
# ⌬ 집 합 ⌬

1. 집합 $S = \{1, 2, 3, \cdots, 10\}$ 의 부분집합 $A$가 다음 조건을 만족시킬 때, 집합 $A$ 의 모든 원소의 곱을 구하시오
(단, 집합 $A$의 원소의 개수는 2개 이상이다)

| |
|---|
| (가) $A = \{x \mid x = 10 - a,\ a \in A\}$ |
| (나) 집합 $A$의 모든 원소의 곱은 100보다 큰 홀수이다 |
| (다) 집합 $A$의 모든 원소의 합은 20보다 작은 홀수이다 |

$\Rightarrow$ 우선 $A$는 $S$의 부분집합이므로 $2^{10}$개가 나올 수가 있지
(가)를 보면 $A$의 원소는 짝을 이루는거야
예를들어 3이 $A$의 원소가 되면 $10-3=7$도 $A$의 원소가 되지
여기서 (1, 9), (2, 8), • • (5, 5), • • (8, 2), (9, 1) 를 알 수가 있는데 집합에서 원소는 중복을 허용하지 안으니깐
(1, 9), (2, 8), (3, 7), (4, 6), (5) 이렇게 짝을 이룬다는 것을 알수있어

(나)에서 모든 원소의 곱이 홀수라고 했으니깐 모든 원소가 홀수가 된다는것을 알 수가 있어
왜냐하면 짝수가 하나라도 있으면 곱한것은 무조건 짝수가 되거던

그리고 (다)에서 원소의 합이 홀수가 된다 했으니깐 이 홀수 원소가 홀수가 있어야 해 만일 짝수개가 있으면 합이 짝수가 돼 ( $ex$) $1+3+5+7=16$)

즉, (나)에서 (1, 9), (3, 7), (5) 이렇게 추려낼 수 있고
(다) 때문에 (1, 9, 5), (3, 7, 5) 두 개 밖에 안나오지
이 중 원소들의 곱이 100보다 크고 합이 20보다 작은것은 (3, 7, 5) 밖에 없어

$\therefore\ A = \{3, 7, 5\}$ , 답 $3 \times 7 \times 5 = 105$

2. 자연수 전체의 집합의 두 부분집합 $A$, $B$가

$A = \{x \mid x$는 20 이하의 소수$\}$,
$B = \{x \mid x = ab - 1,\ a \in A,\ b \in B\}$ 일 때,

집합 $A \cap B$의 모든 원소의 합은?

$\Rightarrow$ 소수는 약수가 1과 자기밖에 없는 수니깐
$A = \{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17\ 19\}$ 가 돼
참고로 소수는 2를 제외하고는 모두 홀수야

여기서 $A \cap B \subset A$가 되니깐 $A \cap B$원소에는 짝수일때는 2가 되고
나머지는 무조건 홀수가 되야돼

그리고 당연히 $A \cap B \subset B$도 되니깐 $ab-1$이 홀수가 되려면
$ab$ = 짝수가 되야돼 그리고 어차피 $A \cap B$가
되려면 $ab - 1$이 20이하의 소수도 되야하니깐
이 모든 조건을 만족하려면 $A \cap B$가 될수있는 $B$의 $a$, $b$의 순서쌍은
$(a,\ b) = (2,\ 3)$ 와 $(2,\ 7)$, $(2,\ 2)$ 밖에 없어
여기서 $(2,\ 3)$ 과 $(3,\ 2)$는 $ab - 1$ 값이 같으니깐 어느 하나만 적용하면되지ㅎ

$\therefore\ A \cap B = \{2 \times 3 - 1,\ 2 \times 7 - 1,\ 2 \times 2 - 1\} = \{5,\ 13,\ 3\}$

그 담에 $A \cap B$가 짝수가 되려면 2 밖에 없어
근데 $ab - 1 = 2$ 가 되려면 $ab = 3$ 이 되야하는데
이런 순서쌍은 존재하지안아 ($A$의 원소중에 두 수를 곱해서 3이 되는 값은 없어)

$\therefore\ A \cap B = \{5,\ 13,\ 3\}$ 에서 $5 + 13 + 3 = 21$

3. 전체집합 $U = \{x \mid x$는 10이하의 자연수$\}$ 의 두 부분집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ , $B = \{2, 4, 6\}$ 에 대하여 $A \cap X = B \cup X$ 를 만족시키는 집합 $X$의 개수는?

$\Rightarrow$ 기본적으로 알아야 할게

$A \cap X \subset X \subset B \cup X$ 야  근데 웃긴게 $A \cap X = B \cup X$ 이래

이걸 $A \cap X = B \cup X = C$라 한다면

$C \subset X \subset C$ 가 성립돼 여기서 뭐가 생각나?

"집합의 상등" 이지ㅎ 즉, $X = C = A \cap X = B \cup X$가 되는거야

$A \cap X = X$에서 $X \subset A$ 가 되고
$B \cup X = X$ 에서 $B \subset X$가 되지

그래서 $B \subset X \subset A$ 가 성립돼

즉, $X$는 $A$의 부분집합중에서 $B$의 원소를 포함하는 집합이야ㅎ

$\therefore$ 집합 $X$의 개수는 $2^{7-3} = 2^4 = 16$개

4. 어느 고등학교의 학생 300명을 대상으로 설악산, 지리산, 한라산 중에서 오르고 싶은 산을 선택하는 설문조사를 한 결과 다음과 같은 사실을 알게 되었다

| |
|---|
| (가) 설악산을 선택한 학생은 120명, 지리산을 선택한 학생은 160명이다 |
| (나) 설악산과 지리산 중 어느 산도 선택하지 않은 학생은 80명이다 |
| (다) 한라산만 선택한 학생은 30명이다 |

이 때, 설악산과 지리산을 모두 선택한 학생은 $a$ 명이고, 3개의 산 중 어느 것도 선택하지 않은 학생은 $b$명이다.
$a+b$ 의 값을 구하시오

$\Rightarrow$ 원래 이런 유형의 문제를 풀려면 벤다이어 그램이 효과적이야

설악산을 선택한 학생들을 $A$, 지리산을 선택한 학생들을 $B$,
한라산을 선택한 학생들을 $C$ 라 하면,

(가)에서 $n(A) = 120,\ \ n(B) = 160$

(나)에서 $n(A^c \cap B^c) = n(A \cup B)^c = n(U) - n(A \cup B)$

$= 300 - n(A \cup B) = 80$ 에서 $n(A \cup B) = 220$

$a = n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B) = 120 + 160 - 220 = 60$

$b = n(A^c \cap B^c \cap C^c) = n(A \cup B \cup C)^c = n(U) - n(A \cup B \cup C)$

$= 300 - n(A \cup B \cup C)$ 이니깐 결국 $n(A \cup B \cup C)$ 구하는 문제가 되는거야

(다)에서 $C$만 선택한 학생의 수는
벤다이어 그램 그려보면
$n(A \cup B \cup C) - n(A \cup B)$라는
것을 알 수가 있어
$n(A \cup B \cup C) - n(A \cup B)$
$= n(A \cup B \cup C) - 220 = 30$에서
$n(A \cup B \cup C) = 250$,
$\therefore b = 300 - 250 = 50 \quad \therefore a+b = 110$