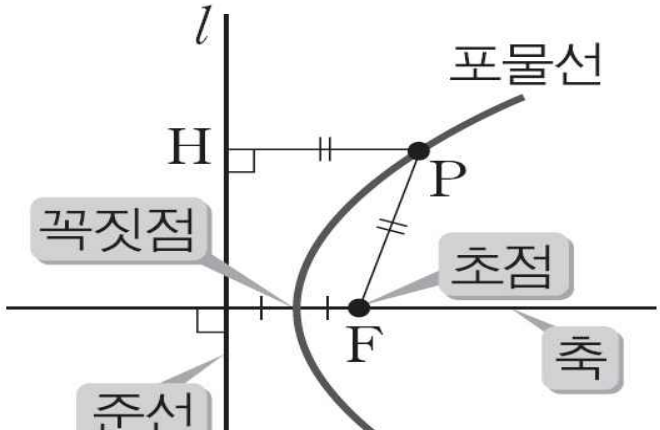
⌬ 2차 곡선 ⌬

포물선

(1) 포물선의 정의

⇒ 평면 위의 한 정점 F(초점)과 이 점을 지나지 않는한 정직선 l(준선)에 이르는 거리의 길이가 같은 점들의 집합



⇒ 정직선 l을 준선, 정점 F를 초점이라고 해
포물선의 초점을 지나고 준선에 수직인 직선을 포물선의 축이라 하고,
포물선과 그 축과의 교점을 포물선의 꼭지점이라고 해

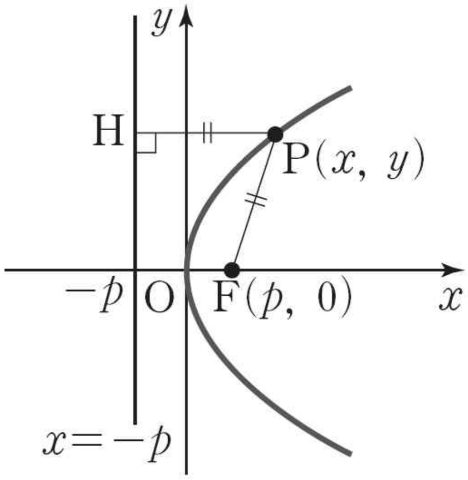
근데 그림 보고 뭔지만 알면 됨ㅎ

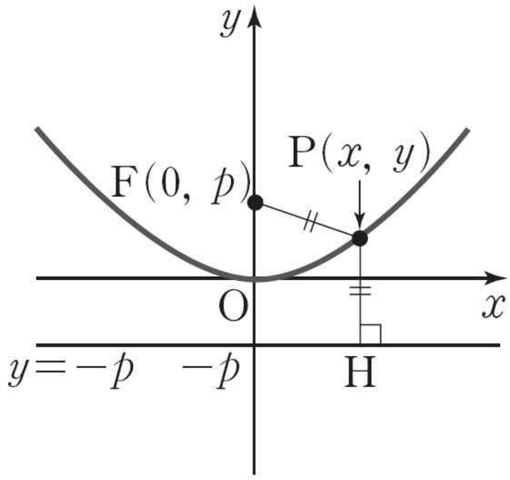
(2) 포물선의 방정식

① 기본형

⇒ 우선 기본형이 크게 2가지 형태가 있어

$y^2 = 4px$ 형태와 $x^2 = 4py$ 형태, 중학교때 배웠던 포물선은
$x^2 = 4py$ 형태인거지ㅎ





≪ $y^2 = 4px$ ≫　　　　　≪ $x^2 = 4py$ ≫

⇒ 포물선의 정의를 보면 결국 두 점사이의 거리(초점과의거리)와
한점과 정직선(준선) 사이의 거리가 같다인데 두 점 사이의 거리는
그냥 공식 쓰면 되지만 한점과 정직선과의 거리는 그 점의 좌표랑
관련이 있어
왼쪽 그림을 보면 한 점 $P(x, y)$와 준선 $x = -p$까지의 거리가
그 점의 x좌표 x와 p의 합 $x+p$라는것을 알 수 있지
마찬가지로 오른쪽 그림에서는 $P(x, y)$의 y좌표 y와 p이 합
$y+p$ 인것도 알 수 있어ㅎ

② 포물선의 식에서 초점과 준선구하기

⇒ 포물선의 초점과 준선은 꼭지점과 p로 구하는거야
미리 말하자면 "초점은 꼭지점에서 p를 더하는것"이고
"준선은 꼭지점에서 p를 뺀다"야
우선 꼭지점을 먼저 구해보면 $(\alpha,\ \beta)$라는 것을 쉽게 알 수 있지 그 다음 p를 구해야 하는데 포물선의 방정식에서 1차식의 계수를 4로 나눈게 p야

$$\begin{cases} \text{초점} : (\text{꼭지점} + p,\ \text{꼭지점}) \\ \text{준선} : x = \text{꼭지점} - p \end{cases}$$

$ex)$ $(y-2)^2 = 8(x+2)$ 에서 초점과 준선을 구하라

⇒ 꼭지점은 $(-2,\ 2)$ 이고 $p = \dfrac{8}{4} = 2$
초점 $F(-2+2,\ 2) = (0,\ 2)$, 준선 $l = -2-2 = -4$

$ex)$ $(x-3)^2 = -4(y-1)$ 에서 초점과 준선을 구하라

⇒ 꼭지점은 $(3,\ 1)$ 이고 $p = \dfrac{-4}{4} = -1$
초점은 $(3,\ 1+(-1)) = (3,\ 0)$, 준선 l은 $y = 1-(-1) = 2$

$cf)$ 포물선의 식이 주어지고 초점과 준선을 구하는 문제나
초점과 준선이 주어지고 포물선의식을 구하는 문제나
어쨌든 " 꼭지점과 p를 구하는 문제 "야

주어진 조건이 포물선의 식이냐 초점과 준선이냐에 따라
꼭지점과 p를 구하는 방법을 익힌다고 생각하면 돼

③ 초점과 준선이 주어질때 포물선의 식 구하기

$\Rightarrow \begin{cases} \text{초점과 준선의 중점 : 꼭지점} \\ \text{초점} - \text{준선} = 2p \end{cases}$ 인데 암기하기 쉽게 하려면

$$\text{꼭지점} = \frac{\text{초점} + \text{준선}}{2}, \qquad p = \frac{\text{초점} - \text{준선}}{2}$$ 가 돼

만일 꼭지점이 $(\alpha, \ \beta)$일 때, 준선이 $x = ...$형태이면
$(y-\beta)^2 = 4p(x-\alpha)$가 되고 준선이 $y = ...$형태이면
$(x-\alpha)^2 = 4p(y-\beta)$ 가 돼

즉, 준선에서 보이는 문자가 1차식이라고 생각하면 돼

$ex1$) 초점이 $(2, \ 3)$이고 준선이 $x = -4$ 일 때 포물선의 방정식

$$\frac{\text{초점} + \text{준선}}{2} = \frac{2-4}{2} = -1, \quad \text{꼭지점}(-1, 3)$$
$$\frac{\text{초점} - \text{준선}}{2} = \frac{2-(-4)}{2} = 3 = p$$

$\therefore (y-3)^2 = 4 \times 3(x+1)$

$ex2$) 초점$(3, \ -1)$이고 준선이 $y = 3$일 때, 포물선의 방정식

$$\frac{\text{초점} + \text{준선}}{2} = \frac{-1+3}{2} = 1, \quad \text{꼭지점}(3, \ 1)$$
$$\frac{\text{초점} - \text{준선}}{2} = \frac{-1-3}{2} = -2 = p$$

$\therefore (x-3)^2 = 4 \times (-2)(y-1) = -8(y-1)$

(3) 접선의 방정식

① 접점 (x_1, y_1)이 주어질 때,

$\Rightarrow$ 2차 곡선은 접점이 주어질때 접선의 방정식이 공통적으로 적용되는 공식이 있어

$$x^2 \Rightarrow x_1 x, \quad x \Rightarrow \frac{x+x_1}{2}, \quad y^2 \Rightarrow y_1 y, \quad y \Rightarrow \frac{y+y_1}{2}$$

$$(x-\alpha)^2 \Rightarrow (x_1-\alpha)(x-\alpha), \quad (x-\alpha) \Rightarrow \frac{(x-\alpha)+(x_1-\alpha)}{2}$$

$$(y-\beta)^2 \Rightarrow (y_1-\beta)(y-\beta), \quad (y-\beta) \Rightarrow \frac{(y-\beta)+(y_1-\beta)}{2}$$

이걸 포물선의 방정식에 그대로 적용하면

$y^2 = 4px$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은

$$\Rightarrow y_1 y = 4p \times \frac{x+x_1}{2} = 2p(x+x_1)$$

$x^2 = 4py$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은

$$\Rightarrow x_1 x = 4p \times \frac{y+y_1}{2} = 2p(y+y_1)$$

$(y-\beta)^2 = 4p(x-\alpha)$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은

$$\Rightarrow (y_1-\beta)(y-\beta) = 4p \times \frac{(x-\alpha)+(x_1-\alpha)}{2} = 2p(x+x_1-2\alpha)$$

$cf)$ 접점은 접선과 포물선의 교점이므로
접선 위에도 있고 포물선 위에도 있어
즉, 접점을 두 식에 대입하면 다 만족한다는거지

$ex)\ y^2 = 6x$ 위의점 $(6,\ -6)$에서의 접선의 방정식은?

$$\Rightarrow -6 \times y = 6 \times \frac{x+6}{2} = 3x + 18, \quad \therefore\ y = -\frac{1}{2}x - 3$$

$ex)\ (x-3)^2 = 8(y+2)$ 위의 점 $(-5,\ 6)$에서의 접선의 방정식은?

$$\Rightarrow (-5-3)(x-3) = 8 \times \frac{(y+2)+(6+2)}{2} = 4(y+10)$$

$$\therefore\ y = -2x - 4$$

② 기울기 m이 주어질 때,

$$y^2 = 4px \Rightarrow y = mx + \frac{p}{m}$$

$$(y-\beta)^2 = 4p(x-\alpha) \Rightarrow y-\beta = m(x-\alpha) + \frac{p}{m}$$

$$x^2 = 4py \Rightarrow y = mx - m^2 p$$

$$(x-\alpha)^2 = 4p(y-\beta) \Rightarrow (y-\beta) = m(x-\alpha) - m^2 p$$

$ex)\ y^2 = 8x$ 와 접하고 기울기가 2인 접선의 방정식

$$\Rightarrow y = 2x + \frac{2}{2} = 2x + 1,$$

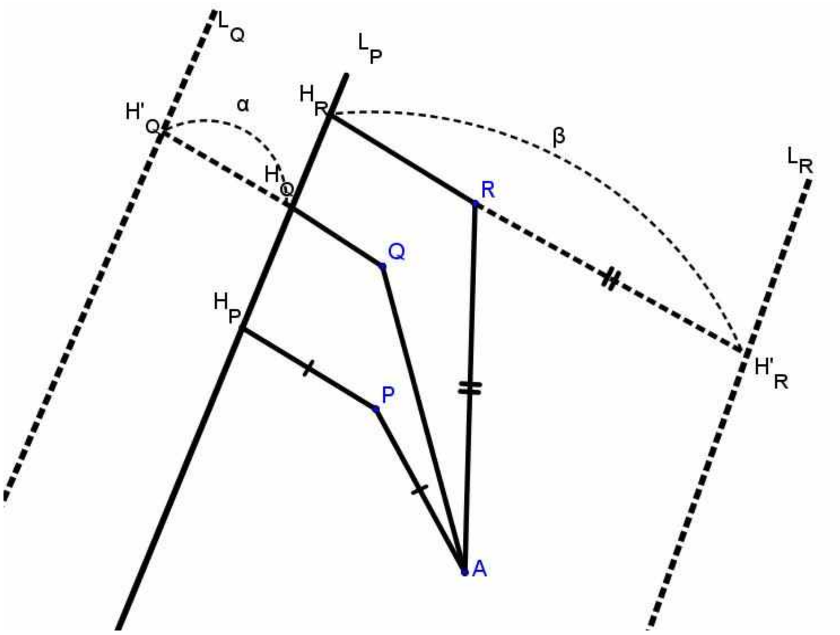
$ex)\ (x-1)^2 = 8(y+2)$ 와 접하고 기울기가 3인 접선의 방정식

$$\Rightarrow (y+2) = 3(x-1) - 3^2 \times 2 = 3x - 21, \quad y = 3x - 23$$

(4) 포물선의 자취

① 정점과 정직선으로부터 거리의 합 차가 일정한 점의 집합

⇒ 일반적인 포물선의 자취는 정점과 정직선으로부터 거리가 같은 점의 집합이자나 근데, 준선을 평행 이동 시킨다 생각하면 거리의 합차가 일정해도 포물선의 자취로 볼수가 있어
($cf.$ 두 정점으로부터 거리의 합차가 일정한 거는 타원과 쌍곡선이지 ㅎ)



$i)$ (차이 $=0$) $\overline{PA} = \overline{PH_P}$: A 초점, L_P 준선

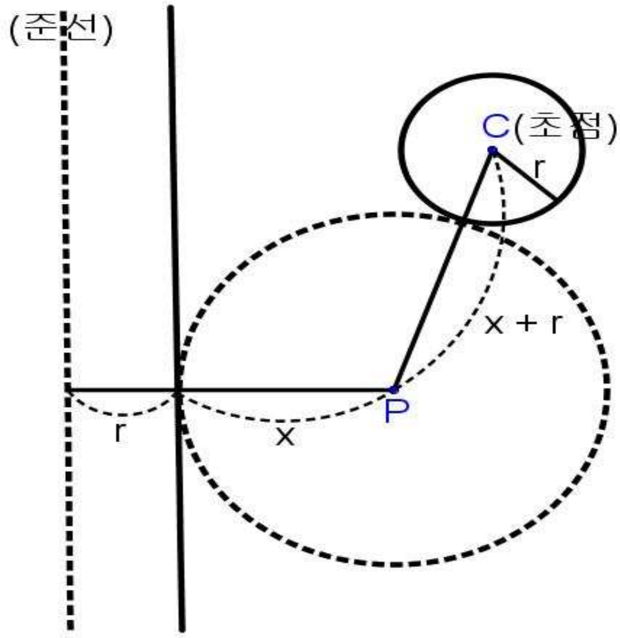
$ii)$ (차이가 일정) $\overline{QA} - \overline{QH_Q} = \alpha$ (일정) $\Rightarrow$ L_P를 α만큼 밀어

$\overline{QA} = \overline{QH_Q} + \alpha = \overline{QH_Q'}$: A 초점, L_Q 준선

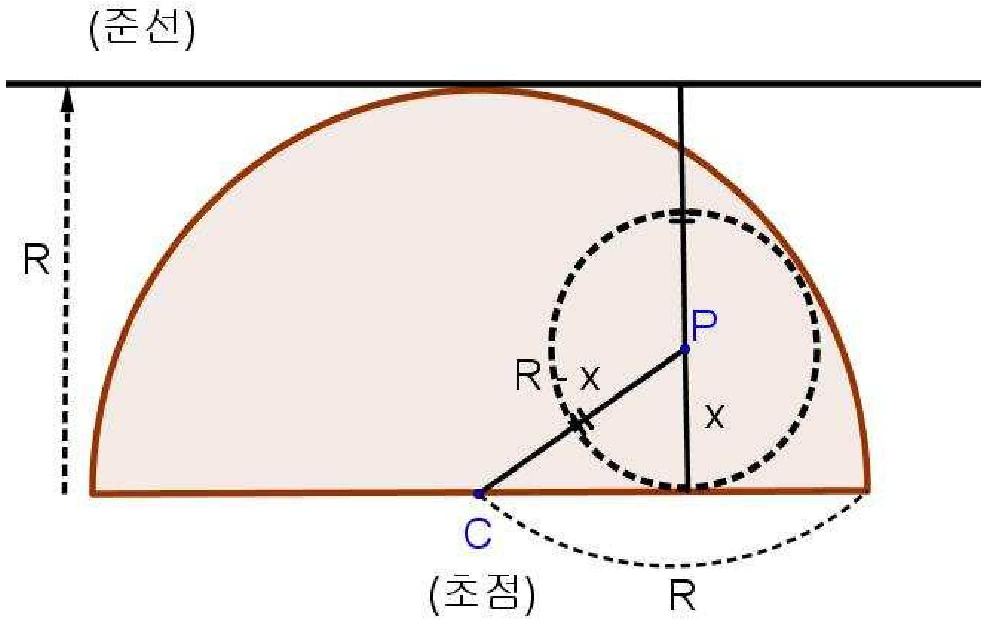
$iii)$ (합이 일정) $\overline{RA} + \overline{RH_R} = \beta$(일정) $\Rightarrow$ L_P를 β만큼 밀어

$\overline{RA} = \beta - \overline{RH_R} = \overline{RH_R'}$: A 초점, L_R 준선

② 원과 직선에 동시에 접하는 원의 중심(P)의 자취

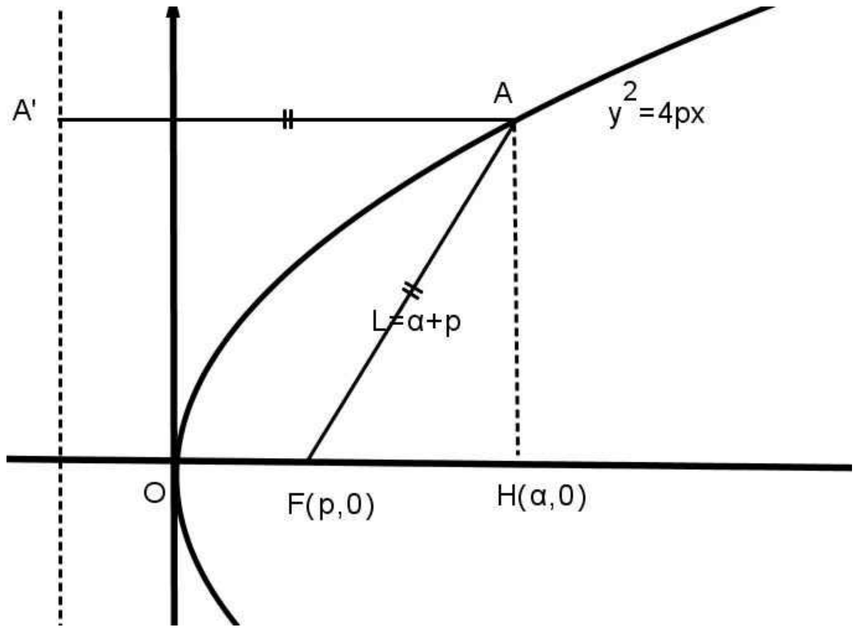


③ 반원에 내접하는 원의 중심(P)의 자취



(5) 포물선의 중요한 성질

① 포물선 위의 점의 x좌표와 초점사이의 거리 관계



$\Rightarrow$가장 기본이면서 기본 유형에서 가장 많이 이용되는 성질이야

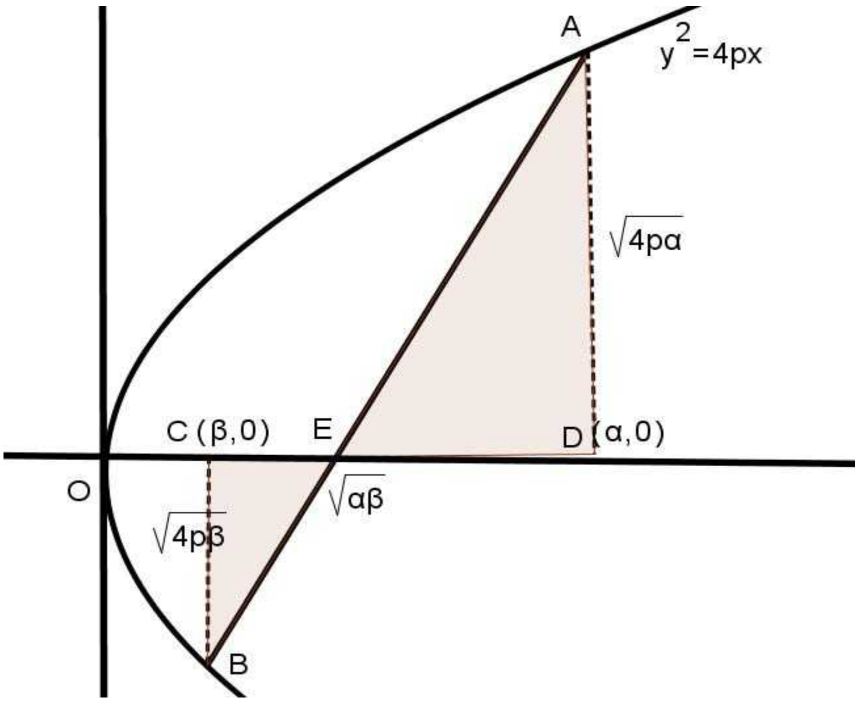
$\overline{A'A} = \overline{AF}$ 인데, $\overline{A'A}$ = 점A의 x좌표 $+\ p\ =\ \alpha\ +\ p$
그래서 $\overline{AF}\ =\ \alpha\ +\ p$지 꼭알아둬!!

$i)\ \overline{AF} = l \ \Rightarrow\ H(l-p,\ 0)$

$ii)\ H(\alpha,\ 0) \Rightarrow l\ = \alpha + p$

$iii)\ \angle AFH = 60^\circ$ 이면 $\triangle AFA'$은 정삼각형

② 포물선과 현의정리 −1



⇒그림에서 $\triangle CBE$ 와 $\triangle ADE$는 닮음이지
근데 $\overline{AD} = \sqrt{4p\alpha}$ 이고, $\overline{BC} = \sqrt{4p\beta}$ 니깐 닮음비 $\sqrt{\alpha} : \sqrt{\beta}$

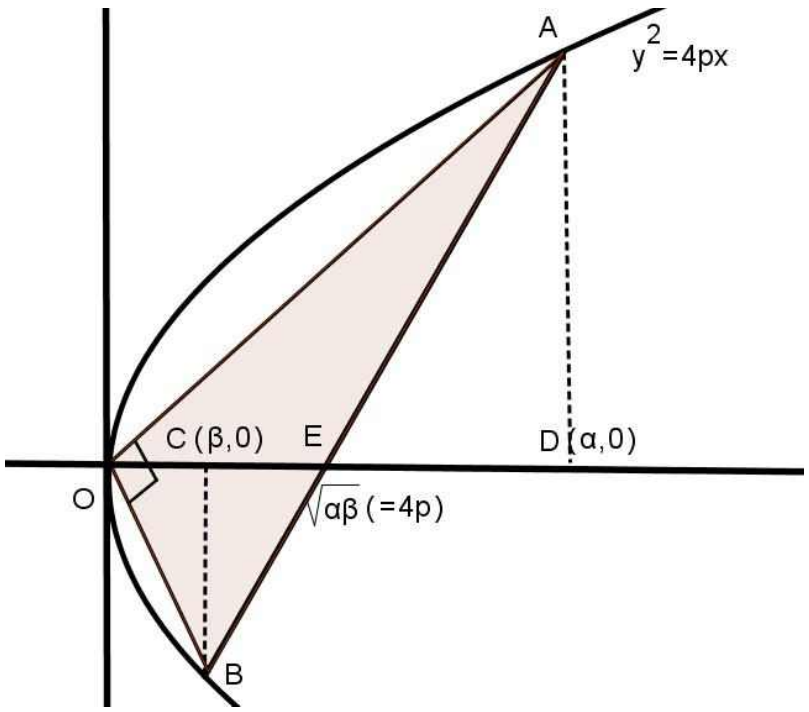
그니깐 현AB의 x절편은 β와 α를 $\sqrt{\beta} : \sqrt{\alpha}$ 로 내분한 점이되네

식으로풀면 $x = \dfrac{\beta\sqrt{\alpha} + \alpha\sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha}} = \dfrac{\sqrt{\alpha\beta}(\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha})}{\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha}} = \sqrt{\alpha\beta}$

즉, 직선이 포물선을 자를 때, 두 교점의 x좌표의 등비 중항이
이 직선의 x절편이 된다!!!
(이 때 x절편은 초점이 되도 되고 않되도 상관 없는거야)

교점, 절편, 교점이 등비수열 이룬다고 생각하면 돼ㅎㅎ

③ 포물선과 현의 정리 -2



$\Rightarrow$ 그림과 같이 포물선의 현과 교점과 원점을 이어서 만든 삼각형이 직각삼각형일 때 ($\angle AOB = 90^\circ$)

$\overline{AO}$의 기울기 : $\dfrac{\sqrt{4p\alpha}}{\alpha}$

$\overline{BO}$의 기울기 : $\dfrac{\sqrt{4p\beta}}{\beta}$

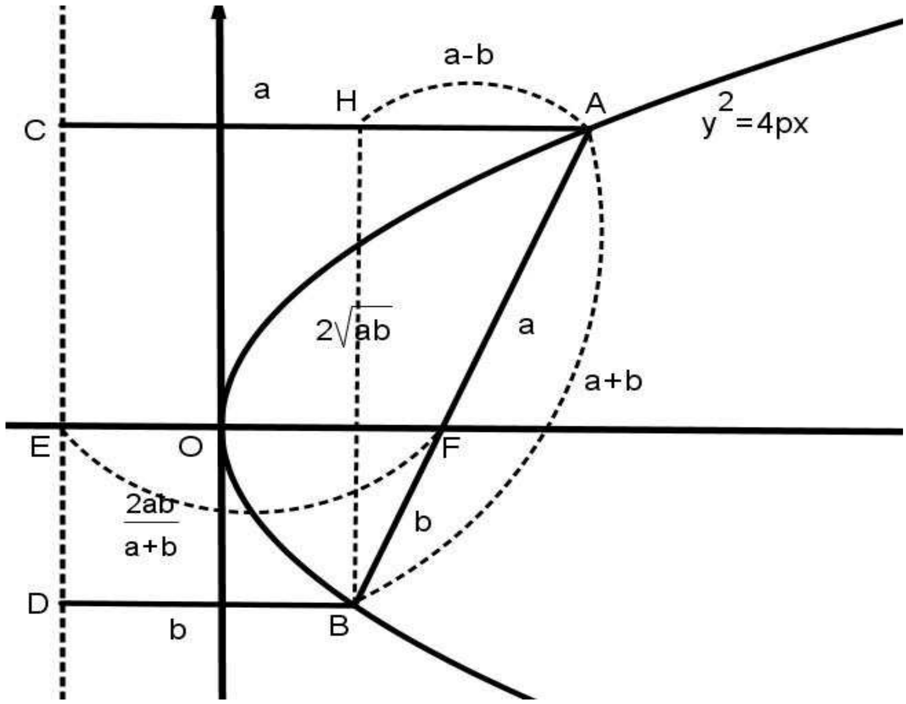
기울기의 곱이 -1 이니깐

$\dfrac{\sqrt{4p\alpha}}{\alpha} \times \dfrac{\sqrt{4p\beta}}{\beta} = -1$ 이걸 풀면 $\sqrt{\alpha\beta} = 4p$ (일정)

(6) 초점을 지나는 직선

⇒ 무지 유명한 유형이야 한 그림으로 설명하긴 복잡해서 크게 3부분으로 설명할게 시간 걸리더라도 꼭 정리하길 바래

① 초점을 지나는 직선 −1



$i)$ 직각삼각형 ABH에서 피타고라스 정리 이용하면

$\overline{BH} = \sqrt{(a+b)^2-(a-b)^2} = \sqrt{4ab} = 2\sqrt{ab} \quad \therefore \overline{CD} = 2\sqrt{ab}$

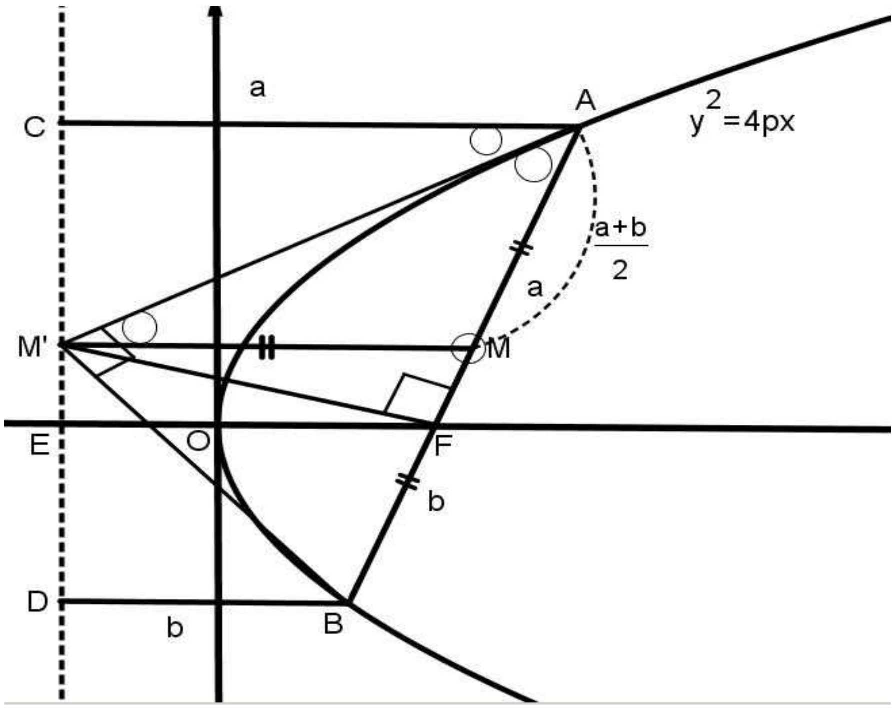
$ii)$ 사다리꼴 $ACDB$ 넓이 $= \frac{1}{2}(a+b)\times 2\sqrt{ab} = (a+b)\sqrt{ab}$

$iii)$ 사다리꼴 $ACDB$에서 $\overline{EF}$는 $a:b$로 내분하는 선분이 되니깐

$\overline{EF} = \frac{ab+ba}{a+b} = \frac{2ab}{a+b}$ (조화 평균), 근데 $\overline{EF} = 2p$ 잖아

그니깐 $p = \frac{ab}{a+b}$

② 초점을 지나는 직선 − 2



$\Rightarrow$ $\overline{AB}$ 의 중점을 M이라 하면 $\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{M'M} = \dfrac{a+b}{2}$

여기서 M을 원의 중심으로 하고 $\overline{AB}$를 지름으로 하는 원을 상상할 수 있어 이걸 토대로 정리 해 보자

$i)$ $\overline{AB}$ 를 지름으로 하는 원은 준선에 접하겠지

$ii)$ $\angle AM'B = 90^\circ$ (지름의 원주각)

$iii)$ $\triangle ACM' \equiv \triangle AFM'$ (두변과 끼인각 동일)

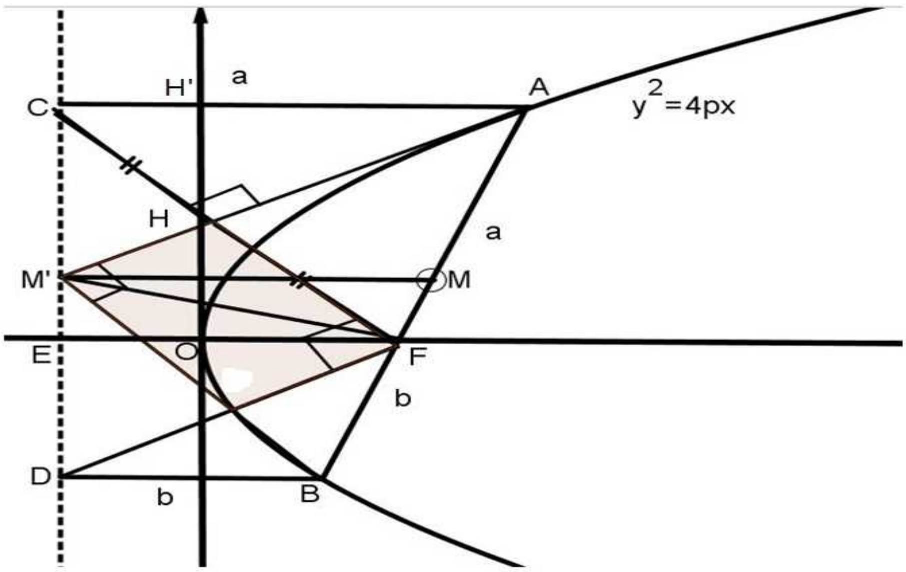
$\Rightarrow \begin{cases} \overline{CM'} = \overline{FM'} = \overline{M'D} = \sqrt{ab} \\ \text{그럼 점 } M' \text{ 중심인 원을 그릴 수 있지? } \therefore \angle CFD = 90^\circ \\ \angle ACM' = \angle AFM' = 90^\circ \end{cases}$

$iv)$ $\triangle BDM' \equiv \triangle BFM'$ (두변과 끼인각 동일)

$v)$ $\triangle ACM'$, $\triangle BDM'$, $\triangle ABM'$ 은 닮음

$\triangle ACM' + \triangle BDM' + \triangle ABM'$ = 사다리꼴 $ACDB$

③ 초점을 지나는 직선 -3



$i)\ \triangle CH'H \equiv \triangle FOH$
(둘다 직각 삼각형이고 맞꼭지각 같고 $\overline{CH'} = \overline{OF} = p$)

$\therefore\ \overline{CH} = \overline{HF}$

$\triangle ACF$는 이등변 삼각형 이니깐 $\angle AHC = 90^\circ$ (수직 이등분)

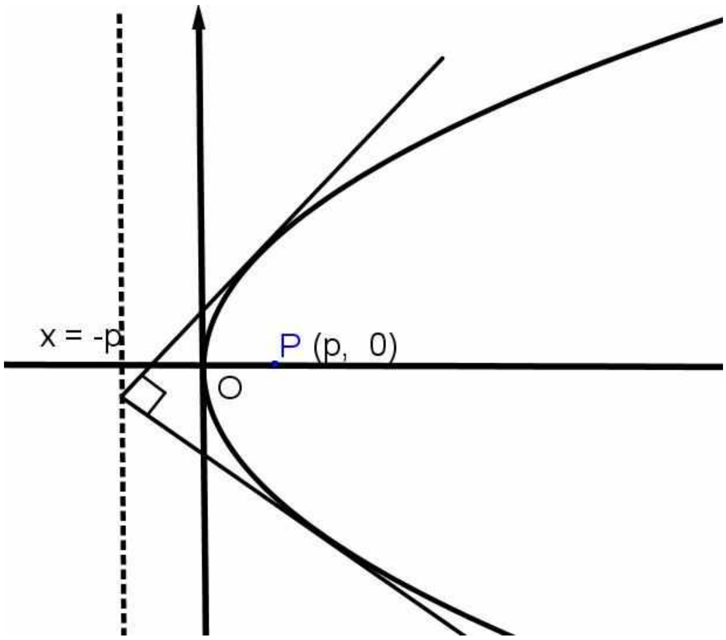
$ii)$ 직각 사각형 $HM'QF$ 넓이 $= \dfrac{1}{2}\triangle CDF = \dfrac{1}{2}\times\overline{CD}\times\overline{EF}$

$$= \frac{1}{2}(2\sqrt{ab})\times\frac{2ab}{a+b}$$

$iii)$ 직각 삼각형 CDF에서 $\overline{DF^2} = \overline{CD}\times\overline{ED}$
근데 $\overline{ED}$는 $\overline{CD}$의 $\dfrac{b}{a+b}$배 니깐 $\overline{ED} = 2\sqrt{ab}\times\dfrac{b}{a+b}$
$\therefore\ \overline{DF^2} = 2\sqrt{ab}\times 2\sqrt{ab}\times\dfrac{b}{a+b} = \dfrac{4ab^2}{a+b}$

(7) 접선의 중요한 성질

① 기본 -1 : 준선위의 점에서 그은 두 접선은 서로 수직이다



$\Rightarrow$ 아주 기본적인 이론이야

$y^2 = 4px$ 에서 접선의 기울기가 m 인 직선의 방정식은

$y = mx + \dfrac{p}{m}$ 이지? 이걸 양변에 m을 곱하고 m에 따라 정리하면

$m^2x - ym + p = 0$ 이 2차 방정식의 두 근이

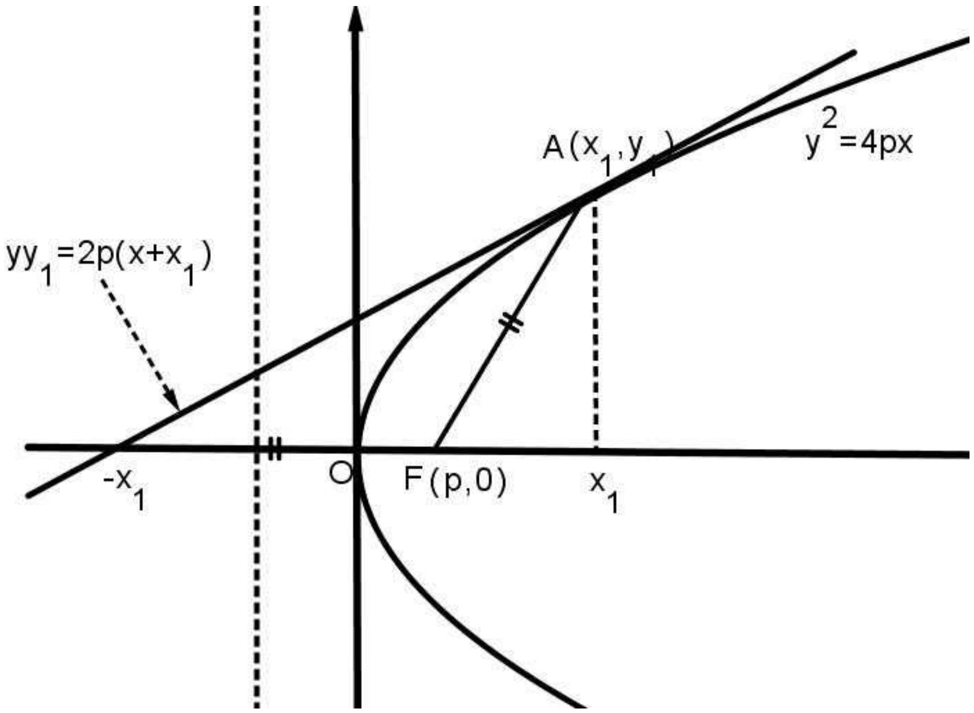
두 접선의 기울기 m_1, m_2 잖아

그럼 근과 계수와의 관계에서 $m_1 + m_2 = \dfrac{y}{x}$, $m_1 m_2 = \dfrac{p}{x}$

두 접선이 수직이 되려면 $m_1 m_2 = \dfrac{p}{x} = -1$, $\therefore\ x = -p$

즉, $x = -p$ (준선) 위의 모든 점에서 그은 두 접선은 서로 수직이 돼

② 기본 -2



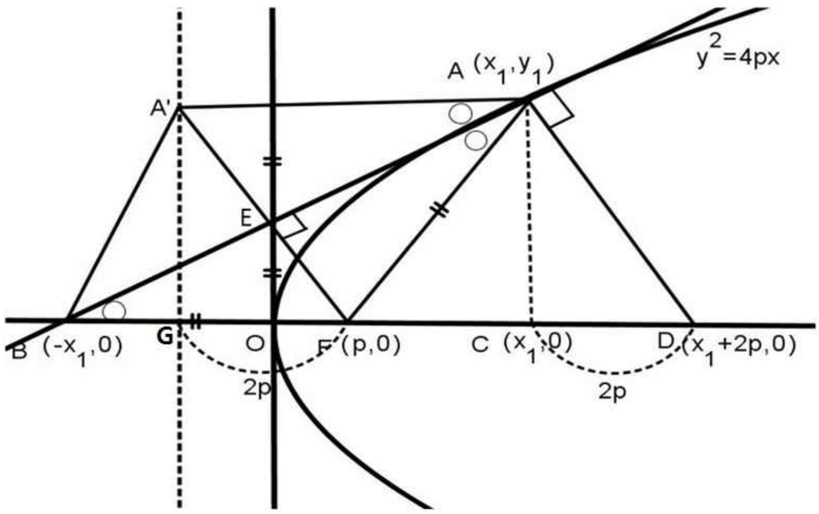
$\Rightarrow$ 접선과 대칭축 과의 교점(x절편)에서 초점까지의 거리와
접점부터 초점까지의 거리가 같다 (x_1+p로 같지ㅎ)

$\Rightarrow$ $\overline{AF}$는 당연히 x_1+p지 (이건 기본이야ㅎㅎ)

접점을 $(x_1,\ y_1)$이라 놓으면 접선의 방정식은 $yy_1 = 2p(x+x_1)$
여기서 x절편 구하면 $(-x_1,\ 0)$ 이야
그니깐 초점까지의 거리는 x_1+p가 돼.. 그래서 같다

포물선의 접선 정리는 이걸 기초로 출발하니깐 꼭 알아둬!!

③ 주요정리



$i)\ \overline{BF} = x_1 + p = \overline{AF}$, $\overline{BO} = \overline{CO}$, $\overline{BE} = \overline{AE}$

$ii)$ 사각형 $AA'BF$는 마름모 (대각선이 수직이등분)

$iii)\ \overline{BF} = x_1 + p = \overline{AF} = \overline{FD}$
(점 D는 접점 A 에서의 법선의 방정식의 x절편이야)

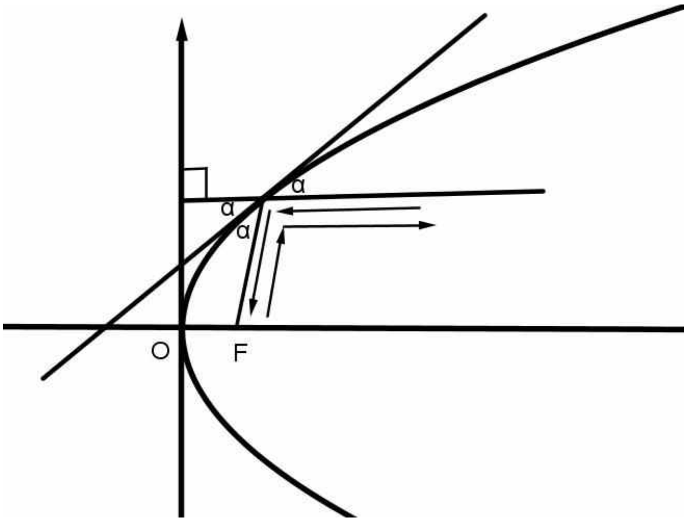
$iv)\ \triangle A'GF \equiv \triangle ACD$

$\therefore$ 평행사변형 $AA'FD$의 넓이 = 직사각형 $AA'GC$의 넓이 $= (x_1 + p) y_1$

$v)\ \triangle BFE$와 $\triangle BDA$는 1 : 2로 닮음

$$\therefore \begin{cases} \triangle BFE = \dfrac{1}{4} \triangle BDA \\ \text{사각형}\, AEFD = \dfrac{3}{4} \triangle BDA \end{cases}$$

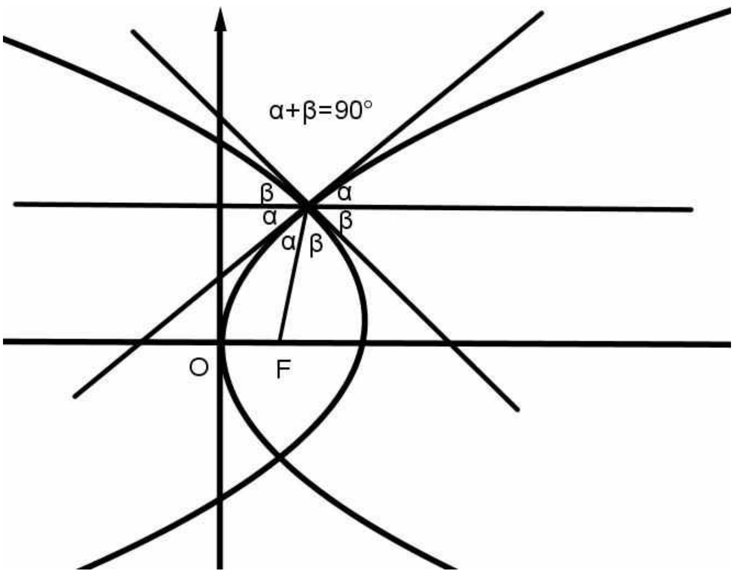
④ 접선에서의 입사각 반사각



⇒ 빛의 기본 성질에서 꼭 알아둬야 할 것이 있어
하나는 입사각 = 반사각 이고 또 하나는 최단거리로 도달 한다는 거야

포물선에서 빛의 성질은
만일 초점에서 포물선에 쏘면 대칭축(x축)과 평행하게 반사되고
x축과 평행하게 입사된 빛은 반드시 초점으로 반사된다는 거야

이 사실을 이용한게 다음처럼 초점을 서로 공유하고 만나는 포물선은
교점에서의 접선이 서로 수직하다는 거지 (이걸 두 포물선이 직교한다고 해)

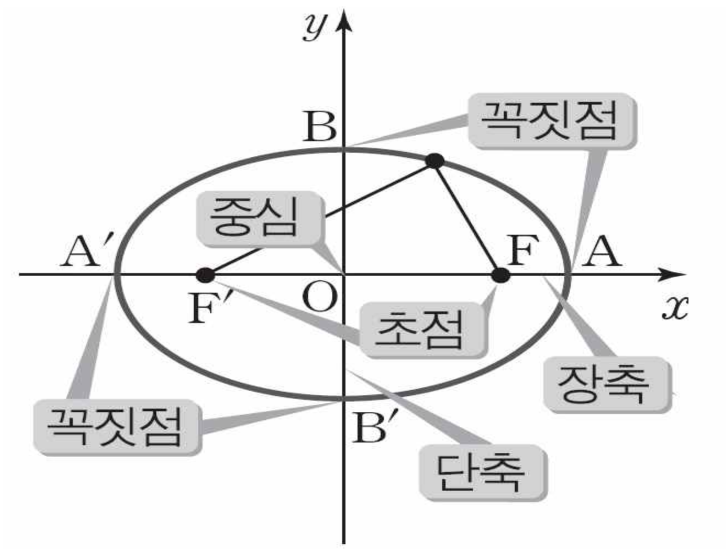


안녕맨의 끝장인강

타원

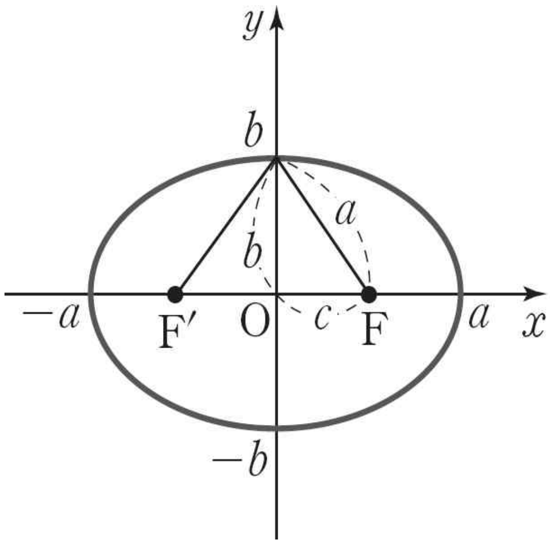
(1) 타원의 정의

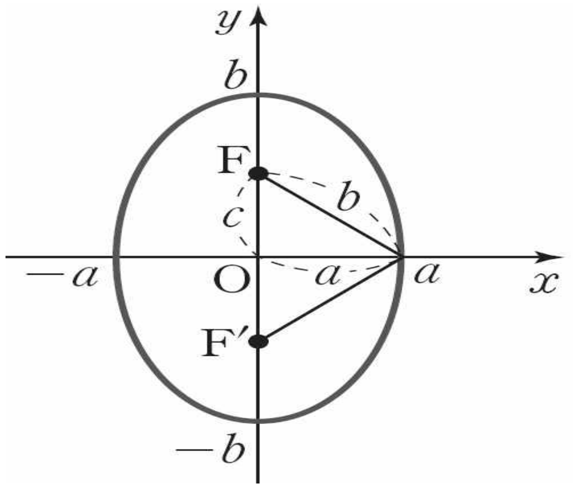
⇒ 평면 위의 두 정점 F, F' 으로부터 거리의 합이 일정한 점들의 집합



⇒ 위 그림에서처럼 두 정점 F, F'을 초점이라고 해
A, A', B, B' 를 꼭지점이라고 하는데
꼭지점사이를 있는 선분이 장축과 단축이 돼
참고로 초점을 포함하는 선분이 장축이 되는거야

(1) 기본 구조 ($\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$)





$a > b$일 때, $c^2 = a^2 - b^2$ 　　　 $a < b$일 때, $c^2 = b^2 - a^2$

$F(c,\ 0)$, $F'(-c,\ 0)$ 　　　 $F(0,\ c)$, $F'(0,\ -c)$

장축 = $2a$, 단축 = $2b$ 　　　 장축 = $2b$, 단축 = $2a$

$\Rightarrow 2a$ 가 장축일 때, 그림과 같은 직각 삼각형에서 빗변이 a 가 돼
초점이 주어질 때 초점의 중점이 타원의 중심이 되고
초점의 차이의 반이 c 가 되지

ex) 두 초점 $(-5,\ 2)$ $(7,\ 2)$ 일 때

$\dfrac{-5+7}{2} = 1$, $\dfrac{2+2}{2} = 2$, 타원의 중심 $(1,\ 2)$

$\dfrac{7-(-5)}{2} = 6 = c = \sqrt{a^2 - b^2}$

$\therefore$ 타원의 방정식 : $\dfrac{(x-1)^2}{a^2} + \dfrac{(y-2)^2}{b^2} = 1$, $c = 6$

$cf.$) 초점만 가지고는 완전한 타원의 방정식을 구할 수 없어

(2) 접선의 방정식

$\Rightarrow$ 모든 2차 곡선의 접선의 방정식 이론이 동일해
접점이 주어지는경우 또는 기울기가 주어지는 경우로 나눠서 구하는거야

① 접 점 $(x_1,\ y_1)$이 주어질 때,

$\Rightarrow$ 2차 곡선은 접점이 주어질때 접선의 방정식이 공통적으로 적용되는 공식이 있어

$$x^2 \Rightarrow x_1 x, \quad x \Rightarrow \frac{x+x_1}{2}, \quad y^2 \Rightarrow y_1 y, \quad y \Rightarrow \frac{y+y_1}{2}$$
$$(x-\alpha)^2 \Rightarrow (x_1-\alpha)(x-\alpha), \quad (x-\alpha) \Rightarrow \frac{(x-\alpha)+(x_1-\alpha)}{2}$$
$$(y-\beta)^2 \Rightarrow (y_1-\beta)(y-\beta), \quad (y-\beta) \Rightarrow \frac{(y-\beta)+(y_1-\beta)}{2}$$

이걸 타원에 적용하면

$i)$ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1 x}{a^2}+\frac{y_1 y}{b^2}=1$$

$ii)$ $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은
$$\frac{(x_1-\alpha)(x-\alpha)}{a^2}+\frac{(y_1-\beta)(y-\beta)}{b^2}=1$$

$ex)$ $\frac{(x-1)^2}{8}+\frac{(y+1)^2}{18}=1$ 위의 점 $(3,\ 2)$에서의 접선의 방정식은?

$$\Rightarrow \frac{(3-1)(x-1)}{8}+\frac{(2+1)(y+1)}{18}=1$$

② 기울기 m이 주어질 때

$i)$ $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식

$\Rightarrow y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$

$ii)$ $\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \dfrac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$ 에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식

$\Rightarrow y - \beta = m(x-\alpha) \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$

$ex1)$ $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ 에 접하고 기울기가 2인 접선의 방정식

$\Rightarrow y = 2x \pm \sqrt{9 \times 4 + 4} = 2x \pm \sqrt{17}$

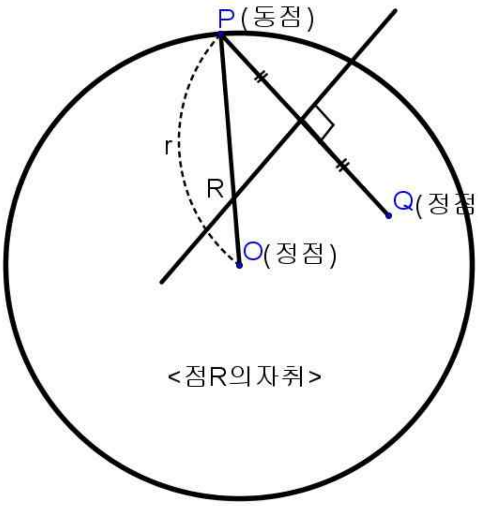
$ex2)$ $\dfrac{(x-1)^2}{9} + \dfrac{(y+2)^2}{4} = 1$ 에 접하고 기울기가 2인 접선의 방정식

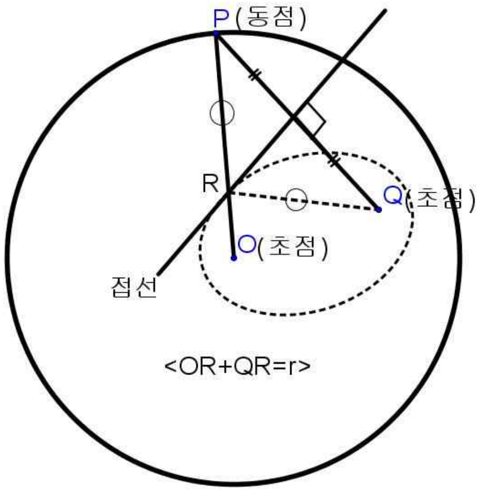
$\Rightarrow y + 2 = 2(x-1) \pm \sqrt{9 \times 4 + 4}$

$\therefore\ y = 2x - 4 \pm \sqrt{17}$

(3) 타원의 자취

① 원위의 동점과 원 내부의 정점을 연결한 선분의 수직 이등분선이 동점과 원의 중심을 연결한 지름과의 교점(R)의 자취





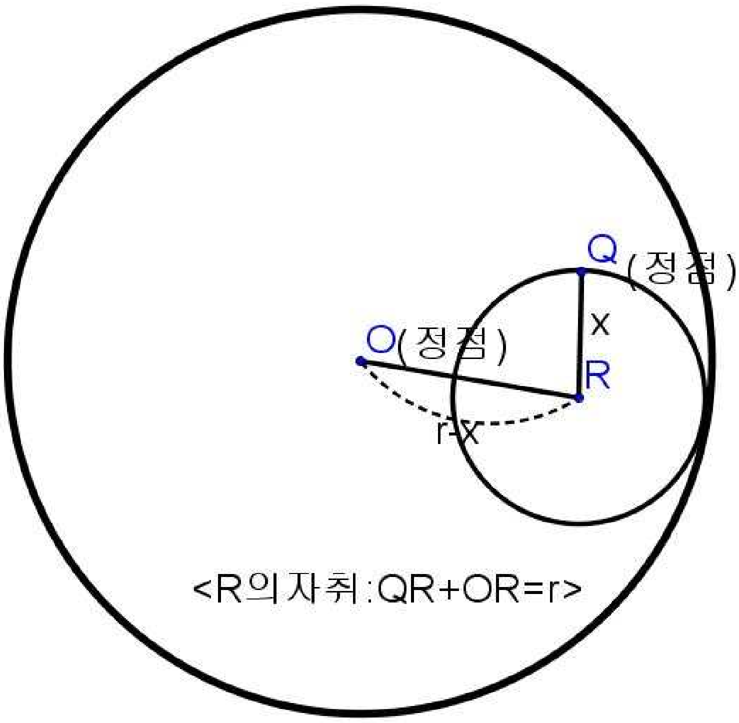
⇒ 그림에서 점 R의 자취는

$\overline{OR} + \overline{QR} = \overline{OR} + \overline{RP} = r$ 이 성립하니깐

점 O와 점 Q를 초점으로 하는 타원이 돼 (장축의길이 : 원의반지름)

이 때, 수직이등분선은 이 타원의 접선이 되지

② 원 안의 점 Q를 지나고 원에 내접하는 원의 중심(R)의 자취

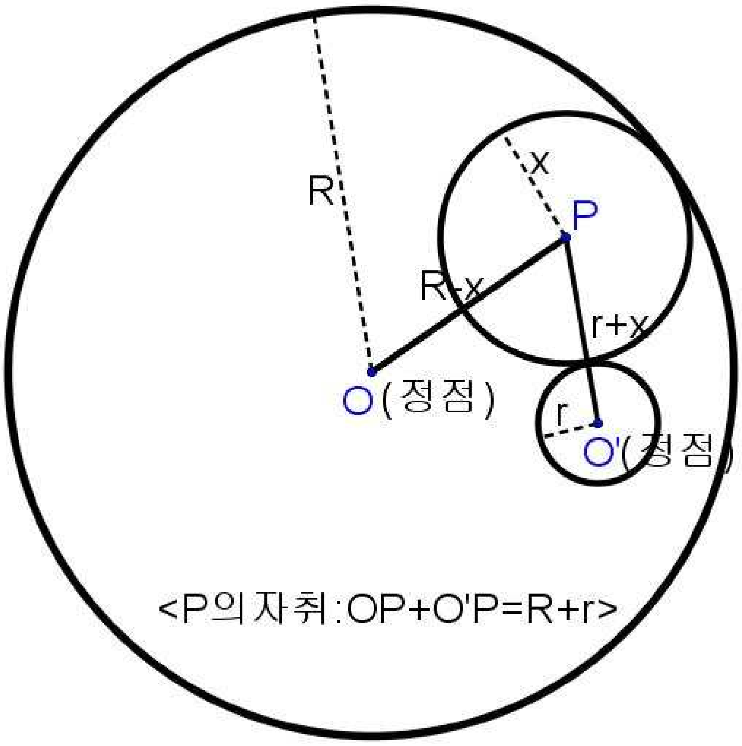


$\Rightarrow \overline{QR} + \overline{OR} = x + r - x = r$ 로 일정하니깐

점 R의 자취는 점 O와 Q를 초점으로 하고

장축의 길이가 r 인 타원이 돼

③ 큰 원에 내접하고 작은 원에 외접하는 원의 중심(P)의 자취

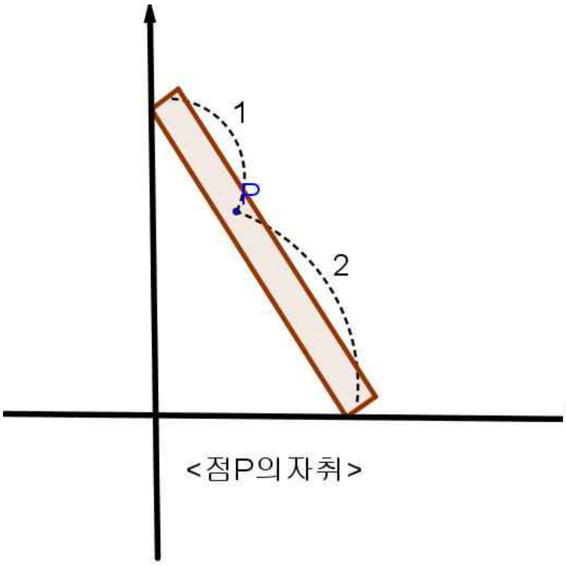


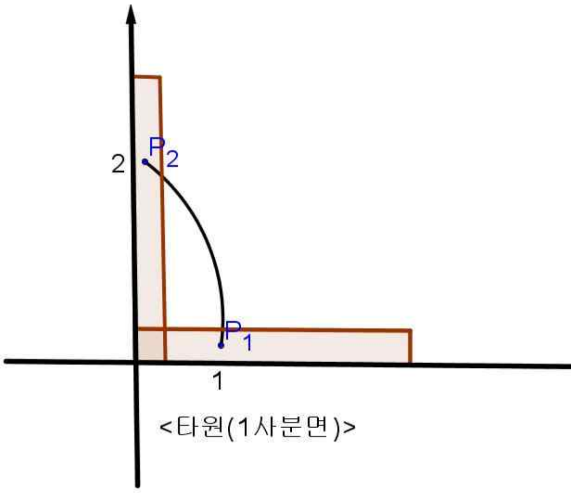
⇒ 큰 원의 반지름을 R, 작은 원의 반지름을 r이라 할 때,

$\overline{OP} + \overline{O'P} = R - x + r + x = R + r$ (일정)

초점 : 점 O와 점 O' , 장축의 길이 : $R+r$

④ 막대기의 내분점 외분점의 자취





$\Rightarrow$ 그림처럼 벽에 기대어 있는 막대기를 완전히 세웠다가

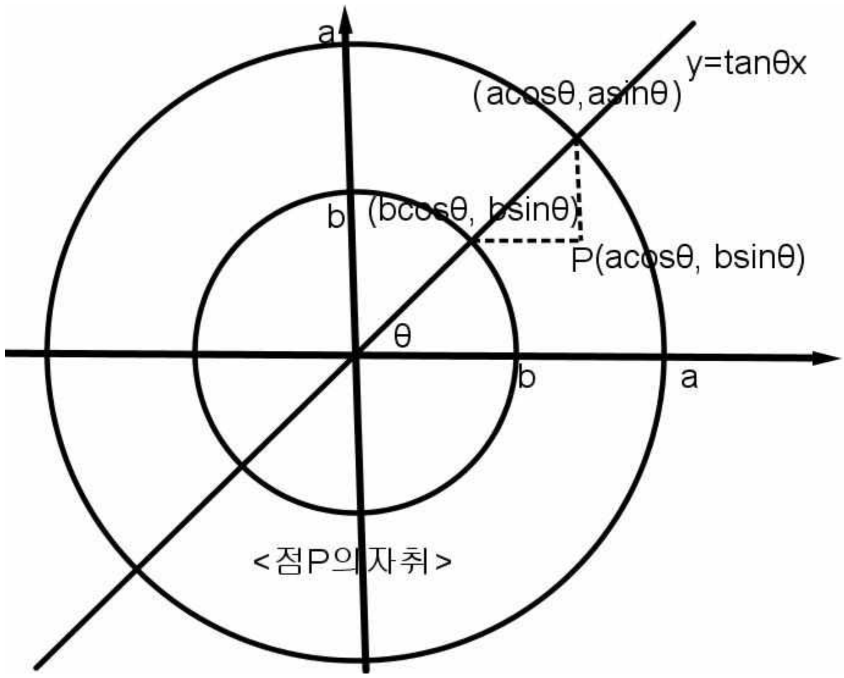
다시 완전히 눕힐 때, 막대기를 $1:2$로 내분하는 내분점 P의 자취는

오른쪽 그림처럼 1사분면의 타원을 그리게 돼

타원의 방정식 : $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1\ (x>0,\ \ y>0)$

$cf.$) 막대기의 내분점이나 외분점은 완전히 세웠을 때와
완전히 눕혔을 때의 점을 연결한 타원이 되는데
절대로 3사분면에는 나타나지 않아 참고로 알아둬

⑤ 두 동심원과 원점을 지나는 직선의 교점의 좌표로 구성된 점(P)의 자취



⇒ 중심이 원점인 반지름 b인 원과 반지름 a인 두 동심원과 직선 $y = \tan\theta\, x$의 교점은 매개변수 θ를 이용하면 $(b\cos\theta,\ b\sin\theta)$, $(a\cos\theta,\ a\sin\theta)$가 되겠지

이 때, 점$(b\cos\theta,\ b\sin\theta)$에서 x축에 평행하게 그은 선과 점$(a\cos\theta,\ a\sin\theta)$에서 y축에 평행하게 그은 선의 교점은 $(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$가 될거야

이 매개변수로 표현된 점의 자취를 구하면

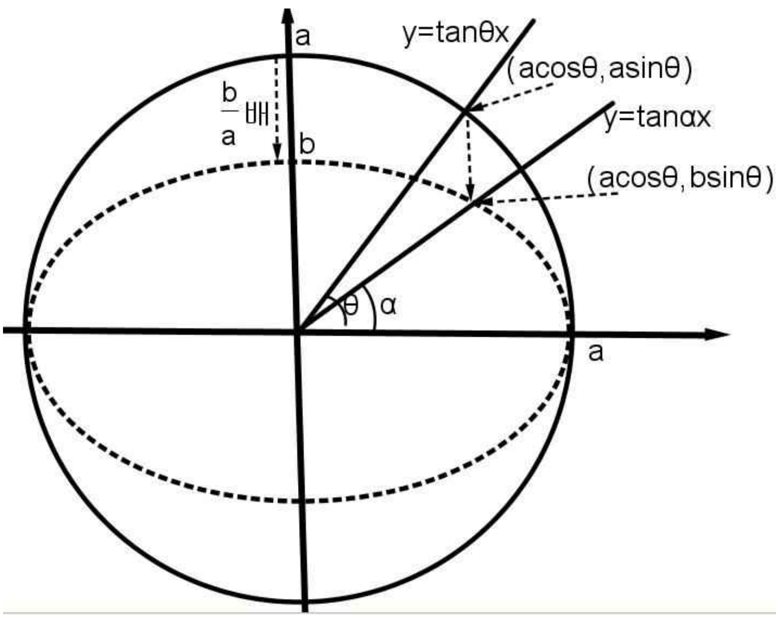
$$x = a\cos\theta,\quad y = b\sin\theta \ \Rightarrow\ \cos\theta = \frac{x}{a},\quad \sin\theta = \frac{y}{b}$$

$$\therefore\ \cos^2\theta + \sin^2\theta = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

즉, 타원을 그린다는 것을 알 수 있어

(4) 타원과 원과의 축소 확대

① 원의 축소 ⇒ 타원



⇒ 그림처럼 반지름 a 인 원을 y축만 $\frac{b}{a}$ 배 축소한다면

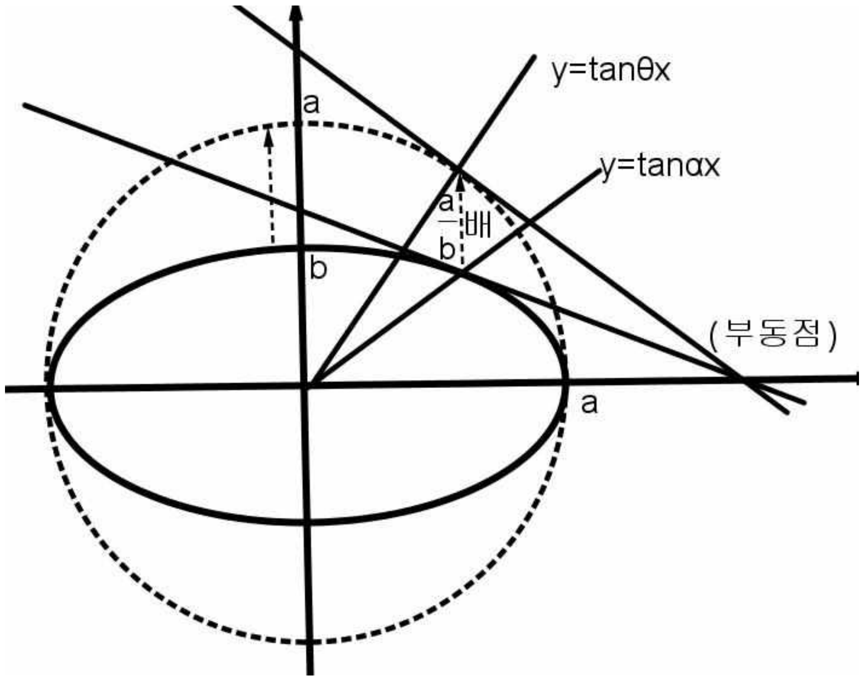
타원이 돼 (y대신에 $\frac{a}{b}y$ 를 대입)

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad \rightarrow \quad x^2 + \frac{a^2}{b^2}y^2 = a^2 \quad \rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

이때, 처음 원에서의 직선 $y = \tan\theta x$는 y축으로만 $\frac{b}{a}$배 축소한

$y = \tan\alpha x$ 가 될거고 $\tan\alpha = \frac{b\sin\theta}{a\cos\theta} = \frac{b}{a}\tan\theta$ 가 성립하지

② 타원의 확대 ⇒ 원



⇒ 입장을 거꾸로 생각해서 이번엔 타원을 y축 방향으로 $\frac{a}{b}$배 확대하면 반지름 a인 원이 되겠지 (y 대신에 $\frac{b}{a}y$ 대입)

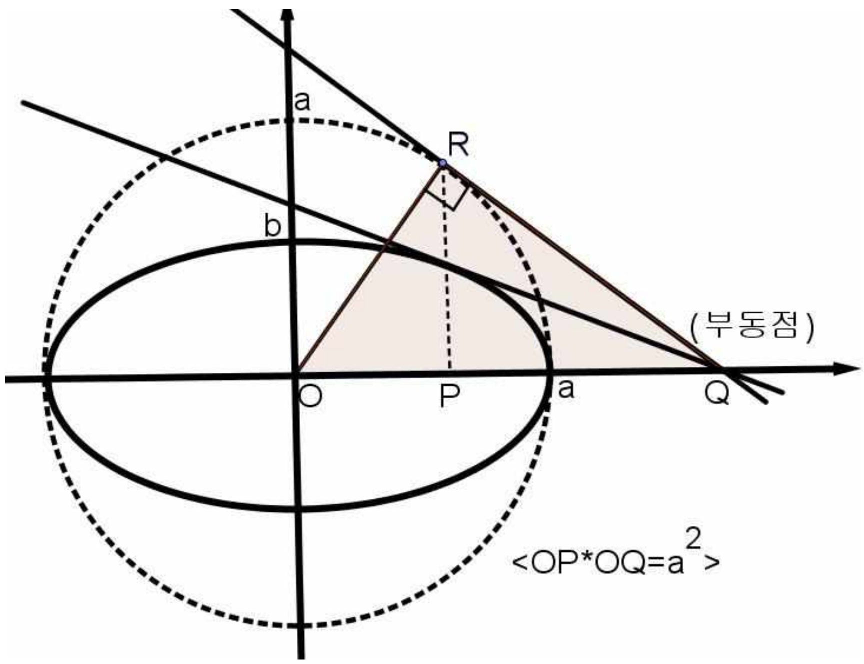
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad\rightarrow\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{b^2y^2}{a^2b^2}=1 \quad\rightarrow\quad x^2+y^2=a^2$$

물론 기울기도 $\frac{a}{b}$배 될거야 ($\tan\theta=\frac{a}{b}\tan\alpha$)

이때 타원과 $y=\tan\alpha x$의 교점에서 그은 접선의 x절편은
타원이 확대되도 어차피 y좌표가 0이었으니깐 변함이 없어
(3, 0)을 y축으로 $\frac{a}{b}$배 했다고 해봐 그대로 (3, 0)이지

이 때, 그 x절편은 이동하지 않은 부동점이 되는거야

③ 타원의 축소 확대(원) + “부동점” 활용



⇒ 만일 위의 그림처럼 주어진 타원에서 $\overline{OP} \times \overline{OQ}$ 의 길이를 구하라는 문제가 나왔다고 해봐

이 상태에서 타원만 가지고는 이 문제를 해결 할 방법이 없어

이 때, 주어진 문제를 보면 점 O, P, Q는 다 x축 위의 점들이잖아 이 점들은 아무리 y축 방향으로 축소 확대 해도 변하지 않는 부동점이 되는거야

그럼 이 타원을 위 그림처럼 확대를 해서 원을 만들어봐

이러면 점 O, P, Q는 변하지 않은 상태에서 원 문제로 바꿔서 풀 수 있어
그림처럼 직각삼각형을 만들수 있으니깐 기본 도형의 성질에 의해서 $\overline{OP} \times \overline{OQ} = \overline{OR}^2 = a^2$ 이라 구할 수 있지ㅎㅎ

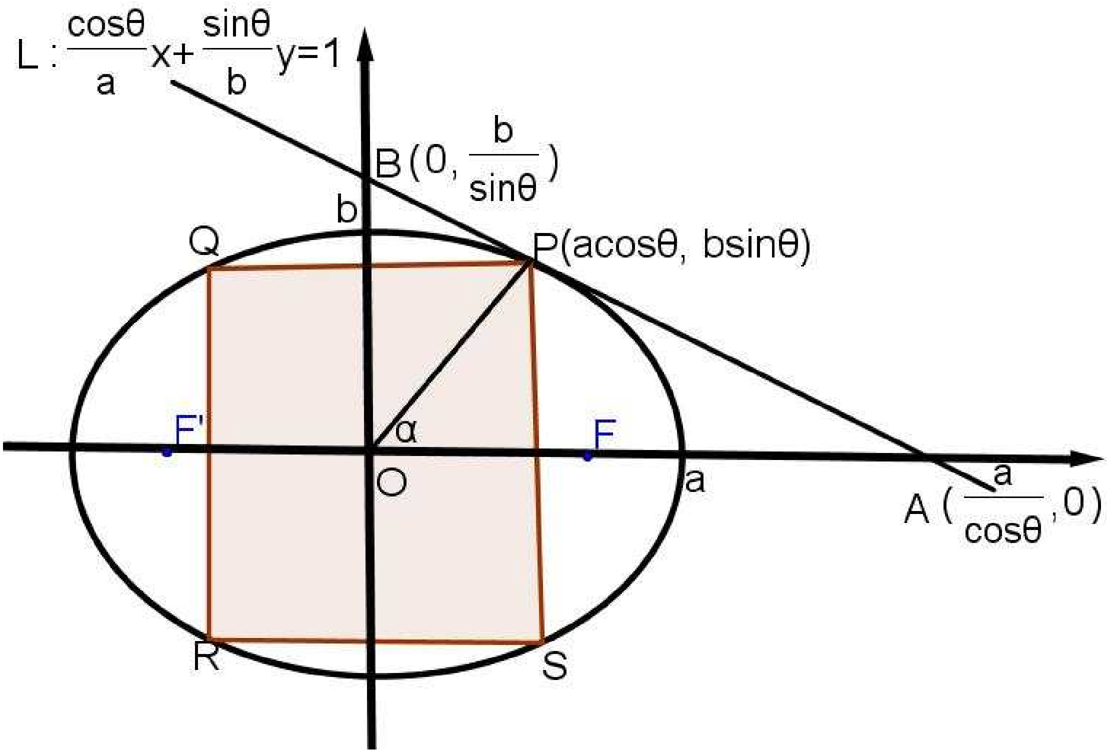
이렇게 타원에 관련된 문제를 타원을 축소 확대 해서 원을 만들고 부동점이라는 이론을 도입해서 원 문제로 바꿔서 풀 수 있게돼

(5) 타원과 접선의 성질

① 매개변수 도입의 필요성

⇒타원은 원이랑 비슷해서 매개 변수를 도입하면 쉽게 면적이나
길이를 표현 할 수가 있어
그래서 타원에 관련된 면적, 길이 문제는 반드시 매개변수를 생각 해 봐야돼

그림에서 다음 4가지 문제를 매개변수를 이용해서 풀어보자



그림에서 먼저 알아둬야 할게 $\tan\alpha = \dfrac{b}{a}\tan\theta$ 라는 거야(앞에서 배웠지ㅎ)
(그림에서 θ를 나타내진 않는거야)

≪ 대전제 : $\tan\alpha = \dfrac{b}{a}\tan\theta$ ≫

$i)$ $\triangle OAB$의 넓이 $= \dfrac{1}{2}\dfrac{ab}{\sin\theta\cos\theta} = \dfrac{ab}{\sin 2\theta} \geq ab$

($\sin 2\theta = 1$일때 등호 성립 $\rightarrow$ $\theta = 45^\circ$, $\therefore \tan\alpha = \dfrac{b}{a}$일때 성립)

$ii)$ 사각형 $PQRS$ 넓이 $= 4ab\sin\theta\cos\theta = 2ab\sin 2\theta \leq 2ab$
(등호는 $i)$번과 동일하겠지ㅎㅎ)

$iii)$사각형 $PQRS$ 둘레의 길이 $= 4(acos\theta + bsin\theta) \leq 4\sqrt{a^2+b^2}$
(등호 $\tan\theta = \dfrac{b}{a}$일 때, 즉 $\tan\alpha = \left(\dfrac{b}{a}\right)^2$일 때 성립)

$$
\begin{aligned}
iv)\ \overline{AB}^2 &= \left\{\left(\frac{a}{\cos\theta}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sin\theta}\right)^2\right\} \\
&= \left\{\left(\frac{a}{\cos\theta}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sin\theta}\right)^2\right\}(\cos^2\theta + \sin^2\theta) \\
&\geq \left(\frac{a}{\cos\theta}\times\cos\theta + \frac{b}{\sin\theta}\times\sin\theta\right)^2 \ (\text{코쉬}-\text{슈바르츠}) \\
&= (a+b)^2
\end{aligned}
$$

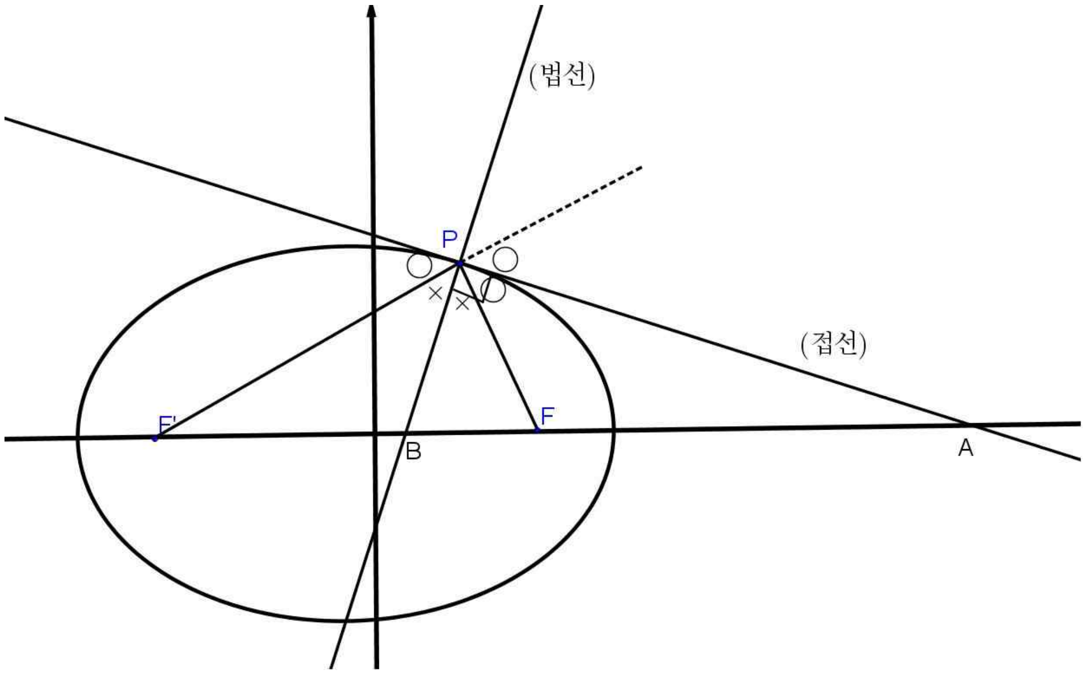
(등호는 $\dfrac{\cos\theta}{\dfrac{a}{\cos\theta}} = \dfrac{\sin\theta}{\dfrac{b}{\sin\theta}}$ 일 때 성립)

$\rightarrow \left(\dfrac{\cos^2\theta}{a} = \dfrac{\sin^2\theta}{b}\right) \rightarrow \left(\dfrac{b}{a} = \tan^2\theta\right) \rightarrow \left(\tan\theta = \sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)$

$\therefore \tan\alpha = \dfrac{b}{a}\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ 일 때, 등호성립

② 입사각 반사각을 이용한 접선, 법선이론

⇒어떤 평면에 쏘인 빛은 입사각과 반사각이 같다는거 얘기했지?
2차 곡선에서는 접선이 마치 빛을 받는 평면이라고 생각하면 돼
그걸 이용하는 거야



⇒ 타원의 한 초점 (F')에서 쏘아진 빛은 다른 초점(F)로
떨어지는데 이때 입사각과 반사각이 같으니깐
맞 꼭지각까지 이용하면 그림처럼 세 각이 ○ 로 동일하게 돼

또 접점 P를 지나고 접선에 수직인 법선을 그으면 $\triangle PF'F$ 의
내각의 이등분선이 돼

그니깐 $\triangle PF'F$기준으로 볼 때, 타원의 접선은 외각의 이등분선이
되고 법선은 내각의 이등분선이 되네

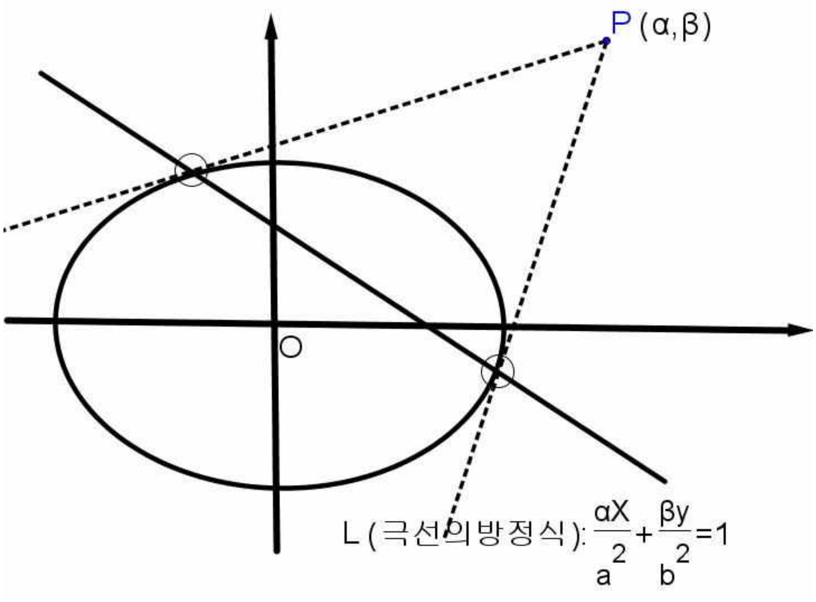
즉, $\triangle PF'F$에서 각의 이등분선 정리에 따라

$\ll$ $\overline{PF'} : \overline{PF} = \overline{BF'} : \overline{BF} = \overline{AF'} : \overline{AF}$ $\gg$ 가 성립하지

타원 접선에선 가장 중요한 이론이야 꼭 알아둬!!!

③ 타원에서 극선의 방정식

⇒ 타원밖의 점에서 접선을 그을 때 이 두 접선의 접점을 지나는 직선을 타원의 극선의 방정식 이라고 해



⇒ 두 접점을 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$라 한다면

두 접선의 방정식이 $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$ 과 $\frac{xx_2}{a^2}+\frac{yy_2}{b^2}=1$ 이잖아

이 두 접선이 점 (α, β)을 지나니깐

$\frac{\alpha x_1}{a^2}+\frac{\beta y_1}{b^2}=1$ 와 $\frac{\alpha x_2}{a^2}+\frac{\beta y_2}{b^2}=1$ 란 식이 성립하지?

근데 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$ 는 두 점 모두 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점이잖아

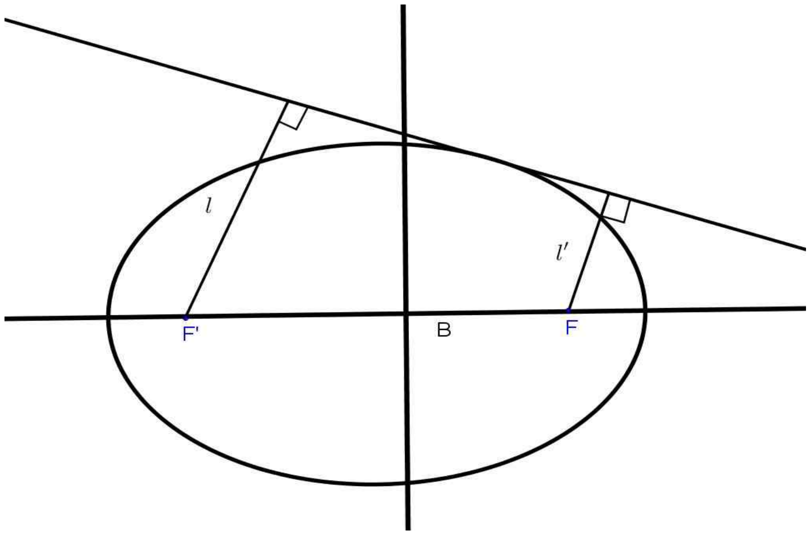
그럼 그냥 $\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}=1$ 이라 해도 되지

타원 위에 있으면서 이 직선의 식을 만족하는 점은 두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$ 밖에 없으니깐..

cf.) 극선의 방정식 공식은 포물선, 타원, 쌍곡선에 모두 적용돼

④ 기타 암기 사항 ($a > b$ 인 경우 즉, 장축이 $2a$, 단축이 $2b$ 일때)

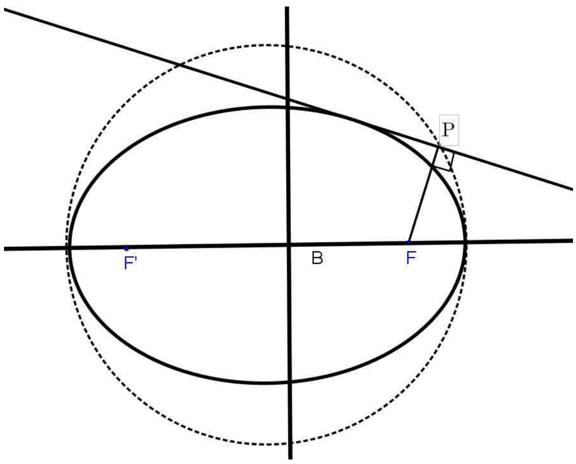
i) 초점에서 접선에 그은 두 수선의 길이의곱 $= b^2$

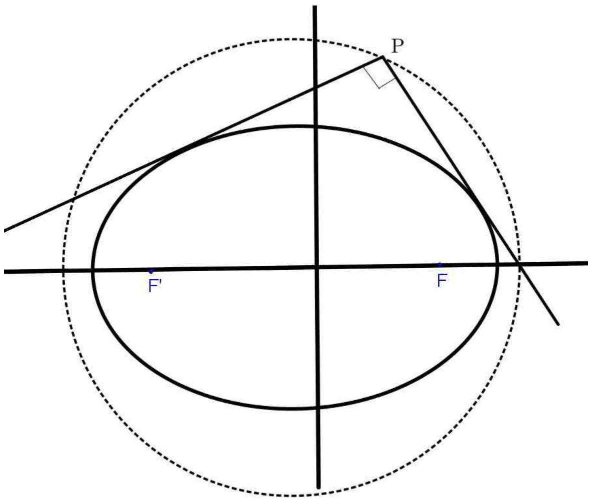


$$\ll \; l \times l' = b^2 \; \gg$$

ii) 초점에서 접선에 그은 수선의 발 P의 자취 : 원

iii) 수직 접선이 되게 하는 곡선밖의 점 P의 자취 : 원



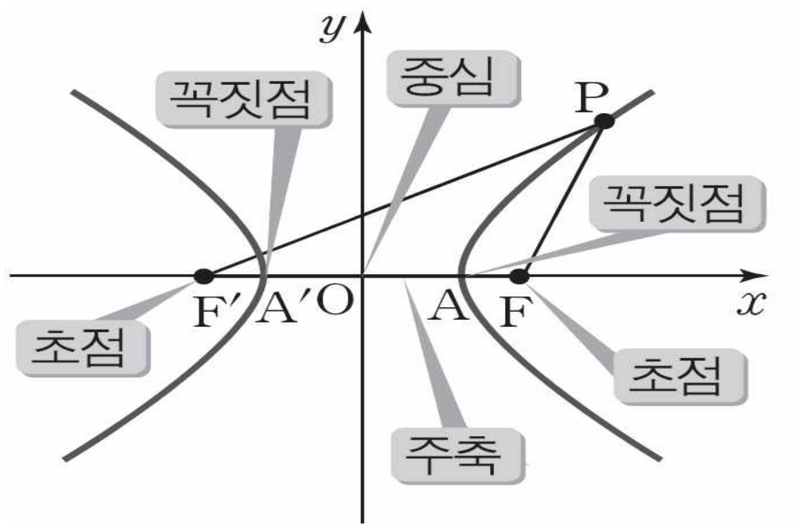


ii) $\ll \; x^2 + y^2 = a^2 \; \gg$　　　iii) $\ll \; x^2 + y^2 = a^2 + b^2 \; \gg$

쌍곡선

(1) 쌍곡선의 정의

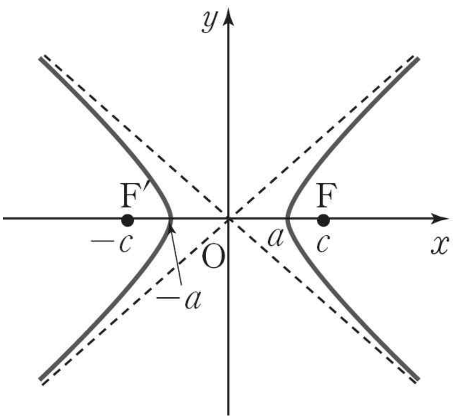
⇒ 평면 위의 두 정점 F, F' 으로부터 거리의 차가 일정한 점들의 집합을 쌍곡선이라고 해ㅎ

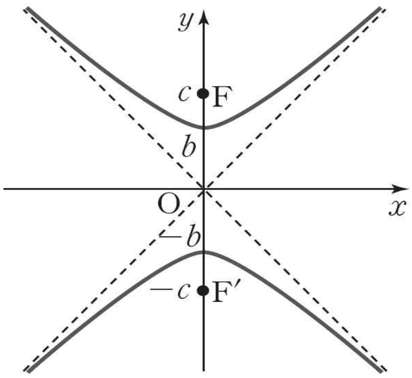


⇒ 점 A, 점 B : 꼭지점,　선분 AA' : 주축
선분 AA' 의 중점 (O) : 쌍곡선의 중심

(2) 쌍곡선의 방정식

⇒ 쌍곡선은 a, b의 대소가 아니라 표준화 시켰을 때, 왼쪽이 1이냐 -1이냐에따라 개형이 달라져





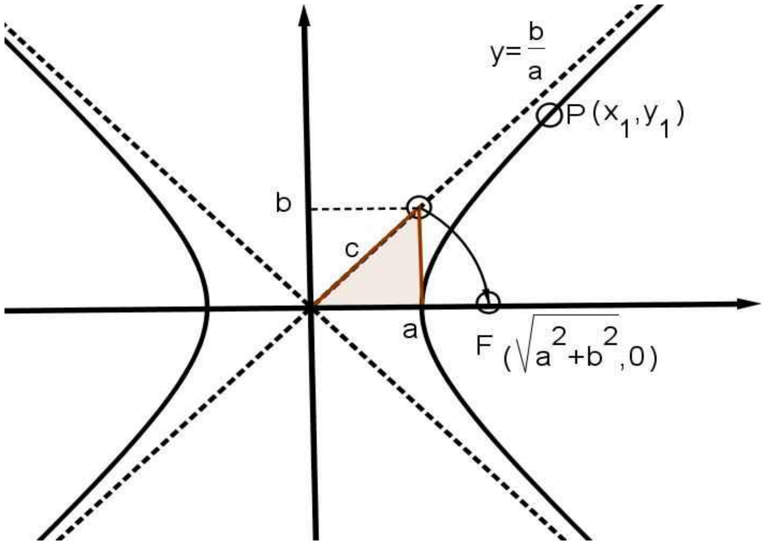
① $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$

② 주축의 길이 : $2a$ 주축의 길이 : $2b$

③ $c^2 = a^2 + b^2$, 점근선 : $y = \pm\frac{b}{a}x$ (양쪽 그림 동일)

④ 초점 : $(c, 0)$, $(-c, 0)$ 초점 : $(0, c)$, $(0, -c)$

(3) 기본 구조



① 주축을 이루는 꼭지점의 중점 = 초점의 중점 = 두 점근선의 교점

② 위의 직각 사각형을잘 봐 빗변의 길이가 $c\,(=\sqrt{a^2+b^2}\,)$이 되는거야
그래서 $(a,\ b)$에서 밑으로 회전하면 정확히 초점에 떨어져

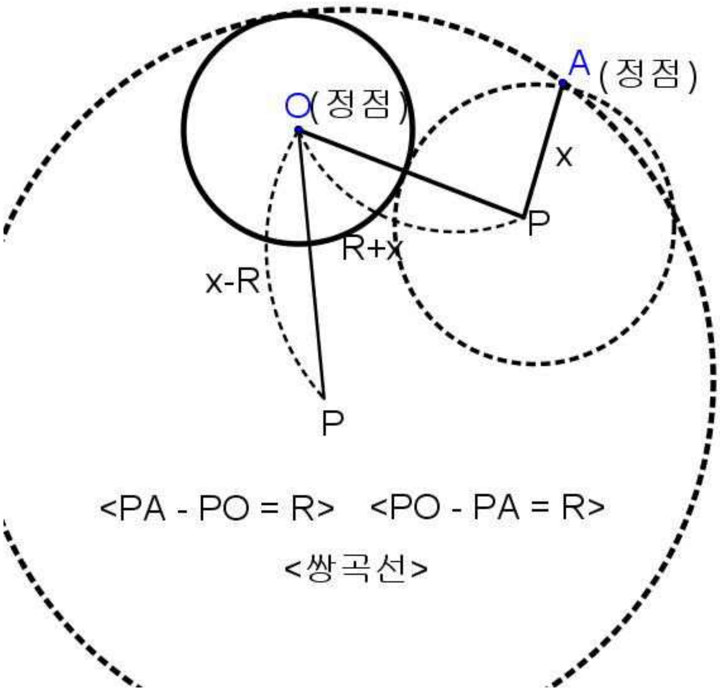
③ 쌍곡선은 말 그대로 곡선이 쌍으로있지?
그래서 쌍곡선의 정의도 식이 2개여야 가능해

우리가 알고 있는 $|\overline{FA}-\overline{F'A}|=2a$ 이 식은
$\overline{FA}-\overline{F'A}=2a$ (점 F'을 끼고 도는 하나의 곡선) 과
$\overline{F'A}-\overline{FA}=2a$ (점 F를 끼고 도는 하나의 곡선) 이
짬뽕 된 식이야

④ 그림 처럼 쌍곡선 위의 한 점 $(x_1,\ y_1)$에서
$x_1\to\infty$ 가 되면, $y_1\to\dfrac{b}{a}x_1$이 돼 즉, y좌표가 점근선 위의 점으로 가지

(4) 쌍곡선의 자취

① 원에는 접하고 점 A를 지나는 원의 중심(P)의 자취



⇒ 원에 접하는 경우는 2가지가 있어 내접, 외접 ...
이 두 가지를 합쳐서 쌍곡선이 되는거야

그림에서 점 O와 A는 정점이고 원에 외접하는경우는
$\overline{PO} - \overline{PA} = R+x - x = R$ (일정)

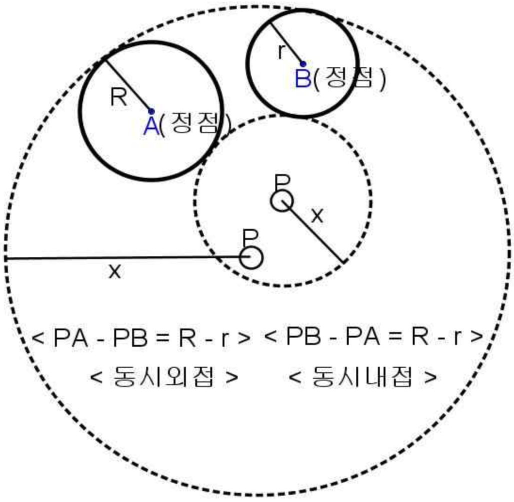
원에 내접하는 경우는
$\overline{PA} - \overline{PO} = x-(x-R) = R$ (일정)

두 경우를 합치면 $|\overline{PO} - \overline{PA}| = R$ (초점 : O, A)

② 원 A와 원 B에 동시에 접하는 원의 중심의 자취

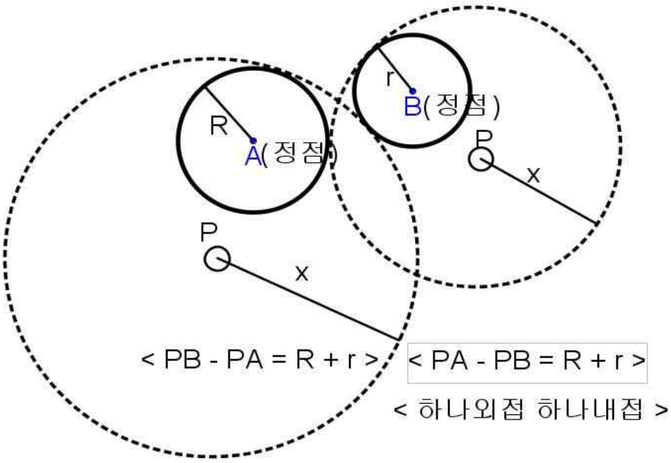
$\Rightarrow$ 이건 크게 4가지 경우가 있어
두 원에 모두 외접, 두 원에 모두 내접, 하나는 내접, 다른 하나는 외접

$i)$ 두 원에 모두 외접 또는 모두 내접



그림에서 $|\overline{PA} - \overline{PB}| = R - r$

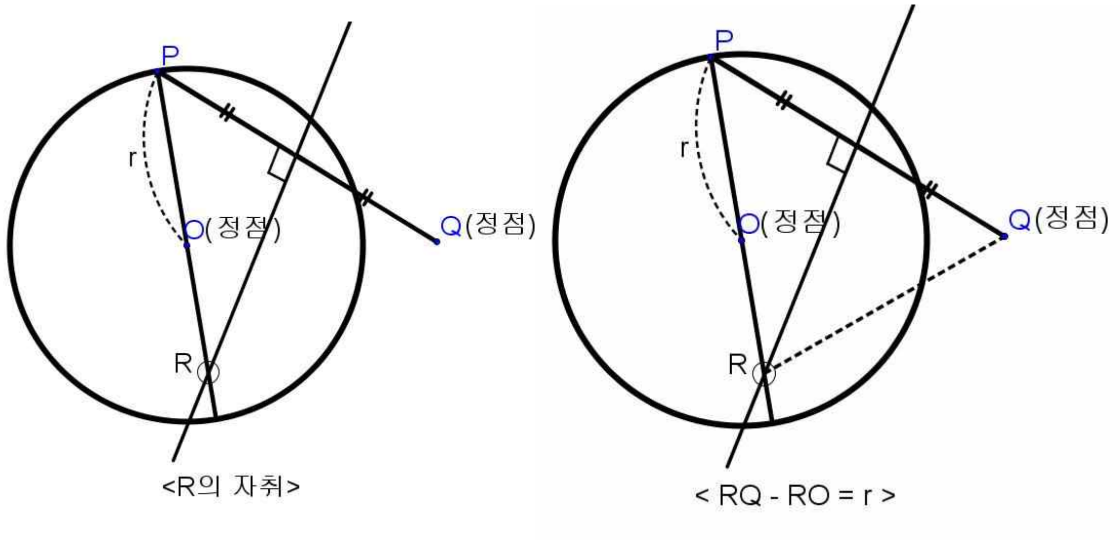
$ii)$ 하나는 외접, 다른 하나는 내접



그림에서 $|\overline{PA} - \overline{PB}| = R + r$

이렇게 주축의 길이가 다른 쌍곡선 2개가 생기지 ㅎ

③ 원위의 동점과 원 외부의 정점을 연결한 선분의 수직 이등분 선이 동점과 원의 중심을 연결한 지름과의 교점(R)의 자취



$\Rightarrow$ 타원의 자취에서 했던 거랑 거의 비슷하지??
타원은 원 내부의 정점이었고 쌍곡선은 원 외부의 정점이야

오른쪽 그림에서 $\overline{RQ} = \overline{RP}$ 니깐
$\overline{RQ} - \overline{RO} = \overline{RP} - \overline{RO} = r$ (일정)

$cf)$ 단, 이자취는 쌍곡선 일부만 되는거야

(5) 쌍곡선의 접선의 방정식

$\Rightarrow$ 이건 타원의 방정식이랑 너무 흡사해

① 접점 $(x_1,\ y_1)$이 주어질 때

$i)$ $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

$ii)$ $\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \dfrac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{(x_1-\alpha)(x-\alpha)}{a^2} - \frac{(y_1-\beta)(y-\beta)}{b^2} = 1$$

② 기울기 m이 주어질 때

$i)$ $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식

$\Rightarrow y = mx \pm \sqrt{|a^2m^2 - b^2|}$

$ii)$ $\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \dfrac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$ 에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식

$\Rightarrow y - \beta = m(x-\alpha) \pm \sqrt{|a^2m^2 - b^2|}$

≪ 2차곡선 (포물선, 타원, 쌍곡선) 주요 기본 공식 총정리 ≫

⇒ 한꺼번에 총정리 함 해보자ㅎ

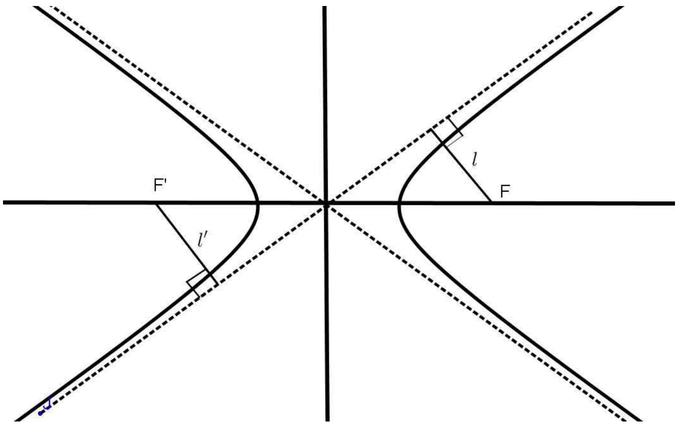
	포물선	타원	쌍곡선
일반식	$(y-\beta)^2 = 4p(x-\alpha)$	$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$	$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$
중 심	꼭지점 (α, β) $\Rightarrow \frac{\text{준선}+\text{초점}}{2}$	중 심 (α, β) $\Rightarrow \frac{F+F'}{2}$	중 심 (α, β) ⇒ 점근선의 교점 $\Rightarrow \frac{F+F'}{2}$
초 점	$(\alpha+p,\ \beta)$	$F(\alpha+c,\ \beta)$ $F'(\alpha-c,\ \beta)$	$F(\alpha+c,\ \beta)$ $F'(\alpha-c,\ \beta)$
준 선	$x=\alpha-p$		
	초점 $-$ 준선 $= 2p$	$\lvert F-F'\rvert = 2c$	$\lvert F-F'\rvert = 2c$
접선의 방정식 (접점)	$yy_1 = 2p(x+x_1)$ ${y_1}^2 = 4px_1$	$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$ $\frac{{x_1}^2}{a^2}+\frac{{y_1}^2}{b^2}=1$	$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$ $\frac{{x_1}^2}{a^2}-\frac{{y_1}^2}{b^2}=1$
접선의 방정식 (기울기	$y=mx+\frac{p}{m}$ $y=mx-m^2p$	$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$	$y=mx\pm\sqrt{\lvert a^2m^2-b^2\rvert}$

(6) 쌍곡선의 주요 성질

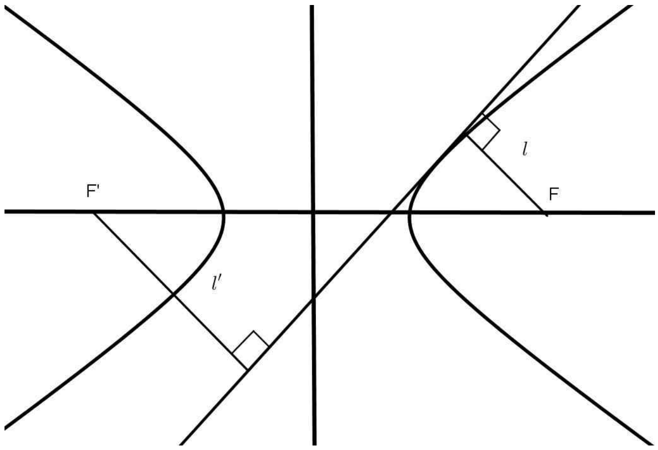
① 기본 암기 사항 (주축이 $2a$ 일때)

i) 두 초점에서 점근선에 그은 수선의 길이의곱 : b^2

ii) 두 초점에서 접선에 그은 수선의 길이의 곱 : b^2



i) ≪ $l \times l' = b^2$ ≫



ii) ≪ $l \times l' = b^2$ ≫

i)증명 : 점근선의 방정식 $y = \pm \dfrac{b}{a}x \iff bx \mp ay = 0$

$F(\sqrt{a^2+b^2},\ 0)$과의 거리 $l = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2} \times b}{\sqrt{b^2+a^2}}$

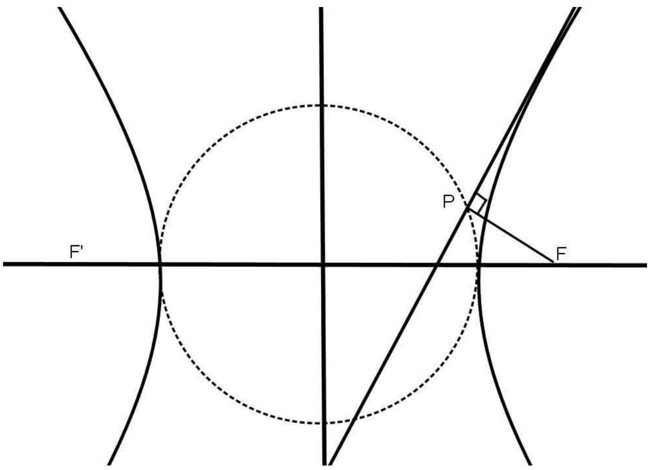
$F'(-\sqrt{a^2+b^2},\ 0)$과의 거리 $l' = \left|\dfrac{-\sqrt{a^2+b^2} \times b}{\sqrt{b^2+a^2}}\right| \quad \therefore l \times l' = b^2$

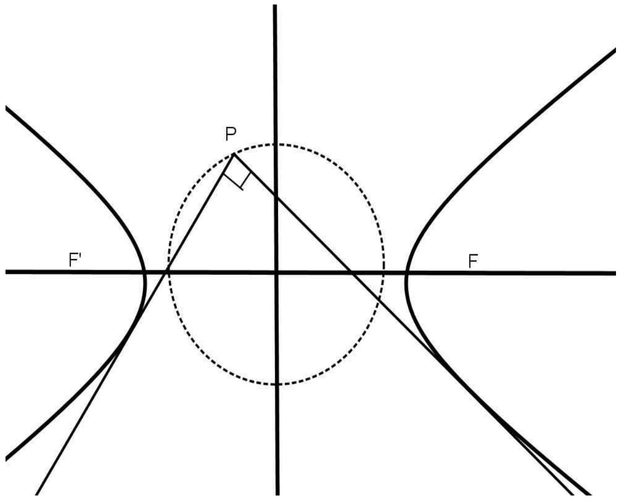
ii)증명 : 접선이 극단적으로 $x = a$ 일 때

$l = \sqrt{a^2+b^2} - a, \quad l' = a - \sqrt{a^2+b^2} \qquad \therefore\ l \times l' = b^2$

$iii)$ 한 초점에서 쌍곡선의 접선에 그은 수선의 발 P의 자취 : 원

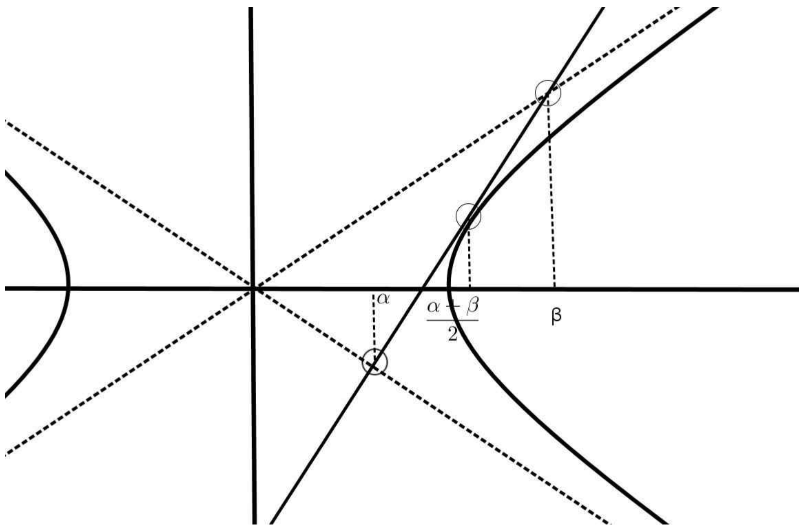
$iv)$ 수직 접선을 그은 곡선 밖의 한 점 P의 자취 : 원



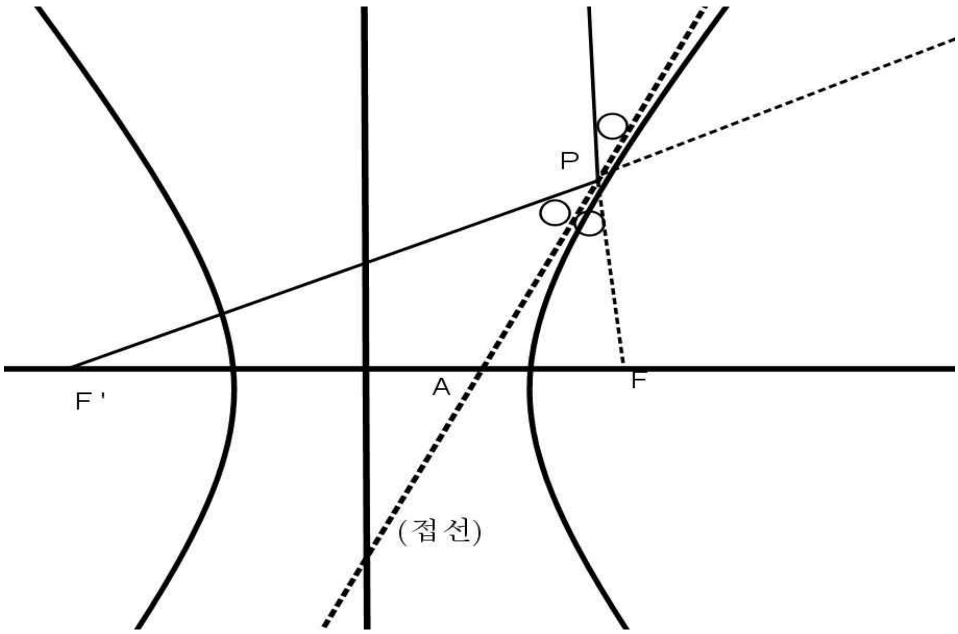


$iii)$ $\ll x^2 + y^2 = a^2 \gg$ $iv)$ $\ll x^2 + y^2 = a^2 - b^2 \gg$

$v)$ 접선과 점근선과의 교점과 접점의 x좌표 : 등차 수열 이룬다



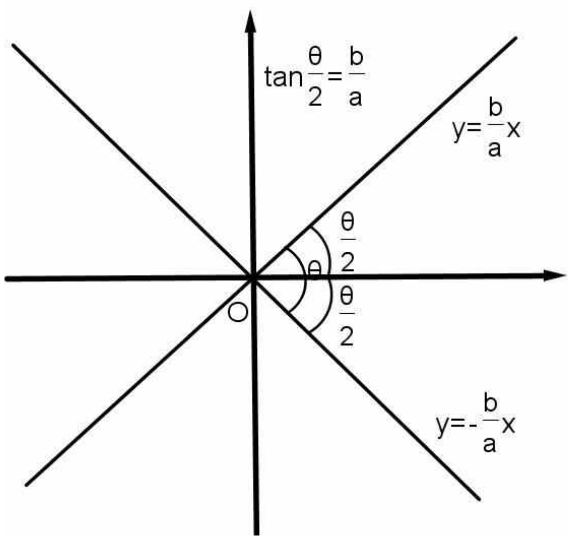
② 쌍곡선 접선의 성질 : 내각의 이등분선

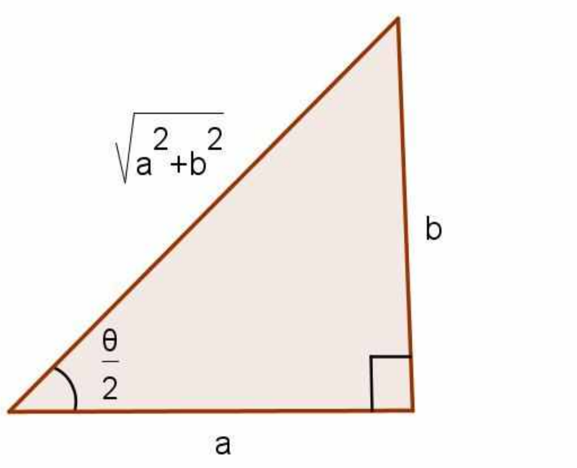


$$\ll \ \overline{PF'} : \overline{PF} = \overline{AF'} : \overline{AF} \ \gg$$

$cf.$) 타원은 법선이 내각의 이등분선 이고,
쌍곡선은 접선이 내각의이등분선이다

③ 점근선끼리 이루는 각이 θ일 때, $\sin\theta$의 값





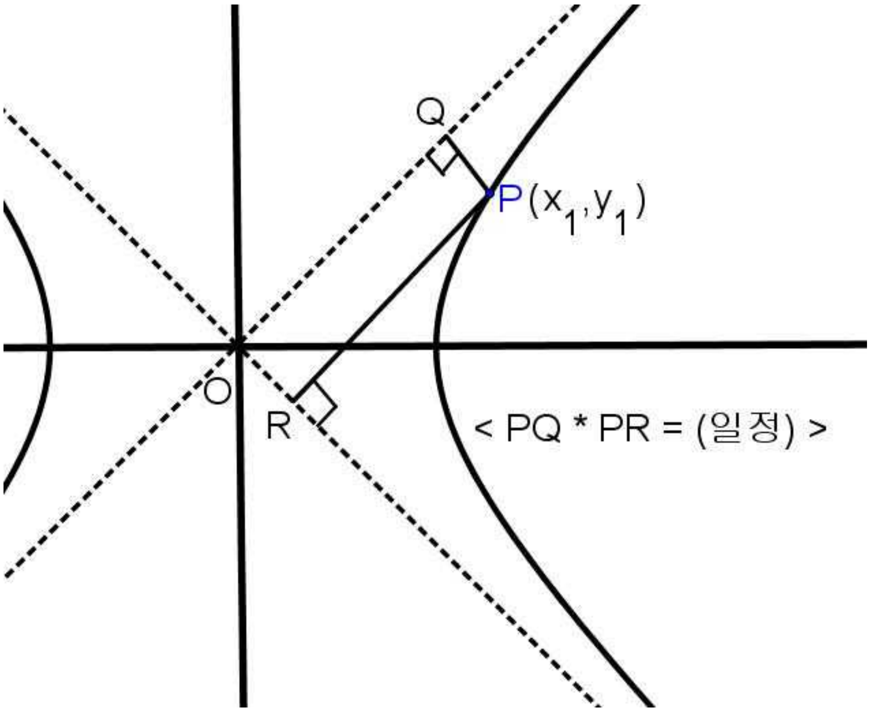
$$\Rightarrow \tan\frac{\theta}{2} = \frac{b}{a}, \quad \sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

오른쪽 그림의 직각 삼각형에서

$$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos\frac{\theta}{2} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\therefore \sin\theta = 2\times\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\times\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{2ab}{a^2+b^2}$$

④ 쌍곡선위의 임의의 한점에서 각각의 점근선에 내린 수선의발의 곱은 일정하다



$\Rightarrow$ 점근선의 방정식은 $y = \pm \dfrac{b}{a}x \;\Leftrightarrow\; bx \pm ay = 0$

이 점근선과 점 $P(x_1, y_1)$까지의 거리는 $\dfrac{|bx_1 \pm ay_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

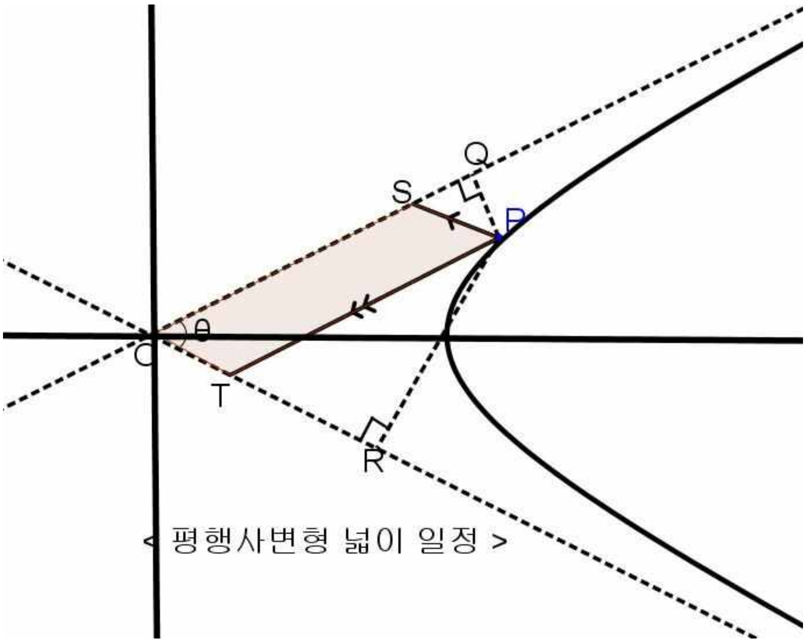
$\therefore\ \overline{PQ} \times \overline{PR} = \dfrac{|b^2x_1^2 - a^2y_1^2|}{a^2 + b^2}$ 근데, $P(x_1, y_1)$은

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점이니깐 $\dfrac{x_1^2}{a^2} - \dfrac{y_1^2}{b^2} = 1$ 이걸 만족하지

이걸 정리하면 $b^2x_1^2 - a^2y_1^2 = a^2b^2$

$\therefore\ \overline{PQ} \times \overline{PR} = \dfrac{|b^2x_1^2 - a^2y_1^2|}{a^2 + b^2} = \dfrac{a^2b^2}{a^2 + b^2}$ (일정)

⑤ 쌍곡선 위의 점에서 각각의 점근선에 평행하게 그은 직선과의 교점으로 이루어진 평행사변형의 넓이는 일정하다



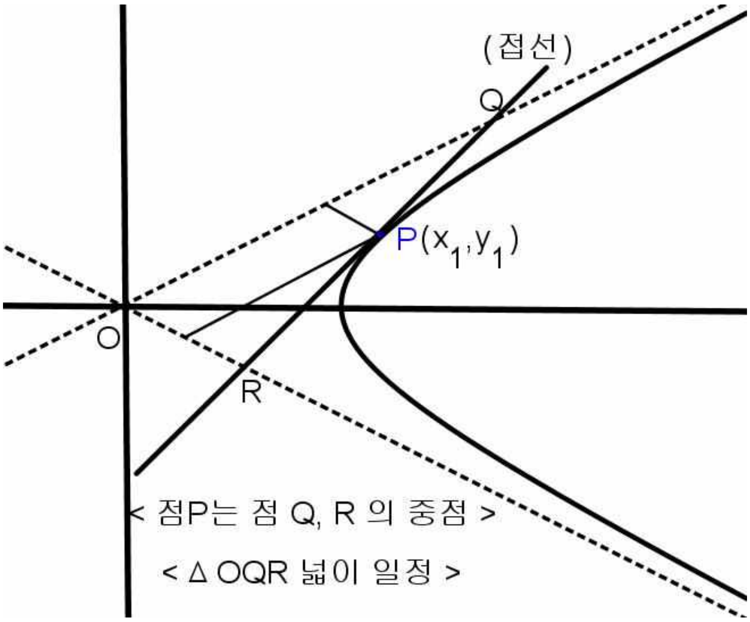
⇒ 위의 그림 직각 삼각형 PQS에서 $\overline{PS} = \dfrac{\overline{PQ}}{\sin\theta}$

또, 직각 삼각형 PTR에서 $\overline{PT} = \dfrac{\overline{PR}}{\sin\theta}$

평행사변형 $PSQT = \overline{PS} \times \overline{PT} \times \sin\theta = \dfrac{\overline{PQ}}{\sin\theta} \times \dfrac{\overline{PR}}{\sin\theta} \times \sin\theta$

$$= \frac{\overline{PQ} \times \overline{PR}}{\sin\theta} = \frac{a^2+b^2}{2ab} \times \frac{a^2b^2}{a^2+b^2} = \frac{1}{2}ab \ (\text{일정})$$

⑥ −1 쌍곡선에 그은 접선의 접점의 x좌표는 이 접선이 점근선과 만나는 교점의 중점이다



$\Rightarrow$ 접선과 점근선의 교점을 $P(\alpha, ...)$, $Q(\beta, ...)$라고 할게

$$\begin{cases} \text{접선} \ \dfrac{x_1 x}{a^2} - \dfrac{y_1 y}{b^2} = 1 \\ \text{점근선} \ y = \pm \dfrac{b}{a} x \end{cases}$$ 이것을 연립하면

$x = \dfrac{a^2 b}{b x_1 \mp a y_1}$ 근데 이 두 x값이 점 P와 Q의 x좌표니깐

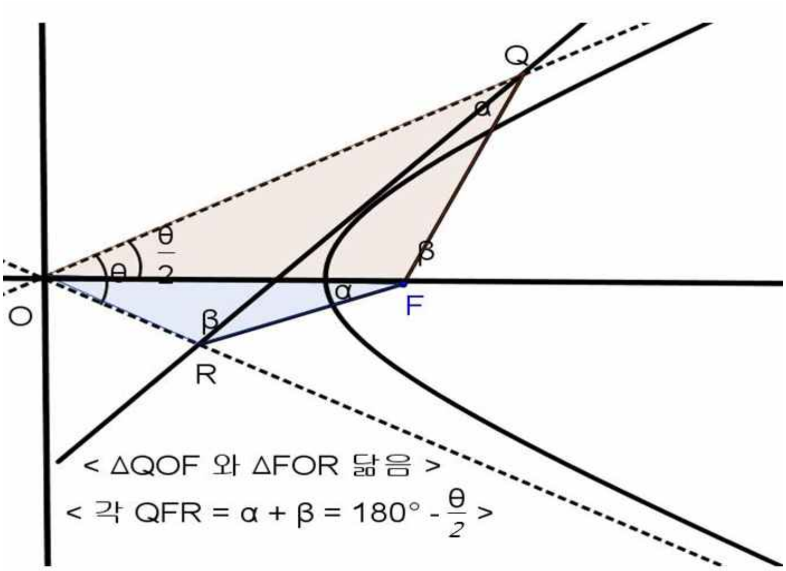
$$\alpha + \beta = a^2 b \left(\frac{1}{b x_1 + a y_1} + \frac{1}{b x_1 - a y_1} \right) = a^2 b \left(\frac{2 b x_1}{b^2 x_1^2 - a^2 y_1^2} \right) = 2 x_1$$

$$\therefore x_1 = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

또 $\triangle OQR = 2 \times$ 평행사변형넓이 $= 2 \times \dfrac{1}{2} ab = ab$ (일정)

($\because \overline{RP} = \overline{PQ}$이므로 중점 연결 정리에 의해 평행한 선은 $\overline{OR}$과 $\overline{OQ}$의 중점)

⑥ − 2 따름 정리



$\Rightarrow \triangle ORQ$ 넓이 $= ab$

$$= \frac{1}{2} \times \overline{OQ} \times \overline{OR} \times \sin\theta$$

$$= \frac{1}{2} \times \overline{OQ} \times \overline{OR} \times \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$$

정리하면 $\overline{OQ} \times \overline{OR} = a^2 + b^2 = c^2 = \overline{OF}^2$

$\Rightarrow \frac{\overline{OF}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{OR}}{\overline{OF}} \Rightarrow \triangle QOF$ 와 $\triangle FOR$ 은 닮음

$(\because \angle QOF = \angle FOR)$

$\therefore$ 그림에서처럼 $\angle QFR = \alpha + \beta = 180^\circ - \frac{\theta}{2}$