⌬ 정적분의 활용 ⌬

1. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가

$$\int_0^x f(t)dt = \frac{d}{dx}\int_0^x f(t)\,dt - e^x + 1$$

을 만족 시킬 때, < 보기 > 에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

ㄱ. $f'(x) = f(x) + e^x$
ㄴ. $\{e^{-x}f(x)\}' = 1$
ㄷ. 곡선 $y = f(x)$와 x축 및 직선 $x = 1$로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이다.

$\Rightarrow$ 실제 위 식은 $\int_0^x f(t)dt = f(x) - e^x + 1$ 야

$\int_0^x f(t)dt$ 가 엄마함수(미분하면 $f(x)$)이기 때문이지

우선 $x = 0$대입하면 $0 = f(0) - 1 + 1 = f(0)$, $\therefore f(0) = 0$

또 이 상태에서 양변을 미분하면 $f(x) = f'(x) - e^x$가 돼

$\therefore f'(x) = f(x) - e^x$ (ㄱ은 맞음)

ㄴ. $\{e^{-x}f(x)\}' = e^{-x}(f'(x) - f(x)) = e^{-x}\left(f(x) - e^{x} - f(x)\right)$

$= e^{-x} \times e^{x} = 1$ (맞음)

ㄷ. ㄴ에서 $f(x)$를 구할 수가 있는데
$\{e^{-x}f(x)\}' = 1$ 에서 양변을 적분하면

$e^{-x}f(x) = x + C$ 여기서 $x = 0$ 대입하면 $f(0) = C$ 되는데

$f(0) = 0$ 이니깐 $C = 0$

$\therefore f(x) = x e^{x}$ 가 돼

$f(x) = xe^{x}$ 은 원점을 지나는데 $f(x)$와 x축, $x = 1$ 로 둘러싸인
도형의 면적은 $f(x) = xe^{x}$ 가 $0 \le x \le 1$ 에서 항상 x축 위에 있는게
명백하니깐 그냥 0부터 1까지 정적분 하면돼

$$S = \int_{0}^{1} x e^{x} dx = [x e^{x} - e^{x}]_{0}^{1} = (e - e) - (0 - 1) = 1 \text{ (참)}$$

$cf)$ ≪ 안녕맨이 이과 부정적분에서 반드시 외우라고 하는 8정리 소개할게 ≫

① $\int \sqrt{x}\ dx = \frac{2}{3} x \sqrt{x} + C$ ② $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$

③ $\int \ln x\, dx = x \ln x - x + C$

④ $\int \ln (x+a)\, dx = (x+a) \ln (x+a) - x + C$

⑤ $\int x e^x\, dx = x e^x - e^x + C$

⑥ $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C$

⑦ $\int f(x) f'(x)\, dx = \frac{1}{2} \{f(x)\}^2 + C$

⑧ $\int \{f(x) + x f'(x)\}\, dx = x f(x) + C$

2. 곡선 $y = \sqrt{x\sin 2x}$ $\left(-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$ 와 x축으로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체 도형이 있다.

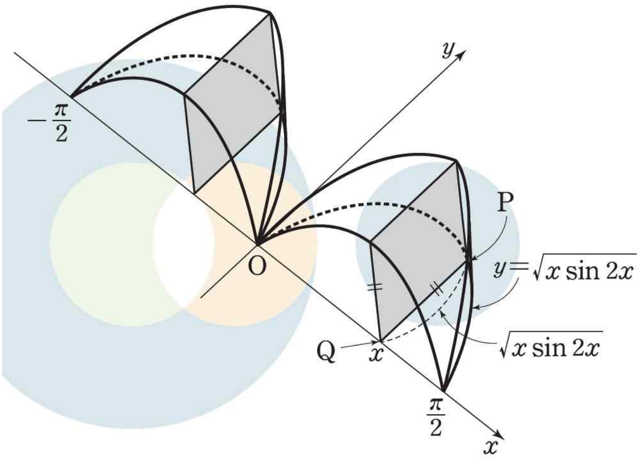
이 입체 도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 정사각형일 때,

이 입체도형의 부피는?

$\Rightarrow y = \sqrt{xsin2x}$ 는 구간의 끝점 $x = -\frac{\pi}{2}$ 와 $x = \frac{\pi}{2}$ 가 x절편이야

그래서 입체도형의 부피는 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$ (정사각형면적(단면적)dx로 하는 건데

결국 정 사각형 한변의 길이를 구하는게 핵심이지ㅎ



그림에서 한변의 길이가 $\sqrt{x\sin 2x}$ ($y = \sqrt{x\sin 2x}$ 의 함숫값) 인 것을 알 수 있어

그러므로 단면적 $S(x) = (\sqrt{x\sin 2x})^2 = x\sin 2x$

$$\therefore \text{부피} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2x\, dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2x\, dx \ (\text{우함수})$$

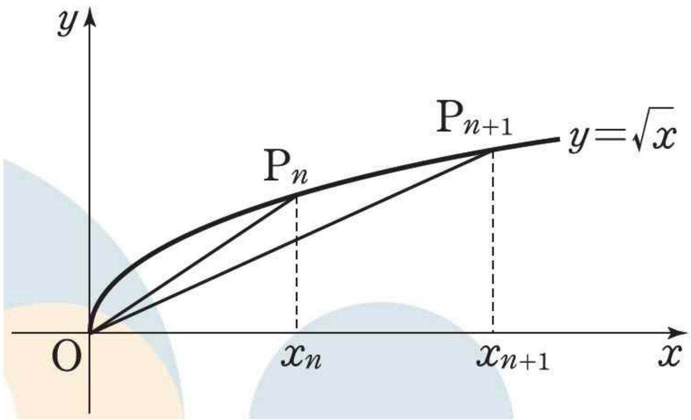
$$= 2\left[x\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) - \left(-\frac{1}{4}sin\,2x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \ (\text{부분적분 속성법}) = 2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

3. 곡선 $y = \sqrt{x}$ 위에 점 $P_n\left(x_n, \ \sqrt{x_n}\right)$ 이 다음 조건을 만족 시킨다
(단, $n = 1, 2, 3, \ \bullet \bullet \bullet$)

(가) $x_1 = 1, \quad x_2 = 4$
(나) 모든 자연수 n에 대하여 $x_n < x_{n+1}$이다.

그림과 같이 원점 O에 대하여 두 선분 OP_n, OP_{n+1} 과 곡선 $y = \sqrt{x}$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_n 이라 하면
수열 $\{S_n\}$ 은 공비가 $\frac{4}{5}$ 인 등비 수열을 이룬다.

$\lim_{n\to\infty} x_n^{\frac{3}{2}}$ 의 값을 구하시오.



$\Rightarrow$ 우선 면적 S_n을 구하는게 핵심인데

위 그림에서 $X_n(x_n, \ 0)$, $X_{n+1}(x_{n+1}, \ 0)$이라고 하면

$$S_n = (\text{직각삼각형 } OP_nX_n) + \left(\int_{x_n}^{x_{n+1}} \sqrt{x}\,dx\right) - (\text{직각삼각형 } OP_{n+1}X_{n+1})$$
이 돼 ㅎ

직각 삼각형 $OP_nX_n = \frac{1}{2}x_n\sqrt{x_n} = \frac{1}{2}x_n^{\frac{3}{2}}$이고

직각 삼각형 $OP_{n+1}X_{n+1} = \frac{1}{2}x_{n+1}\sqrt{x_{n+1}} = \frac{1}{2}x_{n+1}^{\frac{3}{2}}$ 이야

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}}\sqrt{x}\,dx = \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_{x_n}^{x_{n+1}} = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_{x_n}^{x_{n+1}} = \frac{2}{3}x_{n+1}^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}x_n^{\frac{3}{2}}$$

$$\therefore\ S_n = \left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)x_{n+1}^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)x_n^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{6}\left(x_{n+1}^{\frac{3}{2}} - x_n^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$x_{n+1}^{\frac{3}{2}} - x_n^{\frac{3}{2}} = 6S_n$$

여기서 뭐 생각나는거 없어? 계차수열의 일반항이잖아 ㅎㅎ

$x_n^{\frac{3}{2}} = a_n$으로 치환해볼게 그럼 위 식은 $a_{n+1} - a_n = 6S_n$

우선 S_n은 공비가 $\frac{4}{5}$인 등비수열이라고 했으니깐 첫째항 S_1만
구하면 일반항 구할 수 있어

$$S_1 = \frac{1}{6}\left(x_2^{\frac{3}{2}} - x_1^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{6}\left(4^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{6}(8-1) = \frac{7}{6}$$

$S_n = \frac{7}{6}\times\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$ 이야 즉 $a_{n+1} - a_n = 6S_n = 7\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$ 점화식에서 a_n
구해서 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 구하라는 문제가 된거야

a_n은 계차가 등비인 수열이니깐 $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 7\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 7\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}$ 인데

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} 7\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}\right) = 1 + \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n-1} 7\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}\right) = 1 + \frac{7}{1-\frac{4}{5}} = 36$$

cf) 계차 수열 : $a_{n+1} = a_n + f(n) \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n = f(n)$

$$\Rightarrow a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k) = a_2 + \sum_{k=2}^{n-1} f(k)$$

$$\cdots \qquad = a_p + \sum_{k=p}^{n-1} f(k)$$

$ex1$) $a_2 = 4$, $a_{n+2} = a_{n+1} + 3n \quad (n \geq 1)$ 일 때, a_n을 구하시오

$\Rightarrow n$ 대신에 $n-1$ 대입 하면 $\quad a_{n+1} = a_n + 3(n-1) \quad (n \geq 2)$

$$a_n = a_2 + \sum_{k=2}^{n-1} 3(k-1) = 4 + \sum_{k=1}^{n-1} 3(k-1) - 0 = 4 + 3 \times \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

$ex2$) $a_1 = 3$, $a_{n+1} = a_n + 3^n$ 일 때, a_n 을 구하시오

$$\Rightarrow a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 3^k = 3 + \frac{3(3^{n-1} - 1)}{3-1}$$

$cf2)$ 계비 수열 : $a_{n+1} = a_n f(n) \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = f(n)$

$$\Rightarrow \ a_n = a_1 \times (f(1) \times f(2) \times \cdot\cdot \times f(n-1)$$

$$= a_2 \times (f(2) \times f(3) \times \cdot\cdot \times f(n-1)$$

$$\cdot\cdot\cdot$$

$$= a_p \times (f(p) \times f(p+1) \times \cdot\cdot \times f(n-1)$$

$ex)$ $a_2 = 3$, $a_n = a_{n-1} \times 3^n$ $(n \geq 3)$일 때, a_n을 구하시오

$\Rightarrow n$대신에 $n+1$ 대입하면 $a_{n+1} = a_n \times 3^{n+1}$ $(n \geq 2)$

$$a_n = a_2 \times 3^3 \times 3^4 \times \cdot\cdot\cdot \times 3^n = 3 \times 3^3 \times 3^4 \times \cdot\cdot\cdot \times 3^n$$

$$= 3^{\frac{n(n+1)}{2} - 2}$$

$cf.)$ 계차가 등비 수열이랑 계비 수열이랑 헷갈리지마 !!!

$i)$ $a_{n+1} = a_n + 3^n$ (계차가 등비 수열)

$$\Rightarrow \ a_n = a_1 + \frac{3(3^{n-1} - 1)}{3-1}$$

$ii)$ $a_{n+1} = a_n \times 3^n$ (계비 수열)

$$\Rightarrow \ a_n = a_1 \times (3^1 \times 3^2 \times \cdot\cdot \times 3^{n-1})$$