}{32}$

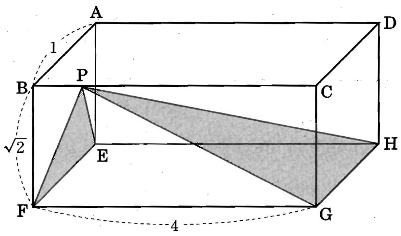
③ $\dfrac{4+3\sqrt{3}}{16}$

④ $\dfrac{2+3\sqrt{3}}{8}$

⑤ $\dfrac{3+2\sqrt{3}}{4}$

2009 09 대성 3점

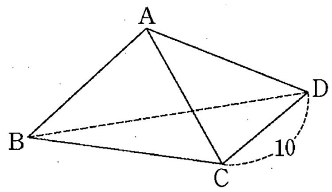
2. 다음 그림과 같이 $\overline{AB}=1$, $\overline{BF}=\sqrt{2}$, $\overline{FG}=4$인 직육면체 $ABCD-EFGH$가 있다. 모서리 BC 위의 점 P에 대하여 두 평면 PFE와 PGH가 이루는 이면각의 크기를 θ라 하자.



$\cos\theta$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $45(M^2+m^2)$의 값을 구하시오.

2009 09 평가원 3점

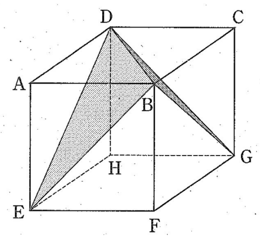
3. 사면체 $ABCD$에서 모서리 CD의 길이는 10, 면 ACD의 넓이는 40이고, 면 BCD와 면 ACD가 이루는 각의 크기는 30°이다. 점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 선분 AH의 길이는?



① $2\sqrt{3}$ ② 4 ③ 5
④ $3\sqrt{3}$ ⑤ $4\sqrt{3}$

2009 10 비상에듀 3점

4. 정육면체 $ABCD-EFGH$에서 삼각형 BED와 삼각형 BGD가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은?



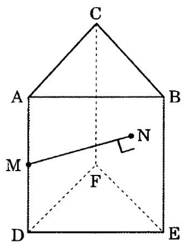
① $\dfrac{1}{3}$ ② $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

③ $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ④ $\dfrac{2}{3}$

⑤ $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

2009 04 대성 4점

. 오른쪽 그림과 같은 정삼각기둥 $ABC-DEF$에서 꼬인 위치에 있는 모서리는 모두 a쌍이다. 한편, 모서리 AD의 중점을 M, M에서 면 $BCFE$에 내린 수선의 발을 N이라 할 때, 선분 MN과 수직인 모서리의 개수는 b이다. 이때, 두 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은?



① 11 ② 13 ③ 15

④ 17 ⑤ 19

2009 04 대성 4점

7. 그림과 같이

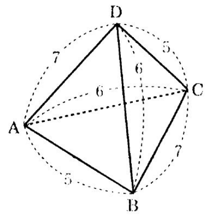
$\overline{AB}=\overline{CD}=5$

$\overline{AC}=\overline{BD}=6$

$\overline{AD}=\overline{BC}=7$

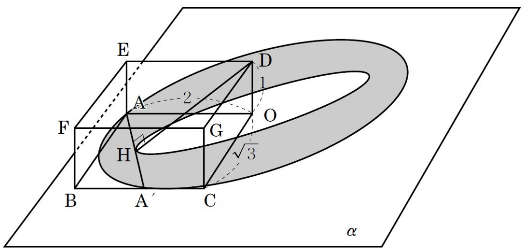
인 사면체 $DABC$가 있다.

이 사면체의 네 꼭짓점을 지나는 구의 겉넓이를 S라 할 때, $\dfrac{S}{\pi}$의 값을 구하시오.



2009 04 대성 4점

6. 아래 그림과 같이 평면 α 위에 $\overline{OA}=2$, $\overline{OC}=\sqrt{3}$, $\overline{OD}=1$인 직육면체 $OABC-DEFG$가 있다. 모서리 $\overline{BC}$ 위의 한 점 A'은 $\overline{BA'}=1$인 점이고, 꼭짓점 D에서 선분 $\overline{AA'}$에 내린 수선의 발을 H라 하자. 선분 $\overline{OD}$를 회전축으로 하여 직육면체 $OABC-DEFG$를 $360°$ 회전시킬 때, 선분 $\overline{AA'}$이 평면 α 위에서 그리는 자취의 넓이는?

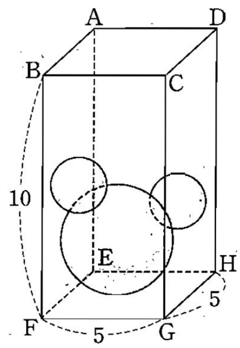


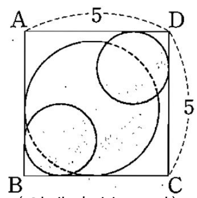
① $\dfrac{\pi}{2}$ ② $\dfrac{3}{4}\pi$ ③ π

④ $\dfrac{3}{2}\pi$ ⑤ 2π

2009 07 종로월례 4점

. 반지름의 길이가 2인 공 한 개와 반지름의 길이가 1인 공 두 개를 그림과 같이 밑면은 한 변의 길이가 5인 정사각형이고, 높이가 10인 직육면체 모양의 통에 넣는다. 이때 큰 공은 통의 세 면 $EFGH$, $BFGC$, $ABFE$에 접하도록 먼저 넣은 후 작은 공 하나는 큰 공과 두 면 $BFGC$, $ABFE$에 접하도록 넣고, 다른 하나는 큰 공과 두 면 $AEHD$, $CGHD$에 접하도록 넣는다. 두 작은 공의 중심 사이의 거리를 l이라 하면 $l^2=a-2\sqrt{b}$ (a, b는 자연수) 이다. 이때 ab의 값을 구하시오.

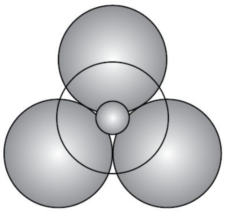




(위에서 본 모양)

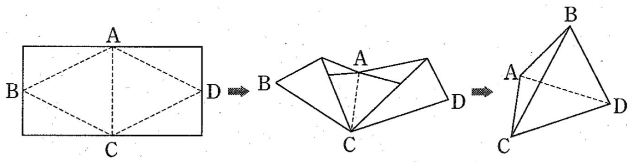
2009 | 0 | 대성 | 4점

9. 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 4개의 구가 서로 접하면서 바닥에 3개, 그 위에 1개가 올려져있다. 이 4개의 구들 사이에 반지름의 길이가 r인 작은 구를 모든 구와 접하게 위치시킬 때, 반지름의 길이 r의 값은 $\dfrac{\sqrt{m}}{2}+n$이다. 이때, m^2+n^2의 값을 구하시오. (단, m, n은 정수이다.)



2009 | 0 | 비상에듀 | 4점

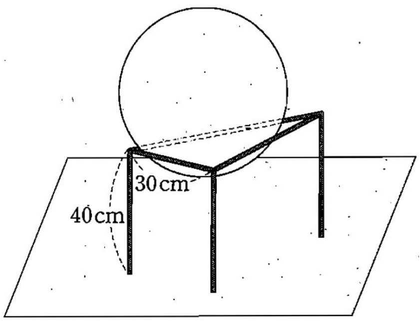
11. 가로의 길이가 $8\sqrt{3}$이고 세로의 길이가 $4\sqrt{3}$인 직사각형 모양의 종이를 점선 부분을 접어서 그림과 같이 사면체를 만들었다.



이때, 만들어진 사면체의 부피를 구하시오.

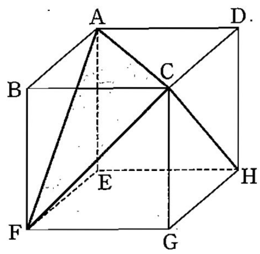
2009 | 07 | 종로월례 | 4점

10. 골동품 수집가인 동현씨는 어느 골동품 가게에서 신비롭고 커다란 유리 구슬을 발견했다. 구슬은 반지름의 길이가 $25cm$인 보기 드문 투명한 것이었고 보는 각도에 따라 구슬 속에 비치는 모양도 달라졌다. 그는 많은 돈을 주고 구입하였고, 집으로 돌아온 후 그 구슬을 안전하게 보관하기 위해서 받침대를 제작하였는데, 받침대는 삼각형 모양의 틀과 세 개의 다리로 이루어졌다. 삼각형 모양의 틀의 세 각의 크기는 $30°$, $60°$, $90°$로 하였고, 가장 작은 변의 길이는 $30cm$로 하였다. 또한, 각 꼭짓점에서 다리를 제작하여 그 길이가 $40cm$가 되게 하였다. 이 유리 구슬을 틀에 놓았을 때, 바닥에서 유리 구슬 꼭대기까지의 높이를 $h\,cm$라 하면 $(h-65)^2=a\sqrt{3}+b$ (a, b는 정수)이다. 이때 $a+b$의 값을 구하시오.



2009 | 0 | 종로월례 | 4점

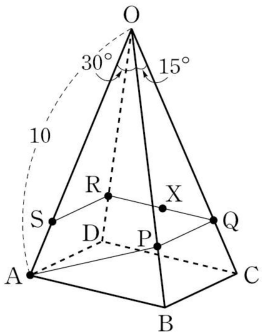
12. 한 변의 길이가 1인 정육면체 $ABCD-EFGH$에서 직선 CH와 평면 ACF가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\sin\theta$의 값은?



① $\dfrac{1}{3}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ④ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

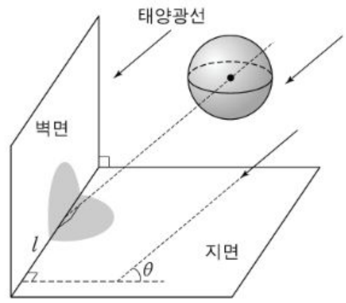
2009 0 가 4점

13. 사각뿔 $O-ABCD$가 그림과 같이 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=\overline{OD}=10$
$\angle AOB=\angle COD=30^\circ$
$\angle BOC=\angle DOA=15^\circ$
이고, 밑면이 직사각형이다. 꼭짓점 A를 출발하여 사각뿔의 옆면을 따라 모서리 OA 위의 한 점 S로 돌아오는 최단 경로를 잡을 때, 최단 경로와 세 모서리 OB, OC, OD가 만나는 점을 각각 P, Q, R라 하자. 선분 QR의 중점 X에 대하여 선분 QR과 선분 OX가 수직일 때, $\sqrt{3}\times\overline{OS}$의 값을 구하시오.



2009 09 평가원 4점

14. 그림과 같이 반지름의 길이가 r인 구 모양의 공이 공중에 있다. 벽면과 지면은 서로 수직이고, 태양광선이 지면과 크기가 θ인 각을 이루면서 공을 비추고 있다.
태양 광선과 평행하고 공의 중심을 지나는 직선이 벽면과 지면의 교선 l과 수직으로 만난다. 벽면에 생긴 공의 그림자 위의 점에서 교선 l까지 거리의 최댓값을 a라 하고, 지면에 생기는 공의 그림자 위의 점에서 교선 l까지 거리의 최댓값을 b라 하자.
옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?



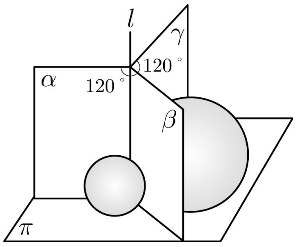
| 보 기 |

ㄱ. 그림자와 교선 l의 공통부분의 길이는 $2r$이다.
ㄴ. $\theta=60^\circ$이면 $a<b$이다.
ㄷ. $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{1}{r^2}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2009 10 4점

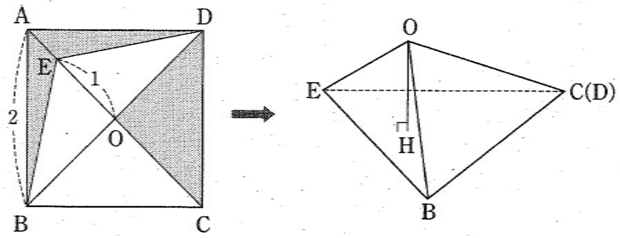
1 . 평면 π에 수직인 직선 l을 경계로 하는 세 반평면 α, β, γ가 있다. α, β가 이루는 각의 크기와 β, γ가 이루는 각의 크기는 모두 120°이다. 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 구가 π, α, β에 동시에 접하고, 반지름의 길이가 2인 구가 π, β, γ에 동시에 접한다.



두 구의 중심 사이의 거리를 d라 할 때, $3d^2$의 값을 구하시오.
(단, 두 구는 평면 π의 같은 쪽에 있다.)

2009 10 비상에듀 4점

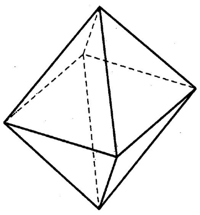
17. 한 변의 길이가 2인 정사각형 $ABCD$의 대각선의 교점을 O라 하자. 선분 AO 위에 점 O로부터 거리가 1인 점 E에 대하여 세 삼각형 ABE, ADE, OCD 부분을 잘라내고, 두 점 C와 D를 붙여서 사면체 모양의 도형을 만든다. 점 O에서 평면 BCE에 내린 수선의 발을 H라고 할 때, 선분 OH의 길이는?



① $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$
④ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

2009 10 4점

16. 정팔면체의 12개의 모서리 중에서 임의로 택한 서로 다른 두 모서리가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $|\cos\theta|$의 값을 확률변수 X라고 하자. X의 기댓값을 $\frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p, q는 서로소인 자연수이다.)



2009 10 대 4점

1 . 반지름의 길이가 각각 2, 4, 8이고 서로 외접하는 세 개의 구가 평면 α 위에 놓여 있다. 세 구의 중심을 각각 A, B, C라 하고, 평면 ABC와 평면 α가 이루는 예각의 크기를 θ라 하자. $\cos\theta = \frac{b}{a}\sqrt{2}$일 때, $a+b$의 값을 구하시오.
(단, a, b는 서로소인 자연수이다.)

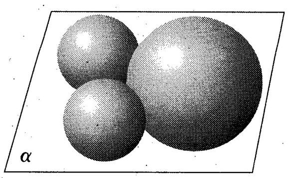
2009 11 · 4점

19. 평면 α 위에 반지름의 길이가 5인 원 O가 있고, 평면 β 위에 반지름의 길이가 6인 원 O 이 있다. 두 평면 α, β가 이루는 예각의 크기는 30° 이고, 두 원 O, O 이 서로 다른 두 점에서 만나서 생긴 공통현의 길이는 6이다. 두 원 O, O 의 중심 사이의 거리를 d라 할 때, d의 최솟값은?

① $\sqrt{5}$　② $\sqrt{6}$　③ $\sqrt{7}$
④ $2\sqrt{2}$　⑤ 3

2009 11 · 4점

20. 그림과 같이 반지름의 길이가 각각 1, 1, 2인 세 개의 구 C_1, C_2, C_3이 있다. 두 구 C_1과 C_2, C_2와 C_3, C_3과 C_1은 서로 외접하고, 세 구는 모두 평면 α의 위쪽 부분에 접하고 있다. 세 구의 중심을 각각 A, B, C라 하고, 삼각형 ABC를 포함하는 평면과 평면 α가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은?

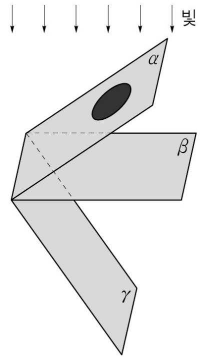


① $\frac{\sqrt{5}}{3}$　② $\frac{3}{4}$　③ $\frac{\sqrt{11}}{4}$
④ $\frac{\sqrt{14}}{4}$　⑤ $\frac{\sqrt{17}}{4}$

유형 2.

2009 10 가 · 3점

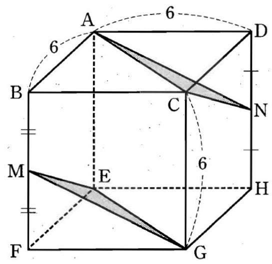
21. 그림과 같이 한 직선에서 만나는 세 평면 α, β, γ가 있다. 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기는 30°, 두 평면 β, γ가 이루는 각의 크기는 60° 이다.
평면 α 위에 반지름의 길이가 3인 원판이 있고, 평면 β에 수직으로 빛이 비추고 있다. 평면 γ에 생기는 원판의 그림자의 넓이는?



① $9\sqrt{3}\pi$　② 18π
③ $18\sqrt{3}\pi$　④ 27π
⑤ $27\sqrt{3}\pi$

2009 10 종로 · 3점

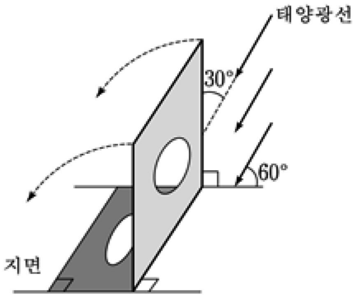
22. 그림과 같이 한 변의 길이가 6인 정육면체 $ABCD-EFGH$ 에서 변 BF, DH의 중점을 각각 M, N이라 할 때, 삼각형 ACN의 평면 MGE 위로의 정사영의 넓이는?



① $9\sqrt{6}$　② $18\sqrt{2}$
③ $15\sqrt{3}$　④ $9\sqrt{10}$
⑤ $18\sqrt{6}$

2009 04 4점

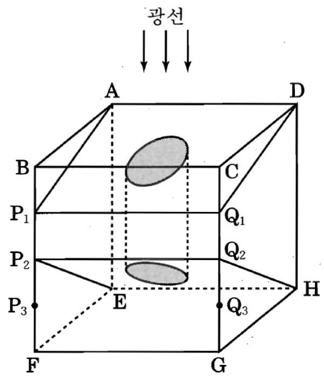
23. 그림과 같이 태양광선이 지면과 60° 의 각을 이루면서 비추고 있다. 한 변의 길이가 4인 정사각형의 중앙에 반지름의 길이가 1인 원 모양의 구멍이 뚫려 있는 판이 있다. 이 판은 지면과 수직으로 서 있고 태양광선과 30° 의 각을 이루고 있다. 판의 밑변을 지면에 고정하고 판을 그림자 쪽으로 기울일 때 생기는 그림자의 최대 넓이를 S라 하자. S의 값을 $\dfrac{\sqrt{3}(a+b\pi)}{3}$라 할 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 정수이고 판의 두께는 무시한다.)



2009 07 대성월례 4점

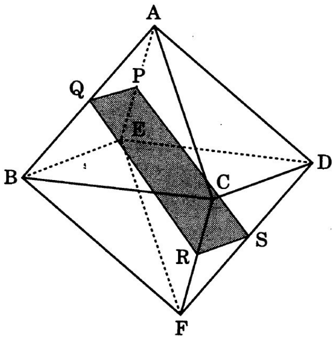
24. 그림과 같이 한 모서리의 길이가 4인 정육면체 $ABCD-EFGH$에서 선분 BF를 4등분하는 점들을 점 B에 가까운 순서대로 P_1, P_2, P_3이라하고, 선분 CG를 4등분하는 점들을 점 C에 가까운 순서대로 Q_1, Q_2, Q_3이라 하자. 평면 AP_1Q_1D 위에 있는 반지름의 길이가 2인 원의 내부를 평면 $EFGH$와 수직 방향으로 광선을 비추었을 때, 평면 EP_2Q_2H에 생기는 그림자의 넓이는 $\dfrac{b\sqrt{85}}{a}\pi$이다. $a+b$의 값을 구하시오.

(단, a, b는 서로소인 자연수이다.)



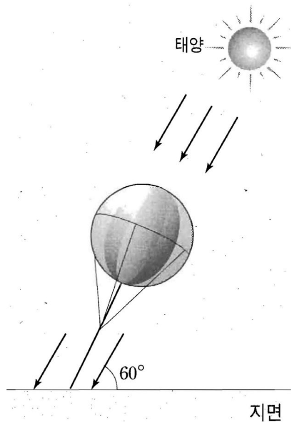
2009 〉 0 〉 대성월례 4점

2 . 그림과 같이 한 모서리의 길이가 8인 정팔면체 $ABCDEF$의 모서리 AE, AB, CF, DF의 중점을 각각 P, Q, R, S라 할 때, 사각형 $PQRS$의 평면 $BCDE$ 위로의 정사영의 넓이를 구하시오.



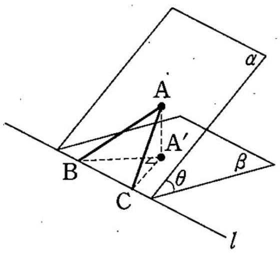
2009 〉 0 〉 4점

27. 그림과 같이 반지름의 길이가 $3m$ 인 구 모양의 애드벌룬에 태양 광선이 지면과 $60°$ 의 각도로 비출 때, 지면에 생기는 이 애드벌룬의 그림자의 넓이는 km^2 이다. 이때, $\frac{k^2}{\pi^2}$ 의 값을 구하시오.



2009 〉 0 〉 종로월례 4점

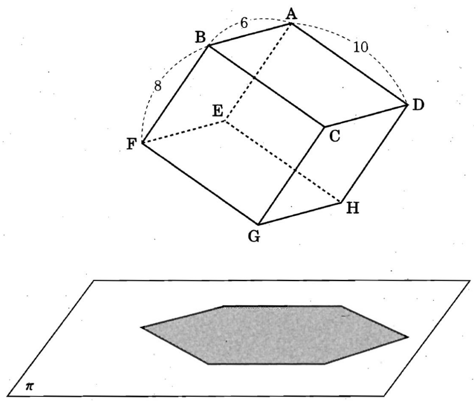
26. 그림과 같이 두 평면 α, β가 이루는 각을 θ라 할 때, $\tan\theta = \frac{1}{3}$이다. 두 평면 α, β의 교선 l 위의 두 점 B, C와 평면 α 위의 점 A에 대하여 ABC의 평면 β 위로의 정사영은 $\angle A = 90°$ 인 $A\,BC$된다.



$\tan(\angle ABA) = \frac{1}{5}$일 때, $\tan(\angle ACA) = \frac{q}{p}$ (p, q는 서로소인 자연수)이다. 이때 $p+q$의 값을 구하시오.

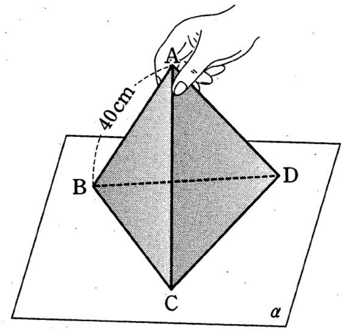
2009 〉 09 〉 대성 4점

2 . 그림과 같이 $\overline{AB} = 6$, $\overline{BF} = 8$, $\overline{AD} = 10$ 인 직육면체 $ABCD-EFGH$를 평면 π 위로 정사영시킬 때, 꼭짓점 A에서 만나는 세 평면 $ABCD$, $ABFE$, $AEHD$의 평면 π 위로의 정사영의 넓이가 각각 30, S, $20\sqrt{6}$ 이다. S^2의 값을 구하시오.



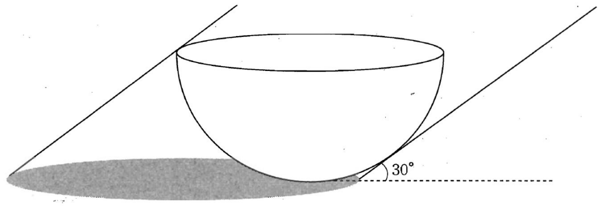
2009 09 종로 4점

29. 그림과 같이 평면 α 위의 한 모서리의 길이가 $40cm$ 인 정사면체 모양의 입체 $ABCD$가 놓여 있다. 이 정사면체의 모서리 BC 를 평면에 고정시키고 밑면을 들어 올렸더니 꼭짓점 A의 평면 α 위로의 정사영이 모서리 BC 위에 위치하였다. 이때 이 정사면체의 평면 α 위로의 정사영의 넓이를 $\frac{a\sqrt{6}}{b}cm^2$ (a, b는 서로소인 자연수)라 하자. $a+b$의 값을 구하시오.



2009 10 대성 4점

30. 그림과 같이 반지름의 길이가 4인 반구 모양의 입체가 바닥에 놓여 있다. 이 입체의 평평한 면은 바닥면에 평행하고, 바닥면과 30° 의 각을 이루도록 빛을 비추었을 때, 바닥면에 생기는 이 입체의 그림자의 넓이는 $n\pi$이다. 자연수 n의 값을 구하시오.



2009 11 대성 4점

31. 점 A(10, 5)를 지나고 x축에 평행한 직선과 포물선 $y^2=8x$와의 교점을 P라 하고 또 이 포물선의 초점을 F라고 할 때, $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PF}}$의 값을 구하여라.

유형 3. 공간좌표

2009 04 3점

32. 다음 조건을 만족하는 점 P 전체의 집합이 나타내는 도형의 둘레의 길이는?

> 좌표공간에서 점 P를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 구가 두 개의 구 $x^2+y^2+z^2=1$, $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=4$에 동시에 외접한다.

① $\frac{2\sqrt{5}}{3}\pi$ ② $\sqrt{5}\pi$ ③ $\frac{5\sqrt{5}}{3}\pi$
④ $2\sqrt{5}\pi$ ⑤ $\frac{8\sqrt{5}}{3}\pi$

2009 0 대성 3점

33. 좌표공간에서 평면 $3x+2y+6z=18$과 xy평면, yz평면, zx평면으로 둘러싸인 사면체에 내접하는 구의 부피를 V라고 한다. 이때 $90\times\frac{V}{\pi}$의 값을 구하시오.

2009 07 대성월례 3점

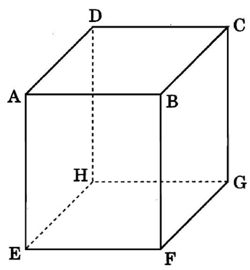
34. 두 구

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=1$$
$$(x-3)^2+(y-4)^2+(z-5)^2=17$$

의 교선을 포함하는 평면을 α라 하자. 두 구의 중심을 각각 O, O이라 할 때, 평면 α는 $\overline{OO}$을 $m:n$으로 외분한다. m^2+n^2의 값을 구하시오. (단, m, n은 서로소인 자연수이다.)

2009 09 대성 3점

3 . 좌표공간에 직육면체 $ABCD-EFGH$가 있다. 네 꼭짓점 A, C, F, H의 좌표가
$A(1,\ 2,\ 3)$, $C(3,\ 2,\ 4)$, $F(3,\ 4,\ 2)$, $H(3,\ 2,\ 1)$
이다. 꼭짓점 B의 좌표를 $(a,\ b,\ c)$라 할 때, $a^2+b^2+c^2$의 값은?

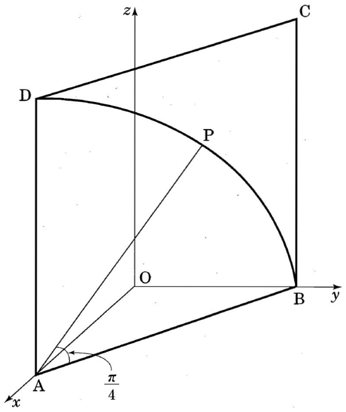


① 25 ② 26 ③ 27
④ 28 ⑤ 29

2009 11 대성 3점

36. 좌표공간의 네 점

$A(1,\ 0,\ 0)$, $B(0,\ 1,\ 0)$, $C(0,\ 1,\ \sqrt{2})$, $D(1,\ 0,\ \sqrt{2})$를 꼭짓점으로 하는 정사각형 $ABCD$가 있다.

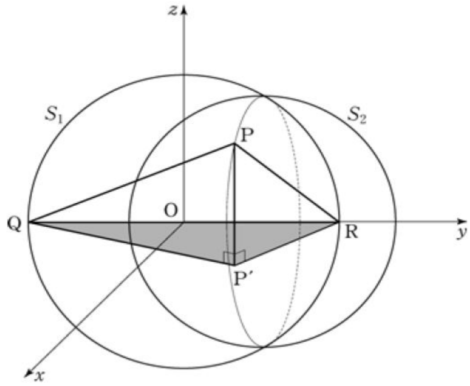


점 A를 중심으로 하고 두 점 B, D를 지나는 사분원 위의 한 점 $P(a,\ b,\ c)$에 대하여 $\angle BAP = \frac{\pi}{4}$이다. $a+b+c$의 값은?

① 2 ② $1+\sqrt{2}$ ③ $4-\sqrt{2}$
④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3

2009 04 4점

37. 두 구 $x^2+y^2+z^2=81$, $x^2+(y-5)^2+z^2=56$을 각각 S_1, S_2라 하자. 두 구 S_1, S_2가 만나서 생기는 원 위의 한 점을 P라 하고, 점 P의 xy평면 위로의 정사영을 P'이라 하자. 구 S_1과 y축이 만나는 점을 각각 Q, R라 할 때, 사면체 $PQP'R$의 부피의 최댓값을 구하시오.



① 60 ② 68 ③ 80
④ 84 ⑤ 90

2009 0 · 4점

3 . 좌표공간에서 두 개의 구

$O_1 : x^2+y^2+(z-2)^2=4$, $O_2 : (x-2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=4$

가 있다. 이 두 개의 구가 만나서 생기는 교선을 포함하는 평면을 α라 하고, 두 구 O_1, O_2를 각각 xy 평면에 정사영 시킨 도형의 내부 영역을 C_1, C_2라 하자. 두 영역 C_1, C_2에 공통으로 포함되는 영역을 평면 α에 정사영 시켰을 때 생기는 영역의 넓이는?

① $\frac{\pi-2}{3}$ ② $\frac{13\pi}{24}$ ③ $\frac{2(\pi-2)}{3}$

④ $\frac{13\pi}{12}$ ⑤ $\frac{4(\pi-1)}{3}$

2009 0 대성월례 · 4점

39. 좌표공간에서 구 $x^2+y^2+z^2-2x-6y-2az+b=0$이 점 $A(3,\ 4,\ 1)$을 지나고 xy 평면에 접할 때, 이 구가 평면 $y=z$와 만나서 생기는 도형의 넓이는 $n\pi$이다. 자연수 n의 값을 구하시오. (단, a, b는 실수이다.)

2009 0 · 4점

40. 좌표공간에 중심이 $(0,\ 0,\ 3)$이고, 반지름의 길이가 $\frac{3}{2}$인 구가 있다. 이 구의 내부의 점 중에서 x좌표, y좌표, z좌표가 모두 정수인 점의 개수를 구하시오,

2009 09 대성 · 4점

41. 좌표공간에 다음과 같은 두 영역 A, B가 있다.

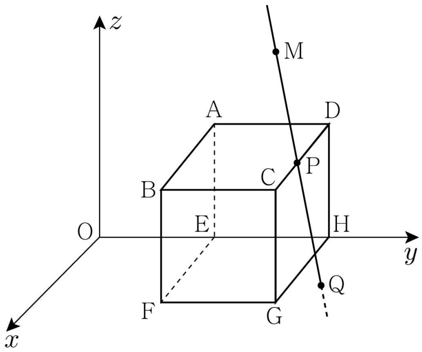
$$A=\{(x,\ y,\ z)\mid x^2+y^2\le 1\}$$
$$B=\{(x,\ y,\ z)\mid 2x+2y+z\le 6\}$$

점 P가 영역 $A\cap B$에 속할 때, 점 P의 z좌표의 최댓값이 $a+b\sqrt{2}$이다. a^2+b^2의 값을 구하시오.

(단, a, b는 유리수이다.)

2009 10 4점

42. 그림과 같이 좌표공간에 있는 정육면체 $ABCD-EFGH$에서 $A(0,\ 3,\ 3)$, $E(0,\ 3,\ 0)$, $F(3,\ 3,\ 0)$, $H(0,\ 6,\ 0)$이다.

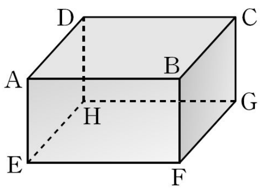


점 $M(1,\ 5,\ 6)$과 정육면체의 모서리 위를 움직이는 점 P에 대하여 직선 MP가 xy 평면과 만나는 점을 Q라 하자. 이때, 선분 MQ의 길이의 최댓값은?

① $2\sqrt{11}$ ② $2\sqrt{13}$ ③ $2\sqrt{14}$
④ $2\sqrt{15}$ ⑤ $2\sqrt{17}$

2009 10 가 4점

43. 좌표공간에 직육면체 $ABCD-EFGH$가 있다. 세 꼭짓점 $C,\ E,\ H$의 좌표가 각각 $C(1,\ 5,\ 5)$, $E(3,\ 2,\ 3)$, $H(1,\ 2,\ 3)$일 때, 항상 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?



| 보 기 |

ㄱ. 선분 CH는 x축에 수직이다.
ㄴ. 점 B의 좌표는 $(3,\ 5,\ 5)$이다.
ㄷ. 모서리 AB는 y축과 평행하다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2009 10 4점

44. 좌표공간에 두 구 C_1, C_2가 있다. 구 C_1의 yz 평면 위로의 정사영의 둘레는 원 $(y-4)^2+(z-3)^2=4$, $x=0$이고, 구 C_2의 yz 평면 위로의 정사영의 둘레는 원 $(y-4)^2+(z-3)^2=36$, $x=0$이다. 구 C_1이 구 C_2에 내접할 때, 두 구의 중심과 원점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이는?

① 5 ② 10 ③ 15
④ 20 ⑤ 25

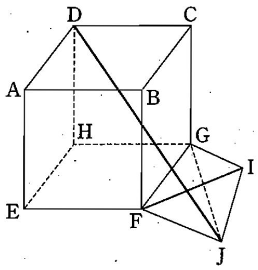
2009 10 비상에듀 4점

4 . 좌표공간의 구 $x^2+y^2+(z-c)^2=9$가 xy 평면과 만나는 교선은 반지름의 길이가 1인 원 C이다. z축 위의 점 $A(0,\ 0,\ 3)$과 원 C 위의 점 P를 지나는 직선이 구와 만나는 또 다른 점을 Q라고 할 때, 점 Q가 그리는 도형의 반지름의 길이는 $\alpha+\beta\sqrt{2}$이다. 이때, $100\alpha\beta$의 값을 구하시오.

(단, $c<0$이고, α와 β는 유리수이다.)

2009 11 종로 4점

46. 한 모서리의 길이가 2인 정육면체 $ABCD-EFGH$와 한 모서리의 길이가 2인 정사면체 $FGIJ$가 있다. 면 $EFGH$와 면 FGI는 한 평면 위에 있고, 꼭짓점 J는 아래쪽으로 향하고 있다. 이때 꼭짓점 D와 J사이의 거리는?



① $\sqrt{8+\frac{2}{3}(\sqrt{2}+\sqrt{6})}$

② $\sqrt{8+\frac{4}{3}(\sqrt{3}+2\sqrt{6})}$

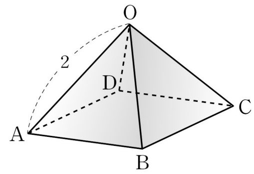
③ $\sqrt{9+\frac{4}{3}(\sqrt{2}+\sqrt{6})}$

④ $\sqrt{10+\frac{2}{3}(2\sqrt{3}+\sqrt{6})}$

⑤ $\sqrt{12+\frac{4}{3}(\sqrt{3}+2\sqrt{6})}$

2009 0 가 4점

47. 좌표공간에 그림과 같이 모든 모서리의 길이가 2인 정사각뿔 $O-ABCD$가 있다. $O(0,\ 0,\ 0)$, $A(2,\ 0,\ 0)$, $B(1,\ \sqrt{3},\ 0)$일 때, 꼭짓점 C의 z좌표는?



(단, 점 C의 z좌표는 음수이다.)

① $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ② $-\frac{\sqrt{6}}{3}$ ③ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

④ $-\frac{\sqrt{6}}{2}$ ⑤ $-\frac{2\sqrt{6}}{3}$

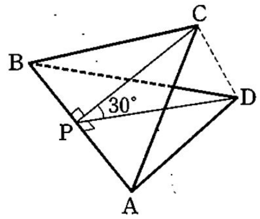
06. 공간도형과 공간좌표

1. 정답 ④
2. 정답 10
3. 정답 ②
4. 정답 ①
5. 정답 ④
6. 정답 ③
7. 정답 55
8. 정답 182
9. 정답 37
10. 정답 175
11. 정답 48
12. 정답 ⑤
13. 정답 10
14. 정답 ③
15. 정답 31
16. 정답 16
17. 정답 ③
18. 정답 3
19. 정답 ③
20. 정답 ①
21. 정답 ①
22. 정답 ①
23. 정답 30
24. 정답 25
25. 정답 16
26. 정답 19
27. 정답 108
28. 정답 864
29. 정답 803
30. 정답 24
31. 정답 12
32. 정답 ⑤
33. 정답 120
34. 정답 50
35. 정답 ⑤
36. 정답 ①
37. 정답 ④
38. 정답 ③
39. 정답 9
40. 정답 19
41. 정답 40
42. 정답 ⑤
43. 정답 ③
44. 정답 ②
45. 정답 96
46. 정답 ⑤
47. 정답 ⑤

6. 공간도형과 공간좌표

1. 정답 ④

꼭짓점 C와 D에서 변 AB에 내린 수선의 발을 P라고 하자.
그러면, $\angle CPD = 30^\circ$ 이다.
정삼각형의 한 변의 길이를 a라고 하면, $\overline{CP} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$이다.



CDP 에서

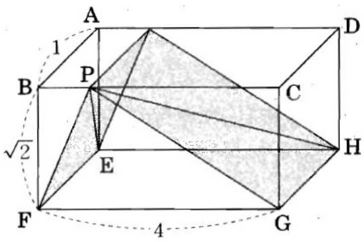
$$\overline{CD}^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot \cos 30^\circ$$
$$= \frac{6}{4}a^2 - \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{6-3\sqrt{3}}{4}a^2$$

CAD 에서

$$\cos\theta = \frac{a^2 + a^2 - \frac{6-3\sqrt{3}}{4}a^2}{2 \cdot a \cdot a} = \frac{2 - \frac{6-3\sqrt{3}}{4}}{2} = \frac{2+3\sqrt{3}}{8}$$

2. 정답 10

다음 그림에서 두 평면 PFE와 PGH가 이루는 각의 크기는 직선 PF와 직선 PG가 이루는 각의 크기와 같다.



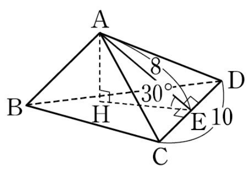
(i) P가 B 또는 C에 있을 때 θ가 최소이므로
$\cos\theta$의 값은 최대이다.
$\cos\theta = \frac{\overline{BF}}{\overline{BG}} = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{3}$

(ii) P가 모서리 BC의 중점에 있을 때 θ가 최대이므로
$\cos\theta$의 값은 최소이다.
코사인법칙에 의해 $\cos\theta = -\frac{1}{3}$

$\therefore 45(M^2 + m^2) = 45\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{9}\right) = 10$

3. 정답 ②

점 A에서 모서리 CD에 내린 수선이 선분 CD와 만나는 점을 E라 하자.
$\triangle ACD$의 넓이가 40이므로
$\overline{AE} = 8$
면 BCD와 면 ACD의 이면각이 $30°$이므로 $\frac{\overline{AH}}{\overline{AE}} = \sin 30°$



$\therefore \overline{AH} = 4$

[다른 풀이]
점 A에서 모서리 CD에 내린 수선의 발을 E라 하면
삼수선의 정리에 의하여 $AE \perp HE$
따라서 AEH는 직각삼각형이고 $\angle AEH = 30^\circ$ 이므로
$\overline{AE} = 8$ $\therefore \overline{AH} = 4$

4. 정답 ①

정육면체의 한 모서리의 길이를 $2a$라 하자.
$\overline{BD}$의 중점을 M이라 하면
$\overline{EM} = \sqrt{\overline{ED}^2 - \overline{DM}^2} = \sqrt{(2\sqrt{2}a)^2 - (\sqrt{2}a)^2} = \sqrt{6}a$
마찬가지로, $\overline{GM} = \sqrt{6}a$
$\overline{EG} = 2\sqrt{2}a$이므로 삼각형 MEG에 제2코사인법칙을 적용하면

$$\cos\theta = \frac{6a^2 + 6a^2 - 8a^2}{2 \cdot \sqrt{6}a \cdot \sqrt{6}a} = \frac{1}{3}$$

5. 정답 ④

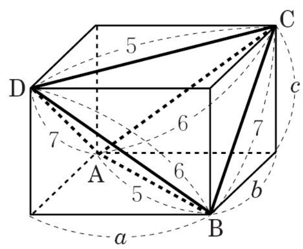
모서리 AB와 꼬인 위치에 있는 모서리는 모리서 CF, EF, DF의 3개이고, 마찬가지로 모서리 BC, CA의 경우도 각각 3개씩 생긴다.
한편, 모서리 AD와 꼬인 위치에 있는 모서리는 모서리 BC, EF의 2개인데, 이 중 모서리 BC는 앞에 것과 중복이다.
마찬가지로 모서리 BE, CF의 경우도 각각 1개씩 생긴다.
즉, 꼬인 위치에 있는 모서리는 모두
$a = 3+3+3+1+1+1 = 12$ (쌍)
한편 $\overline{MN}$과 면 $BCFE$는 수직이므로 $\overline{MN}$과 면 $BCFE$의 모든 모서리는 수직이다. 또한, $\overline{AD}$도 면 $BCFE$와 평행하므로 $\overline{MN}$과 수직이다.
즉, $\overline{MN}$과 수직인 모서리의 개수는 $b = 4+1 = 5$ (개)
$\therefore a + b = 17$

6. 정답 ③

삼각형 ABA 에서 $\angle A\,AB = \frac{\pi}{6}$이므로 $\angle A\,AO = \frac{\pi}{3}$
$\overline{DH} \perp \overline{AA}$이고 $\overline{DO} \perp$ 평면 $OABC$이므로
삼수선의 정리에 의하여 $\overline{OH} = \overline{AA}$
$\cos\angle A\,AO = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{\overline{AH}}{\overline{OA}} = \frac{1}{2}$, $\overline{OA} = 2$이므로 $\overline{AH} = 1$이고
$\overline{OH} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$
$\overline{OA} = \sqrt{\overline{OC}^2 + \overline{OA}^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$, $\overline{OA} = 2$이므로
삼각형 OAA 은 $\overline{OA} = \overline{OA} = 2$인 이등변삼각형이다
점 O에서 선분 $\overline{AA}$까지의 최대 거리는
$\overline{OA} = \overline{OA} = 2$이고, 최소 거리는 $\overline{OH} = \sqrt{3}$ 이므로
선분 $\overline{AA}$가 평면 α 위에서 그리는 자취의 넓이는
$2^2\pi - (\sqrt{3})^2\pi = \pi$

7. 정답 55

서로 마주보며 꼬인 위치에 있는 두 변 $\overline{AC}$, $\overline{BD}$의 길이가 각각 같으므로 오른쪽 그림과 같이 세 모서리의 길이가 a, b, c인 직육면체를 생각할 수 있다.

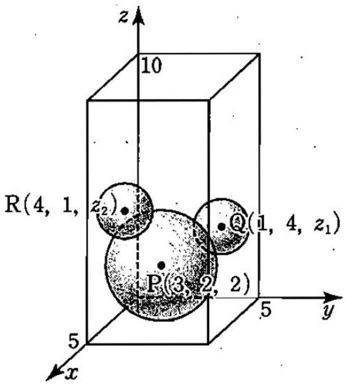


$a^2 + b^2 = 5^2$, $b^2 + c^2 = 7^2$,
$c^2 + a^2 = 6^2$이므로
변끼리 더하면
$2(a^2 + b^2 + c^2) = 110$ $\therefore a^2 + b^2 + c^2 = 55$
따라서 사면체의 각 꼭짓점을 지나는 구는 그림의 직육면체의 모든 꼭짓점을 지나므로 구의 지름은 직육면체의 대각선의 길이와 같다.

즉, 구의 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{55}}{2}$ 이므로 구의 겉넓이 S 는

$S=4\pi\times\left(\frac{\sqrt{55}}{2}\right)^2=55\pi \quad \therefore \frac{S}{\pi}=55$

8. 정답 182



그림과 같이 좌표 공간에 올려 세 공의 중심을 각각 P, Q, R라 하면

$P(3,\ 2,\ 2)$ …… ㉠

$Q(1,\ 4,\ z_1)$ $(z_1>2)$ …… ㉡

$R(4,\ 1,\ z_2)$ $(z_2>3)$ …… ㉢

㉠, ㉡에서

$\overline{PQ}=2+1=3$

(∵ 서로 외접)

$\sqrt{(1-3)^2+(4-2)^2+(z_1-2)^2}=3,\ z_1=3$

㉠, ㉢에서

$\overline{PR}=2+1=3$ (∵ 서로 외접)

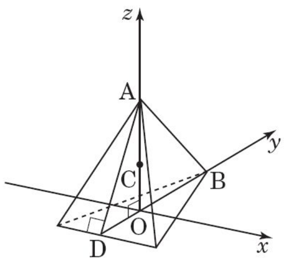
$\sqrt{(4-3)^2+(1-2)^2+(z_2-2)^2}=3 \quad \therefore R(4,\ 1,\ 2+\sqrt{7})$

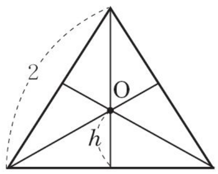
$\therefore l^2=\overline{QR}^{\,2}=(4-1)^2+(1-4)^2+(2+\sqrt{7}-3)^2=26-2\sqrt{7}$

$a=26,\ b=7 \quad \therefore ab=26\times7=182$

9. 정답 37

반지름의 길이가 1인 4개의 구의 중심을 서로 연결하면 한 변의 길이가 2인 정사면체가 된다. 결국 대칭성에 의하여 작은 구의 중심은 정사면체의 중심과 일치하게 된다. 정사면체의 각 면은 정삼각형이고 그림에서의 h와 정사면체의 꼭짓점 A에서 밑면에 내린 수선의 길이 l을 구해보자.





위의 그림에서 정삼각형에 대한 넓이 공식을 적용하면,

$\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{3}=3\left(\frac{1}{2}\times2\times h\right) \quad \therefore h=\frac{1}{\sqrt{3}}$

또, 수선의 길이 l은 직각삼각형 ADO로부터

$l^2=(\sqrt{3})^2-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \quad \therefore l=\sqrt{\frac{8}{3}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

정사면체의 중심 C에서 두 꼭짓점 A와 B에 이르는 거리가 같으므로 $\overline{CA}=\overline{CB}$이다.

이때, 좌표 $C(0,\ 0,\ z)$, $A(0,\ 0,\ l)$, $B(0,\ \sqrt{3}-h,\ 0)$

으로부터 $(z-l)^2=(\sqrt{3}-h)^2+(z-0)^2 \quad \therefore z=\frac{1}{\sqrt{6}}$

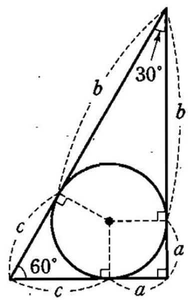
따라서 작은 구의 반지름의 길이가 r일 때,

$\overline{CA}=1+r=l-z$이므로 $r=l-1-z=\frac{\sqrt{6}}{2}-1$

$\therefore m=6,\ n=-1 \quad \therefore m^2+n^2=37$

10. 정답 175

틀에 놓여 있는 부분을 잘라서 그려보면 오른쪽 그림과 같다.



$a+b=30\sqrt{3},\ a+c=30,\ b+c=60$

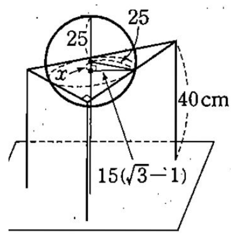
$\therefore a+b+c=45+15\sqrt{3}$

$\therefore a=15(\sqrt{3}-1),$

$b=15(\sqrt{3}+1),$

$c=15(3-\sqrt{3})$

유리 구슬의 중심에서부터 받침틀까지의 거리를 x라고 하면



$x^2=25^2-\{15(\sqrt{3}-1)\}^2$

$=(40-15\sqrt{3})(10+15\sqrt{3})$

$=450\sqrt{3}-275$

$\therefore x=h-(25+40)=h-65$

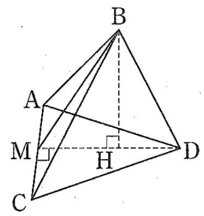
$\therefore (h-65)^2=450\sqrt{3}-275$

$a=450,\ b=-275$

$\therefore a+b=175$

11. 정답 48

그림에서 $\overline{AC}=\overline{BD}=4\sqrt{3}$이고 나머지 모서리의 길이는 $2\sqrt{15}$이다.



삼각형 ACD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times4\sqrt{3}\times4\sqrt{3}=24$이고

BMD는 정삼각형이므로

$\angle BMD=\frac{\pi}{3}$이다.

높이 BH는 $4\sqrt{3}\times\sin\frac{\pi}{3}=6$이므로 구하는 부피는

$\frac{1}{3}\times24\times6=48$이다.

12. 정답 ⑤

E를 원점으로 $\overrightarrow{EF}$를 x축, $\overrightarrow{EH}$를 y축, $\overrightarrow{EA}$를 z축으로 하는 좌표공간을 생각하면 평면 ACF는 $F(1,\ 0,\ 0)$, $A(0,\ 0,\ 1)$, $C(1,\ 1,\ 1)$을 지나는 평면이고, 이 평면의 방정식은 $x-y+z-1=0$이므로 법선벡터는 $\vec{h}=(1,\ -1,\ 1)$이다.

한편, 직선 CH의 방향벡터는 $\vec{l}=(1,\ 0,\ 1)$이다.

따라서 구하는 각을 θ라 하면 $\vec{h}\cdot\vec{l}=2=\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

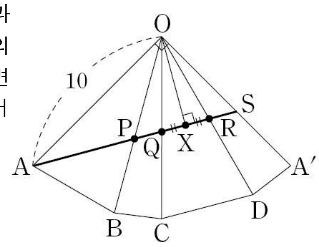
13. 정답 10

사각뿔의 전개도는 오른쪽 그림과 같다. 이때, 점 X는 선분 QR의 중점이므로 삼각형 OQR는 이등변삼각형이다. 직각삼각형 OAX에서

$\angle AOX=60^\circ$이므로

$\angle OAX=30^\circ$

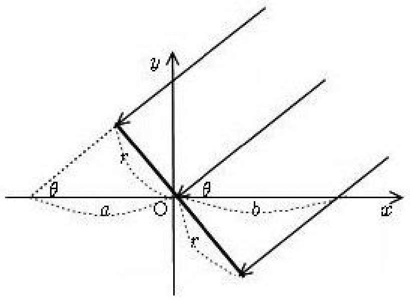
삼각형 OAS는 직각삼각형이므로



$\overline{OS}=10\tan 30^\circ=10\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{10\sqrt{3}}{3}$ $\therefore\ \sqrt{3}\times\overline{OS}=10$

14. 정답 ③

ㄱ. 구의 지름 중 구의 중심을 지나고 교선 l과 평행한 지름의 정사영의 길이는 변하지 않으므로 그림자와 교선 l의 공통부분의 길이는 $2r$이다. (참)



또, 구의 중심을 교선 l 위에 오도록 평행이동하고 구면 위의 원 중에서 태양광선에 수직인 원의 지름을 xy 평면에서 생각하면 그림과 같다.
이때 $a\cos\theta=r$, $b\sin\theta=r$이므로

ㄴ. $a\cos 60^\circ=b\sin 60^\circ$에서 $a=\sqrt{3}b$, 즉 $a>b$ (거짓)

ㄷ. $\cos\theta=\frac{r}{a}$, $\sin\theta=\frac{r}{b}$이므로 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에 대입하면

$\frac{r^2}{a^2}+\frac{r^2}{b^2}=1$ 즉, $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{r^2}$ (참)

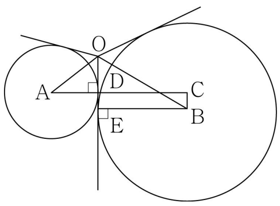
15. 정답 31

그림과 같이 세 평면과 두 구의 평면 π 위로의 정사영을 생각하자.

오른쪽 그림에서

$\angle OAD=\angle OBE=30^\circ$이므로

$\overline{OD}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\overline{OE}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$이다.



따라서 $\overline{DE}=\overline{BC}=\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로

$\overline{AB}=\frac{2\sqrt{21}}{3}$이다. $d=\sqrt{1+\frac{28}{3}}=\sqrt{\frac{31}{3}}$ 이므로 $3d^2=31$이다.

16. 정답 16

12개의 모서리 중에서 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_{12}C_2=66$이다.

이때, 정팔면체의 두 모서리가 이루는 각의 크기는 0, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$ 중의 하나이다.

(ⅰ) $\theta=0$ 즉, $X=\cos 0=1$인 경우의 수는 6이다.

(ⅱ) $\theta=\frac{\pi}{2}$ 즉, $X=\cos\frac{\pi}{2}=0$인 경우의 수는 12이다.

(ⅲ) $\theta=\frac{\pi}{3}$ 즉, $X=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$인 경우의 수는 $66-(6+12)=48$이다.

X	0	$\frac{1}{2}$	1	계
$P(X)$	$\frac{2}{11}$	$\frac{8}{11}$	$\frac{1}{11}$	1

$\therefore\ E(X)=0\times\frac{2}{11}+\frac{1}{2}\times\frac{8}{11}+1\times\frac{1}{11}=\frac{5}{11}$

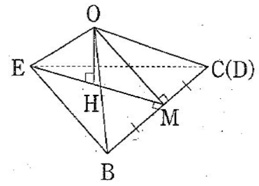
$\therefore\ p+q=11+5=16$

17. 정답 ③

$\overline{BC}$의 중점을 M이라 하면

$\overline{OB}=\overline{OC}$, $\overline{EB}=\overline{EC}$이므로

점 H는 $\overline{EM}$ 위에 있다.



$\overline{EO}$와 면 OBC는 수직이므로

$\overline{EO}\perp\overline{OM}$

OBC에서

$\overline{OB}=\overline{OC}=\sqrt{2}$, $\overline{BM}=1$이므로

$\overline{OM}=\sqrt{\overline{OB}^2-\overline{BM}^2}=\sqrt{2-1}=1$

또한, EBC에서 $\overline{EB}=\overline{EC}=\sqrt{3}$, $\overline{BM}=1$이므로

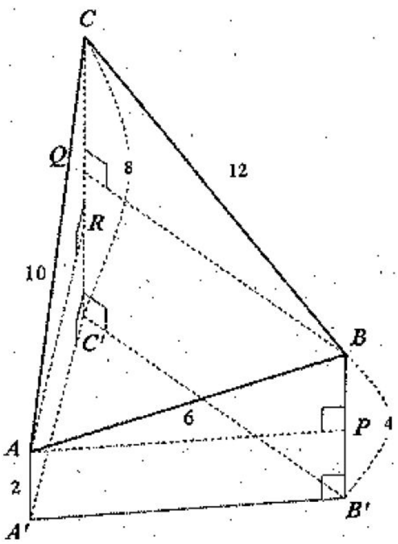
$\overline{EM}=\sqrt{\overline{EB}^2-\overline{BM}^2}=\sqrt{3-1}=\sqrt{2}$

OEM에서 $\overline{EO}\times\overline{OM}=\overline{EM}\times\overline{OH}$이므로

$\overline{OH}=\frac{\overline{EO}\times\overline{OM}}{\overline{EM}}=\frac{1\times 1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

18. 정답 3

점 A, B, C를 평면 α 위로 정사영시킨 점을 각각 A, B, C라 하자. 또한 점 A를 선분 BB, 선분 CC 위로 정사영시킨 점을 각각 P, R이라 하고, 점 B를 선분 CC 위로 정사영시킨 점을 Q라고 할 때, 세 개의 구가 서로 외접하므로



$AB=2+4=6$

$BC=4+8=12$

$CA=8+2=10$

이다.

세 구가 평면 α 위에 있으므로

$BP=4-2=2$

$CQ=8-4=4$

$CR=8-2=6$

이다. 피타고라스 정리에 의해

$A\ B=AP=\sqrt{6^2-2^2}=4\sqrt{2}$

$B\ C=BQ=\sqrt{12^2-4^2}=8\sqrt{2}$

$C\ A=RA=\sqrt{10^2-6^2}=8$

이다. 제이코사인법칙에 의해

$\cos B=\frac{6^2+12^2-10^2}{2\cdot 6\cdot 12}=\frac{5}{9}$

$\cos B=\frac{(4\sqrt{2})^2+(8\sqrt{2})^2-8^2}{2\cdot(4\sqrt{2})\cdot(8\sqrt{2})}=\frac{3}{4}$

$ABC=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 12\cdot\sqrt{1-\left(\frac{5}{9}\right)^2}=8\sqrt{14}$

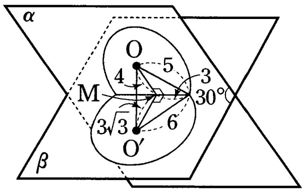
$A\ B\ C=\frac{1}{2}\cdot(4\sqrt{2})\cdot(8\sqrt{2})\cdot\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=8\sqrt{7}$

$\therefore\ \cos\theta=\frac{8\sqrt{7}}{8\sqrt{14}}=\frac{1}{2}\sqrt{2}$

따라서 $a=1$, $b=2$이므로 $a+b=3$이다.

19. 정답 ③

d가 최소인 경우는 그림과 같으므로 두 원이 만나서 생기는 공통현의 중점을 M이라 하면



$\overline{OM} = \sqrt{5^2-3^2} = 4$,

$\overline{O\,M} = \sqrt{6^2-3^2} = 3\sqrt{3}$

또, $\overline{OM}$ 과 $\overline{O\,M}$ 이 이루는 각의 크기가 30° 이므로 삼각형 OMO 에서 제이코사인법칙에 의하여

$\overline{OO}^{\,2} = \overline{OM}^{\,2} + \overline{O\,M}^{\,2} - 2\cdot\overline{OM}\cdot\overline{O\,M}\cos 30^\circ$

$= 4^2 + (3\sqrt{3})^2 - 2\cdot 4\cdot 3\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$= 16+27-36=7$

$\therefore \overline{OO} = \sqrt{7}$ $\quad(\because \overline{OO} > 0)$

20. 정답 ①

원판의 평면 β 위로의 정사영과 평면 γ에 생긴 그림자의 평면 β 위로의 정사영이 서로 일치한다.

따라서 평면 γ에 생긴 그림자의 넓이를 S라 하면

$3^2\pi\times\cos 30^\circ = S\times\cos 60^\circ \quad \therefore S = 9\pi\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 2 = 9\sqrt{3}\pi$

21. 정답 ①

원판의 평면 β 위로의 정사영과 평면 γ에 생긴 그림자의 평면 β 위로의 정사영이 서로 일치한다.

따라서 평면 γ에 생긴 그림자의 넓이를 S라 하면

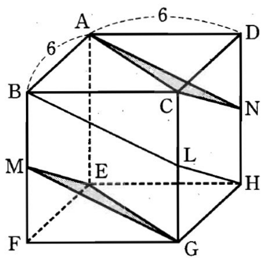
$3^2\pi\times\cos 30^\circ = S\times\cos 60^\circ \quad \therefore S = 9\pi\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 2 = 9\sqrt{3}\pi$

22. 정답 ①

그림과 같이 변 CG의 중점을 L이라 하면 $\overline{AC}$ $\overline{EG}$,

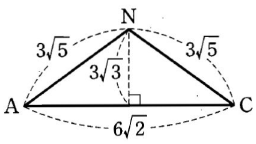
$\overline{AN}$ $\overline{BL}$ $\overline{MG}$,

$\overline{CN}$ $\overline{LH}$ $\overline{ME}$



에서 두 평면 ACN과 MGE는 서로 평행하다.

한편, $\overline{AN} = \overline{CN} = 3\sqrt{5}$ 이고, $\overline{AC} = 6\sqrt{2}$ 이므로



$ACN = \dfrac{1}{2}\cdot 6\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{3}$

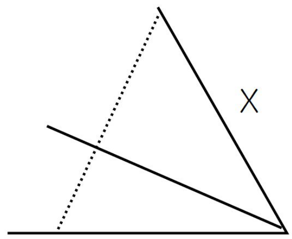
$= 9\sqrt{6}$

따라서 구하는 정사영의 넓이는

$9\sqrt{6}\cos 0^\circ = 9\sqrt{6}$

23. 정답 30

원래 판의 넓이를 X라고 한다면, 그림자의 면적이 최대일 때는 태양광선과 수직일 때, 즉 지표면과의 각도가 30° 일 때 최대 넓이가 된다.



(점선이 태양광선이고 X와 S 사이에 직선이 최대 넓이가 되는 곳)

$\therefore X\cdot\cos\theta = S\cdot\cos 30^\circ$, $\quad S = \dfrac{2}{\sqrt{3}}X\cdot\cos\theta$

이때, $X = 4^2-\pi = 16-\pi$, $\quad X = \dfrac{2\sqrt{3}(16-\pi)}{3}\cos\theta$

이 식의 최댓값은 $\cos\theta = 1$일 때이므로 $S = \dfrac{\sqrt{3}(32-2\pi)}{3}$

24. 정답 25

평면 AP_1Q_1D 위에 있는 반지름의 길이가 2인 원의 내부를 평면 $EFGH$에 정사영시킨 것이 구하는 그림자 EP_2Q_2H를 평면 $EFGH$에 정사영시킨 것과 같음을 이용한다.

평면AP_1Q_1D와 평면 $EFGH$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\cos\theta = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AP_1}} = \dfrac{4}{\sqrt{1^2+4^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{17}}$

따라서 평면 AP_1Q_1D 위에 있는 반지름의 길이가 2인 원의 내부를 광선과 수직 방향인 밑면 $EFGH$로 정사영시켰을 때의 넓이를 S라 하면 $S = 4\pi\times\dfrac{4}{\sqrt{17}} = \dfrac{16}{\sqrt{17}}\pi$

평면 EP_2Q_2H와 평면 $EFGH$가 이루는 각의 크기를 θ_1이라 하면

$\cos\theta_1 = \dfrac{\overline{EF}}{\overline{EP_2}} = \dfrac{4}{\sqrt{2^2+4^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

따라서 구하는 그림자의 넓이를 S_1이라하면

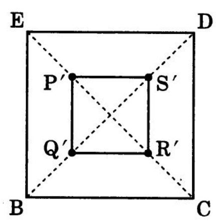
$S = S_1\cos\theta_1$이므로

$S_1 = \dfrac{S}{\cos\theta_1} = \dfrac{16}{\sqrt{17}}\pi\times\dfrac{\sqrt{5}}{2} = \dfrac{8\sqrt{85}}{17}\pi \qquad \therefore a=17,\ b=8$

$\therefore a+b=25$

25. 정답 16

네 점 P, Q, R, S에서 평면 $BCDE$에 내린 수선의 발을 각각 P, Q, R, S 라 하면 아래 그림과 같다.



즉, 사각형 $PQRS$를 평면 $BCDE$ 위로 정사영 시킨 도형은 한 변의 길이가 4인 정사각형이다.

따라서 구하는 정사각형 $P\ Q\ R\ S$ 의 넓이는 $4\times 4=16$

26. 정답 19

점 A에서 l에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{AH} \perp l$이므로

$\therefore \tan(\angle AHA) = \frac{1}{3}$

$\tan(ABA) = \frac{1}{5}$일 때,

$AA = h$로 놓으면

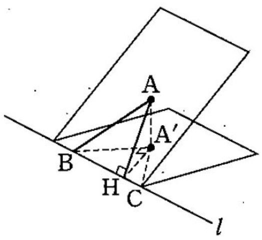
$\overline{HA} = \frac{h}{\tan(\angle AHA)} = 3h$,

$\overline{BA} = \frac{h}{\tan(\angle ABA)} = 5h$

$\angle BHA = 90^\circ$이므로 $\overline{BH} = \sqrt{25h^2 - 9h^2} = 4h$

BHA 와 BAC는 닮음이므로

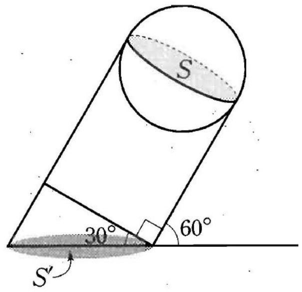
$\therefore \overline{AC} = \frac{15}{4}h \quad \therefore \tan(\angle ACA) = \frac{h}{\frac{15}{4}h} = \frac{4}{15}$



$\therefore p + q = 19$

27. 정답 108

애드벌룬의 가장 큰 단면의 넓이 $S = 9\pi(m^2)$이다.
태양과 지면과 60° 의 각도로 비출 때, 지면에 생기는 애드벌룬의 그림자의 넓이를 S 이라 하면 S와 S 이 이루는 각의 크기는 30° 이다.
즉, $S = S \cos 30°$이므로



$S = \frac{S}{\cos 30°} = \frac{9\pi}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$= 6\sqrt{3}\pi(m^2)$

$\therefore \frac{k^2}{\pi^2} = \frac{108\pi^2}{\pi^2} = 108$

28. 정답 864

세 평면 $ABCD$, $ABFE$, $AEHD$가 평면 π와 이루는 각을 각각 α, β, γ라고 하면 $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$인 관계가 성립한다.

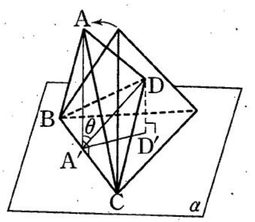
$60\cos\alpha = 30$, $\quad 48\cos\beta = S$, $\quad 80\cos\gamma = 20\sqrt{6}$

$\cos\alpha = \frac{1}{2}$, $\quad \cos\gamma = \frac{\sqrt{6}}{4}$이므로 $\cos\beta = \frac{\sqrt{6}}{4}$

$\therefore S = 48 \times \frac{\sqrt{6}}{4} = 12\sqrt{6} \qquad \therefore S^2 = 864$

29. 정답 803

그림과 같이 꼭짓점 A, D를 평면 α 위로의 정사영한 점을 각각 A, D이라 하자.
ABC와 BCD의 이면각의 크기 $\angle AAD$를 θ라 하면 구하는 정사영의 넓이 S는



$S = BCD \cdot \cos(\angle DAD)$

$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 40^2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

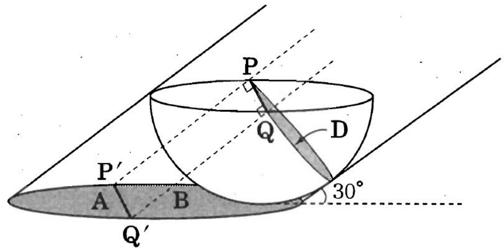
$= 400\sqrt{3}\sin\theta$

이때 AAD에서 제이코사인법칙에 의해

$\cos\theta = \frac{(20\sqrt{3})^2 + (20\sqrt{3})^2 - 40^2}{2 \cdot 20\sqrt{3} \cdot 20\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$, $\quad \sin\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$S = 400\sqrt{3} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{800\sqrt{6}}{3} \qquad \therefore a + b = 803$

30. 정답 24



그림에서 빛에 수직인 지름 PQ의 그림자를 $\overline{PQ}$이라 하면
$\overline{PQ} = \overline{PQ}$
$\overline{PQ}$에 의해 그림자를 두 부분, A, B로 나누면 A부분은 반원의 넓이와 같으므로

$\frac{1}{2} \times 4^2\pi = 8\pi \qquad \cdots\cdots$ ㉠

지름 PQ를 지나고 평면 $PQQP$에 수직인 평면으로 반구를 자를 때 생기는 단면을 D라 하면 그림자 B의 정사영이 D이다.
B의 넓이를 B라 놓으면 $B\cos 60^\circ = 8\pi$이므로

$B = 16\pi \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 구하는 그림자의 넓이는

$8\pi + 16\pi = 24\pi \qquad \therefore n = 24$

31. 정답 12

점 $\mathrm{A}(10,\ 5)$를 지나고 x축에 평행한 직선 : $y = 5$
포물선 $y^2 = 8x$의 초점의 좌표는 $(2,\ 0)$이고 준선은 $x = -2$
$\overline{\mathrm{AP}}$의 길이는 포물선의 성질에 의해 P에서 $x = -2$ 사이까지의 거리와 같으므로, $\overline{\mathrm{AP}} + \overline{\mathrm{PF}}$의 값은 $x = -2$에서 $\mathrm{A}(10,\ 5)$까지의 거리와 같다.

32. 정답 ⑤

두 구의 중심사이의 거리가 3인데 각각의 반지름은 1과 2이므로 서로 외접한다.
여기에 반지름이 2인 구의 중심을 $P(x,\ y,\ z)$라 놓자.
이 구가 두 원에 외접하려면 $P(x,\ y,\ z)$는 각 원들의 중심에서 일정한 거리에 있어야 한다.
P에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 P의 자취는 $\overline{PH}$를 반지름으로 하는 원의 둘레가 된다.

$ABP = \frac{1}{2} \times 4 \times \sqrt{5} = \frac{1}{2} \times 3 \times \overline{HP}$, $\qquad \overline{HP} = \frac{4\sqrt{5}}{3}$

즉, 둘레의 길이는 $2\pi \times \frac{4\sqrt{5}}{3} = \frac{8\sqrt{5}}{3}\pi$

33. 정답 120

내접구의 반지름의 길이를 r라 하면 xy평면, yz평면, zx평면에 모두 접하므로 구의 중심은 $(r,\ r,\ r)$이다.

또, 평면 α에도 접해야 한다.
중심 $(r,\ r,\ r)$와 평면 $3x+2y+6z=18$ 사이의 거리도 역시 r이므로 $\dfrac{|3r+2r+6r-18|}{\sqrt{3^2+2^2+6^2}}=r$, $|11r-18|=7r$

$11r-18=\pm 7r \quad \therefore\ r=1$ 또는 $\dfrac{9}{2}$

반지름의 길이는 사면체의 한 변의 길이 중 가장 짧은 것보다 작아야 하므로 $r=1$이다.

$\therefore\ V=\dfrac{4}{3}\times\pi\times 1^3 \quad \therefore\ 90\times\dfrac{V}{\pi}=120$

34. 정답 50

두 구의 방정식을 각각 일반형으로 나타내면

$x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+13=0$

$x^2+y^2+z^2-6x-8y-10z+33=0$

이고, 두 구가 만나서 생기는 원을 포함하는 평면 α는 두 방정식을 빼면 구할 수 있다.

$(x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+13)$
$-(x^2+y^2+z^2-6x-8y-10z+33)=0$

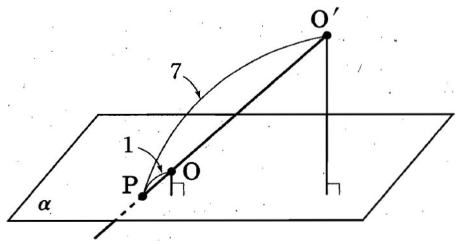
위의 식을 정리하면 구하는 평면의 방정식은

$4x+4y+4z-20=0 \quad \therefore\ x+y+z-5=0$

이때, 두 구의 중심의 좌표는 $O(1,\ 2,\ 3)$, $O\ (3,\ 4,\ 5)$이므로 두 구의 중심에서 평면까지의 거리를 각각 d_1, d_2라 하면

$d_1=\dfrac{|1\cdot1+1\cdot2+1\cdot3-5|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$d_2=\dfrac{|1\cdot3+1\cdot4+1\cdot5-5|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\dfrac{7}{\sqrt{3}}$



이때 아래 그림과 같이 직선 OO 이 평면 α와 만나는 점을 P라 하면 선분 OO 의 외분점은 P가 되고

$\overline{OP}\ :\overline{O\ P}\ =d_1:d_2=1:7$이 된다.

따라서 $m=1$, $n=7$이므로 $m^2+n^2=1^2+7^2=50$

35. 정답 ⑤

$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{FH}$이므로

$(1-a,\ 2b,\ 3-c)+(3-a,\ 2-b,\ 4-c)$
$=(4-2a,\ 4-2b,\ 7-2c)=(0,\ -2,\ -1)$

$\therefore\ a=2,\ b=3,\ c=4 \quad \therefore\ a^2+b^2+c^2=29$

36. 정답 ①

정사각형 $ABCD$의 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$이므로 사분원의 반지름의 길이는 $\sqrt{2}$이다.

점 P에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 E라 하면 $\overline{AE}\ =\overline{PE}\ =c=1$

점 E에서 x축에 내린 수선의 발을 F라 하면

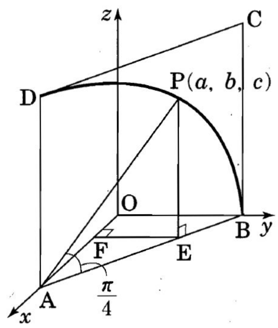
$a=1-\overline{AF}\ =1-\overline{AE}\cos\dfrac{\pi}{4}$

$=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$

$b=\overline{EF}\ =\overline{AF}\ =\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$P\left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{2},\ 1\right)$이므로

$a+b+c=2$



37. 정답 ④

$x^2+y^2+z^2=81$, $x^2+(y-5)^2+z^2=56$에서

첫 번째 식에서 두 번째 식을 빼서 계산하여 정리하면 $y=5$

따라서 두 구가 만나는 원은 평면 $y=5$ 위에 있다.

첫 번째 식에 다시 대입해서 $x^2+z^2=56$

따라서 두 구가 만나서 생기는 원의 방정식은

$x^2+z^2=56$, $y=5$

이 원 위의 점 $P(x,\ 0,\ z)$의 xy 평면 위로의 정사영은 $P\ (x,\ 5,\ 0)$이고, 두 점 Q, R의 좌표는 각각 $(0,\ 9,\ 0)$, $(0,\ -9,\ 0)$이므로 삼각형 $QP\ R$의 넓이 S는

$S=\dfrac{1}{2}\cdot\overline{QR}\cdot\quad x\quad =9\quad x$

이때, 사면체 $PQP\ R$의 높이는 $\quad z\quad$ 이므로

이 사면체의 부피 V는

$V=\dfrac{1}{3}\cdot S\cdot\quad z\quad =3\quad xz$

그런데 산술평균$\geq$기하평균 이므로

$x^2+z^2=56\geq 2\sqrt{x^2z^2}=2\quad xz\quad,\qquad xz\quad\leq 28$

$\therefore\ V=3\quad xz\quad\leq 3\cdot 28=84$

따라서 구하는 사면체의 부피의 최댓값은 84

38. 정답 ③

두 개의 구

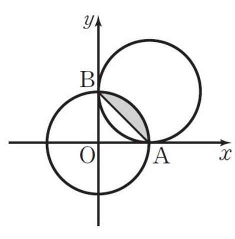
$O_1: x^2+y^2+(z-2)^2=4$,

$O_2: (x-2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=4$가 만나서 생기는 도형은 원이고 이 원을 포함하는 방정식은

$\{x^2+y^2+(z-2)^2-4\}$
$+k\{(x-2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2-4\}=0$을

만족하고 $k=-1$일 때, 공통 원을 포함하는 평면의 방정식이므로 $\alpha: 4x+4y-2z-5=0$이다. 또, 두 구 O_1, O_2를 각각 xy평면에 정사영시킨 도형의 내부영역이 C_1, C_2이므로 $C_1: x^2+y^2\leq 4$,

$C_2: (x-2)^2+(y-2)^2\leq 4$



xy평면에서 C_1, C_2의 공통부분의 넓이는 오른쪽 그림에서

(부채꼴 OAB의 넓이)
$-$ (삼각형 OAB의 넓이)

$=\dfrac{1}{4}\cdot 4\pi-\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=\pi-2$

따라서 공통부분의 넓이는

$2(\pi-2)$이다. 이때, 평면 α와 xy평면이 이루는 각을 $\theta\left(0\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{2}\right)$라 하면 평면 α의 법선 벡터는 $(2,\ 2,\ -1)$이고, xy의 법선 벡터는 $(0,\ 0,\ 1)$ 이므로

$\cos\theta = \dfrac{|(2,\ 2,\ -1)\cdot(0,\ 0,\ 1)|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}\sqrt{0^2+0^2+1^2}} = \dfrac{1}{3}$

따라서 xy평면에서 C_1, C_2의 공통부분을 평면 α로 정사영 시켰을 때 생기는 도형의 넓이는 $2(\pi-2)\cdot\cos\theta = \dfrac{2(\pi-2)}{3}$

39. 정답 9

구의 방정식을 정리하면

$(x-1)^2+(y-3)^2+(z-a)^2 = a^2-b+10$

이때 점 $A(3,\ 4,\ 1)$을 지나므로

$4+1+1-2a+a^2 = a^2-b+10 \quad \therefore\ 2a-b+4=0 \ \cdots\cdots$ ㉠

구가 xy 평면과 접하므로 구의 중심 $(1,\ 3,\ a)$에서 xy 평면에 내린 수선의 발 $(1,\ 3,\ 0)$은 구 위의 점이므로

$a^2 = a^2-b+10 \quad \therefore\ b=10$ ㉠에서 $a=3$

따라서 구의 방정식은 $(x-1)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=9$

그런데 평면 $y=z$가 이 구의 중심을 지나므로 구하는 도형은 반지름의 길이가 3인 원이다.

따라서 원의 넓이는 9π이므로 $n=9$이다.

40. 정답 19

중심이 $(0,\ 0,\ 3)$이고 반지름의 길이가 $\dfrac{3}{2}$인 구의 내부를 나타내는 부등식은 $x^2+y^2+(z-3)^2 < \dfrac{9}{4}$

이때 z는 $\dfrac{3}{2} < z < \dfrac{9}{2}$인 정수이므로

(ⅰ) $z=2$일 때 $x^2+y^2 < \dfrac{5}{4}$

$(x,\ y) = (0,\ 0),\ (0,\ 1),\ (0,\ -1),\ (1,\ 0),\ (-1,\ 0)$

따라서 5(개)이다.

(ⅱ) $z=3$일 때 $x^2+y^2 < \dfrac{9}{4}$ 이므로

$(x,\ y) = (0,\ 0),\ (0,\ 1),\ (0,\ -1),\ (1,\ 0),\ (-1,\ 0)$
$(1,\ 1),\ (1,\ -1),\ (-1,\ 1),\ (-1,\ -1)$

따라서 9(개)이다.

(ⅲ) $z=4$일 때 $x^2+y^2 < \dfrac{5}{4}$ 이므로

$(x,\ y) = (0,\ 0),\ (0,\ 1),\ (0,\ -1),\ (1,\ 0),\ (-1,\ 0)$

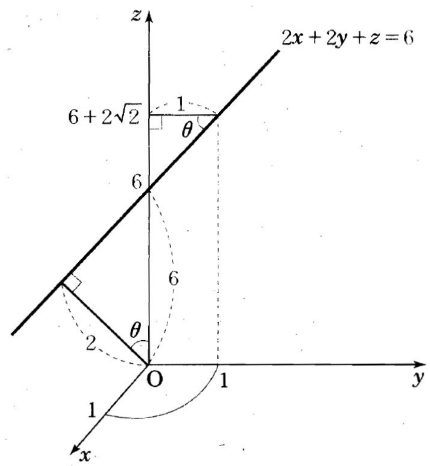
따라서 5(개)이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 x 좌표, y 좌표, z 좌표가 모두 정수인 점의 개수는 19이다.

41. 정답 40

원점에서 평면 $2x+2y+z-6=0$까지의 거리는

$d = \dfrac{|-6|}{\sqrt{4+4+1}} = 2$이다.



$\cos\theta = \dfrac{1}{3}$, $\sin\theta = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

점 P의 z 좌표의 최댓값은 $6+3\sin\theta = 6+2\sqrt{2}$

$\therefore\ a^2+b^2 = 36+4 = 40$

42. 정답 ⑤

$\overline{MQ}$가 최대가 되려면 점 B를 지나야 하므로

(최댓값) $= 2\overline{MB} = 2\sqrt{3^2+(2\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{17}$

43. 정답 ③

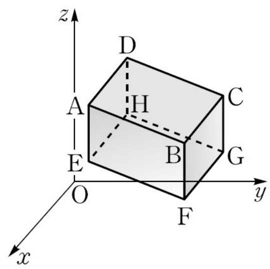
ㄱ. 두 점 $C(1,\ 5,\ 5)$, $H(1,\ 2,\ 3)$의 x좌표가 서로 같으므로 선분 CH는 x축에 수직이다. (참)

ㄴ. 점 $B(a,\ b,\ c)$라 하면 두 대각선 BH와 CE의 중점의 좌표는 서로 같으므로

$\dfrac{a+1}{2}=2,\ \dfrac{b+2}{2}=\dfrac{7}{2},\ \dfrac{c+3}{2}=4$

$\therefore\ a=3,\ b=5,\ c=5 \quad \therefore\ B(3,\ 5,\ 5)$ (참)

ㄷ. 네 꼭짓점 B, C, E, H의 좌표가 고정이 되었더라도 나머지 꼭짓점의 좌표는 유일하게 결정할 수 없다. 따라서 그림과 같이 모서리 AB는 y축과 평행하지 않을 수도 있다. (거짓)



이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

44. 정답 ②

구 C_1의 중심의 좌표는 $A(a,\ 4,\ 3)$, 반지름의 길이는 2이고,
구 C_2의 중심의 좌표는 $B(b,\ 4,\ 3)$, 반지름의 길이는 6이다.
이때, 두 구 C_1, C_2가 내접하므로 중심 거리는

$\overline{AB} = |a-b| = 6-2 = 4$

한편, 두 구의 중심을 지나는 직선의 방정식은 $y=4,\ z=3$이므로 원점에서 이 직선에 내린 수선의 발의 좌표는 $H(0,\ 4,\ 3)$이다.
따라서 두 구의 중심과 원점을 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{OH} = \dfrac{1}{2}\times4\times\sqrt{0^2+4^2+3^2} = 10$

45. 정답 96

구의 중심을 점 B라 하면

$\overline{OB}^2=\overline{BP}^2-\overline{OP}^2$

$\quad =3^2-1^2=8$

B의 z좌표가 음수이므로

$B(0,\ 0,\ -2\sqrt{2})$

A, P, Q가 일직선 위에 있으므로

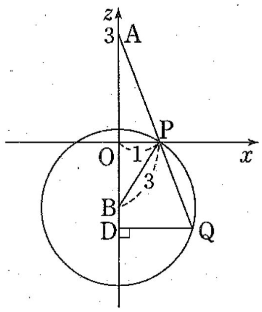
$\overline{AQ}=t\,\overline{AP}$

$\overline{AP}\cdot\overline{AQ}=(\overline{AB}-3)(\overline{AB}+3)$

이므로 $t\,\overline{AP}^2=\overline{AB}^2-9$

$\overline{AP}=\sqrt{10}$, $\overline{AB}=3+2\sqrt{2}$ 이므로

$10t=8+12\sqrt{2}\qquad \therefore\ t=\dfrac{4+6\sqrt{2}}{5}$



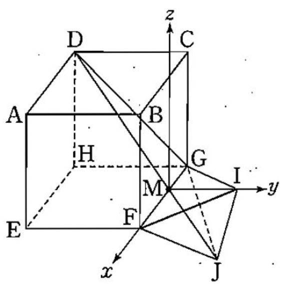
Q가 그리는 도형의 중심을 D라고 하면 $\overline{DQ}=t\,\overline{OP}$ 이므로

$\overline{DQ}=t=\dfrac{4+6\sqrt{2}}{5}$

따라서 $\alpha=\dfrac{4}{5}$, $\beta=\dfrac{6}{5}$ 이므로 $100\alpha\beta=96$ 이다.

46. 정답 ⑤

그림과 같이 $\overline{FG}$ 의 중점 M을 원점으로 하고 $\overrightarrow{MF}$ 방향을 x축, M에서 오른쪽 방향을 y축, 위로의 수직방향을 z축으로 하는



좌표공간에서 J의 좌표는 $\left(0,\ \dfrac{\sqrt{3}}{3},\ -\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right)$

D의 좌표는 $(-1,\ -2,\ 2)$ 이므로

$\overline{DJ}=\sqrt{1^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}+2\right)^2+\left(-\dfrac{2\sqrt{6}}{3}-2\right)^2}$

$\quad=\sqrt{12+\dfrac{4}{3}(\sqrt{3}+2\sqrt{6})}$

47. 정답 ⑤

$\overline{AB}$ 의 중점을 M,

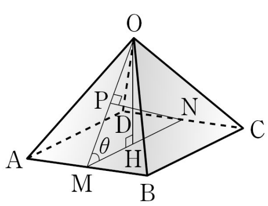
$\overline{CD}$ 의 중점을 N 이라

하자. $\overline{AB}$ // $\overline{CD}$ 이고,

$\overline{AB}$ 는 xy 평면 위에

있으므로 점 C 의 z 좌표는

점 N 의 z 좌표와 같다.



또한 원점 O 에서 밑면 $ABCD$ 에 내린 수선의 발을 H, 점 N 에서 $\overline{OM}$ 에 내린 수선의 발을 P 라 하면 $\overline{NP}$ 는 면 OAB 에 수직이므로 xy 평면에 수직이다.

직각삼각형 OMH 에서 $\angle OMH=\theta$ 라 하면

$\overline{OM}=\sqrt{3}$, $\overline{OH}=\sqrt{(\sqrt{3})^2-1}=\sqrt{2}$ 이므로

$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

직각삼각형 MNP 에서 $\overline{MN}=2$ 이므로

$\overline{NP}=2\sin\theta=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

따라서 점 N 의 z 좌표는 $-\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ 이므로,

점 C 의 z 좌표도 $-\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ 이다.