안녕맨의 손으로 만든 제 8회 2017 6월 모평대비 기출 시험지

제 2 교시 수리 영역

'가'형 | 성명 | 수험 번호 3

- 자신이 선택한 유형('가'형/'나'형)의 문제지인지 확인하시오.
- 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.
- 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호와 답을 정확히 표시하시오.
- 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면, 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
- 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

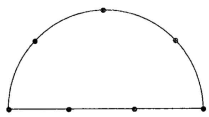
1. 지수방정식 $3^{x+2}=96$의 근을 α라 할 때, 다음 중 옳은 것은? [2점]

① $0<\alpha<1$ ② $1<\alpha<2$ ③ $2<\alpha<3$
④ $3<\alpha<4$ ⑤ $4<\alpha<5$

2. 정적분 $\int_0^3 |x-1|\,dx$의 값은? [2점]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2
④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

3. 아래 그림과 같이 반원 위에 7개의 점이 있다. 이 중 세 점을 꼭지점으로 하는 삼각형의 개수는? [2점]



① 34 ② 33 ③ 32
④ 31 ⑤ 30

4. a, x, y가 양의 실수이고

$$A=\log_a \frac{x^2}{y^3},\ B=\log_a \frac{y^2}{x^3}$$

일 때, $3A+2B$와 같은 것은? (단, $a\neq 1$)[3점]

① $\log_a \frac{1}{x^5}$ ② $\log_a \frac{1}{y^5}$ ③ $\log_a \frac{1}{xy}$
④ $\log_a \frac{x^5}{y^5}$ ⑤ $\log_a \frac{x^5}{y^7}$

5. 다항함수 $f(x)$에 대하여

$\lim_{n\to\infty} n\left\{f\left(a+\frac{b}{n}\right)-f\left(a-\frac{b}{n}\right)\right\}$의 값은? (단, $b\neq 0$)[3점]

① $\frac{1}{b}f'(a)$ ② 0 ③ $f'(a)$
④ $bf'(a)$ ⑤ $2bf'(a)$

6. 고대 이집트의 수학 문헌인 아메스 파피루스 (기원전 1650년경)에는 다음과 같은 문제가 기록되어 있다.

다섯 사람에게 120개의 빵을 나누어 주는데, 각자의 배당몫이 등차수열을 이루고, 가장 적게 배당받는 사람과 그 다음으로 적게 배당받는 사람의 몫의 합이 나머지 세 사람 몫의 합의 $\frac{1}{7}$이 되도록 하라.

위와 같이 빵을 나누어 줄 때, 가장 많이 배당받는 사람의 몫은?[3점]

① 52 ② 50 ③ 48
④ 46 ⑤ 44

7. $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{3}$일 때, $\frac{1}{\cos\theta}\left(\tan\theta+\frac{1}{\tan^2\theta}\right)$의 값은?[3점]

① $\frac{45}{16}$ ② $\frac{43}{16}$ ③ $\frac{41}{16}$
④ $\frac{39}{16}$ ⑤ $\frac{37}{16}$

8. 무한등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$이 수렴할 때, 다음 중 반드시 수렴한다고 할 수 없는 것은?[3점]

① $\sum_{n=1}^{\infty}(r^n+r^{2n})$ ② $\sum_{n=1}^{\infty}(r^n-2r^{2n})$

③ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n+(-r)^n}{2}$ ④ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r-1}{2}\right)^n$

⑤ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{2}-1\right)^n$

9. 직선 $y=3x+2$를 x축의 방향으로 k만큼 평행이동시킨 직선이 포물선 $y^2=4x$에 접할 때, k의 값은?[3점]

① $\frac{5}{9}$ ② $\frac{4}{9}$ ③ $\frac{2}{9}$

④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

10. 두 다항식 $(1+x+x^2+x^3)^3$, $(1+x+x^2+x^3+x^4)^3$의 x^3의 계수를 각각 a, b라 할 때, $a-b$의 값은?[3점]

① 4^3-5^3 ② 3^3-3^4 ③ 0

④ 1 ⑤ -1

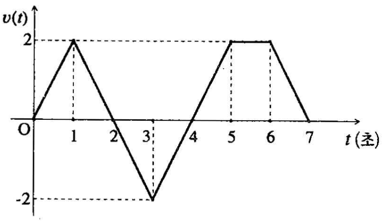
11. 좌표평면 위의 세 점 P, Q, R가 다음 두 조건 (가)와 (나)를 만족시킨다.

> (가) 두 점 P와 Q는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
> (나) $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OR}$ (단, O는 원점)

점 P가 원점을 중심으로 하는 단위원 위를 움직일 때, 점 R는 어떤 도형 위를 움직이는가? [3점]

① 점　② 타원　③ 선분　④ 쌍곡선　⑤ 평행사변형

12. 원점을 출발하여 수직선 위를 7초 동안 움직이는 점 P의 t초 후의 속도 $v(t)$가 다음 그림과 같을 때, <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면? [3점]



[보 기]

ㄱ. 점 P는 출발하고 나서 1초 동안 멈춘 적이 있었다.
ㄴ. 점 P는 움직이는 동안 방향을 4번 바꿨다.
ㄷ. 점 P는 출발하고 나서 4초 후 출발점에 있었다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

13. 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않다. 다음 <보기> 중 $x=0$에서 미분가능한 함수를 모두 고르면?[3점]

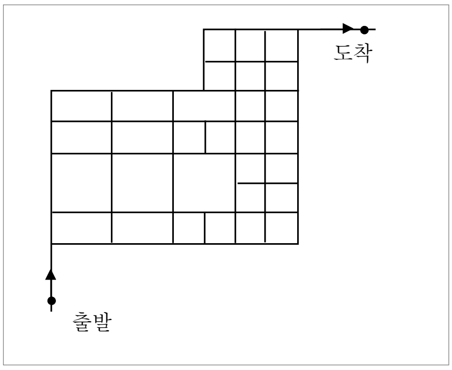
[보 기]

ㄱ. $y=xf(x)$　　ㄴ. $y=x^2f(x)$

ㄷ. $y=\dfrac{1}{1+xf(x)}$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

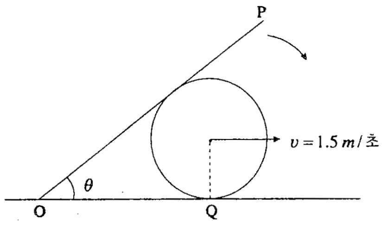
14. 아래 그림과 같은 도로망이 있다. A지점에서 자동차가 출발하여 B지점까지 최단거리로 갈 때, 우회전하는 회수를 a, 좌회전하는 회수를 b라 하자.



다음 설명 중 항상 옳은 것은?[4점]

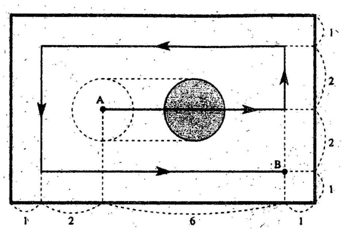
① a는 짝수이다.
② b는 홀수이다.
③ a가 짝수이면 b는 짝수이다.
④ a가 짝수이면 b는 홀수이다.
⑤ a가 홀수이면 b는 홀수이다.

15. 반지름의 길이 1m인 원판에 기대어 있는 막대 $\overline{OP}$의 한 끝은 아래 그림과 같이 평평한 지면 위의 한 점 O에 고정되어 있다. 원판이 지면과 접하는 점을 Q라 하자. 원판의 중심이 오른쪽으로 지면과 평행하게 등속도 1.5m/초로 움직인다. $\overline{OQ}=2$m되는 순간, 막대 $\overline{OP}$가 지면과 이루는 각의 크기 θ의 시간에 대한 순간변화율은? (단, 단위는 라디안/초이다) [4점]



① $-\frac{3}{5}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ $-\frac{3}{10}$
④ $-\frac{\sqrt{5}}{6}$ ⑤ $-\frac{3}{2\sqrt{5}}$

16. 가로의 길이가 10, 세로의 길이가 6인 아래 그림과 같은 직사각형의 내부에서 반지름의 길이가 1인 원이 지나간 자리에는 형광 페인트가 칠해진다고 한다. 원의 중심이 그림과 같이 A부터 B까지 화살표 방향의 경로를 따라 움직일 때, 직사각형의 영역 중 형광 페인트가 칠해지지 않는 부분의 넓이는?
(단, 경로를 구성하는 모든 선분은 직사각형의 변에 평행하거나 수직이다.) [4점]



① 0 ② $10-\frac{5}{2}\pi$ ③ $8-2\pi$
④ $6-\frac{3}{2}\pi$ ⑤ $4-\pi$

17. 모든 자연수 n에 대하여, 다항식 $f_n(x)$는 다음 두 성질 (가)와 (나)를 갖는다.

(가) $f_1(x) = x^2$
(나) $f_{n+1}(x) = f_n(x) + f_n{}'(x)$

$f_{25}(x)$의 상수항은? [4점]

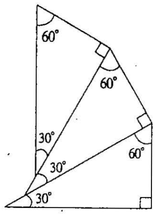
① 548 ② 550 ③ 552
④ 554 ⑤ 556

18. 대학수학능력시험 수리·탐구 영역(Ⅰ)의 문항수는 30개이고 배점은 40점이다. 문항별 배점은 1점, 1.5점, 2점의 세 종류이다. 각 배점 종류별 문항이 적어도 한 문항씩 포함되도록 하려면 1점짜리 문항은 최소 몇 문항이어야 하는가?

[4점]

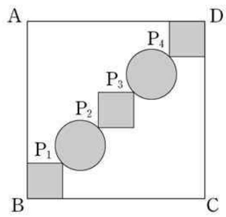
① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

19. 세 내각이 30°, 60°, 90°이고 서로 합동인 삼각형들이 있다. 평면 위에 오른쪽 그림과 같이 이들 삼각형을 내각이 직각인 꼭지점과 60°인 꼭지점이 일치되고 겹치지 않도록 빗변에 붙여 간다. 어느 삼각형도 서로 겹쳐지지 않을 때까지 되도록 많이 붙이려고 한다. 가장 많이 붙였을 때 이들 삼각형의 수는? [4점]

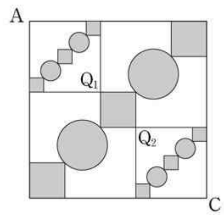


① 6　② 8　③ 10　④ 12　⑤ 14

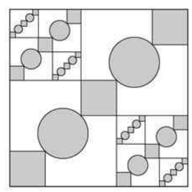
20. 그림과 같이 한 변의 길이가 5인 정사각형 ABCD의 대각선 BD의 5등분점을 점 B에서 가까운 순서대로 각각 P_1, P_2, P_3, P_4라 하고, 선분 BP_1, P_2P_3, P_4D를 각각 대각선으로 하는 정사각형과 선분 P_1P_2, P_3P_4를 각각 지름으로 하는 원을 그린 후, 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 선분 P_2P_3을 대각선으로 하는 정사각형의 꼭짓점 중 점 A와 가장 가까운 점을 Q_1, 점 C와 가장 가까운 점을 Q_2라 하자. 선분 AQ_1을 대각선으로 하는 정사각형과 선분 CQ_2를 대각선으로 하는 정사각형을 그리고, 새로 그려진 2개의 정사각형 안에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 모양의 도형을 각각 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
그림 R_2에서 선분 AQ_1을 대각선으로 하는 정사각형과 선분 CQ_2를 대각선으로 하는 정사각형에 그림 R_1에서 그림 R_2를 얻는 것과 같은 방법으로 모양의 도형을 각각 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



R_1



R_2


R_3

…

① $\frac{24}{17}(\pi+3)$　② $\frac{25}{17}(\pi+3)$　③ $\frac{26}{17}(\pi+3)$
④ $\frac{24}{17}(2\pi+1)$　⑤ $\frac{25}{17}(2\pi+1)$

21. $0<t<41$인 실수 t에 대하여 곡선 $y=x^3+2x^2-15x+5$와 직선 $y=t$가 만나는 세 점 중에서 x좌표가 가장 큰 점의 좌표를 $(f(t),\,t)$, x좌표가 가장 작은 점의 좌표를 $(g(t),\,t)$라 하자. $h(t)=t\times\{f(t)-g(t)\}$라 할 때, $h'(5)$의 값은?[4점]

① $\frac{79}{12}$　② $\frac{85}{12}$　③ $\frac{91}{12}$

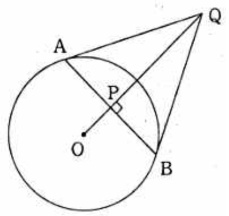
④ $\frac{97}{12}$　⑤ $\frac{103}{12}$

단답형

22. 다항함수 $f(x)$가 $\int_2^x f(t)\,dt=x^2+ax+2$를 만족시킬 때, $f(10)$의 값을 구하시오.[3점]

23. 1에서 10까지의 자연수 중에서 서로 다른 두 수를 임의로 선택할 때, 선택된 두 수의 곱이 짝수가 되는 경우의 수를 구하시오.[3점]

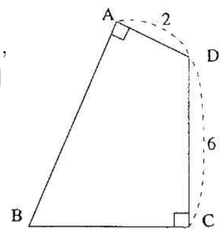
24. 반지름의 길이가 10인 원 O의 내부에 한 점 P가 있다. 점 P를 지나고 직선 OP에 수직인 직선이 원과 만나는 두 점을 A, B에서의 두 접선의 교점을 Q라 하자. $\overline{OP}=5$일 때, 선분 PQ의 길이를 구하시오. [3점]



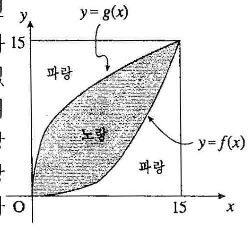
25. 다음 방정식의 모든 해의 곱을 구하시오.

$(\log_2 x)^3 + \log_2 x^3 = 4(\log_2 x)^2 + \log_2 x$[3점]

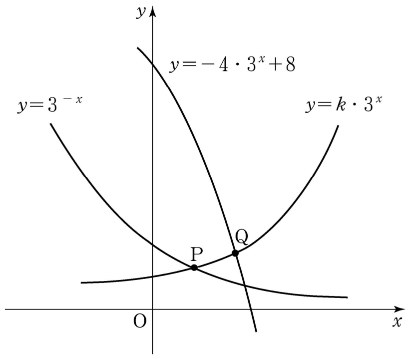
26. 오른쪽 그림에서 □ABCD의 각 변의 길이는 정수이고 $\overline{AD}=2$, $\overline{CD}=6$, $\angle A = \angle C = 90°$이다. 이 사각형 둘레의 최대 길이를 구하라. [4점]



27. 정사각형 모양의 타일이 좌표평면에 오른쪽 그림과 같이 가로, 세로가 각각 x축, y축과 일치되게 놓여 있다. 이 타일에 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프를 경계로 하여 파랑색과 노랑색을 칠하려고 한다. 파랑색과 노랑색이 칠해지는 부분의 넓이의 비가 2 : 3일 때, $\int_0^{15} f(x)\,dx$의 값을 구하여라. (단, 함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이다.) [4점]

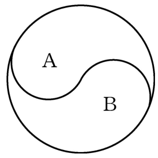


28. 함수 $y=k\cdot 3^x$ $(0<k<1)$의 그래프가 두 함수 $y=3^{-x}$, $y=-4\cdot 3^x+8$의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 점 P와 점 Q의 x좌표의 비가 1 : 2 일 때, $35k$의 값을 구하시오. [4점]



29. 다항식 $2(x+a)^n$의 전개식에서 x^{n-1}의 계수와 다항식 $(x-1)(x+a)^n$의 전개식에서 x^{n-1}의 계수가 같게 되는 모든 순서쌍 $(a,\ n)$에 대하여 an의 최대값을 구하시오.
(단, a는 자연수이고, n은 $n \geq 2$인 자연수이다.)[4점]

30. 각 면에 1, 1, 1, 2의 숫자가 하나씩 적혀 있는 정사면체 모양의 상자가 있다. 이 상자를 던져서 밑면에 적힌 숫자가 1이면 오른쪽 그림의 영역 A에, 숫자가 2이면 영역 B에색을 칠하기로 하였다. 두 영역에 색이 모두 칠해질 때까지 이 상자를 계속 던질 때, 3번째에 마칠 확률을 $\frac{q}{p}$라 하자. $p+q$의 값을 구하시오.(단, p, q는 서로소인 자연수이다.)
[4점]



수리 영역(가 형)

8회수학 가형 정답

1	③	2	④	3	④	4	②	5	⑤
6	④	7	④	8	⑤	9	①	10	③
11	③	12	②	13	⑤	14	④	15	①
16	③	17	⑤	18	④	19	④	20	②
21	④	22	17	23	35	24	15	25	16
26	24	27	45	28	20	29	12	30	19

해 설

1. 정답 ③

$3^{x+2}=96$이고 $3^4=81,\ 3^5=243$

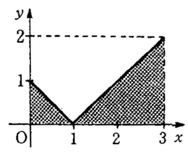
$81<96<243$이므로 $3^4<3^{\alpha+2}<3^5 \Rightarrow 4<\alpha+2<5$

$\therefore\ 2<\alpha<3$

2. 정답 ④

$\int_0^3|x-1|dx=\int_0^1(1-x)dx+\int_1^3(x-1)dx$

$=\left[x-\frac{x^2}{2}\right]_0^1+\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^3=\frac{5}{2}$



3. 정답 ④

${}_7C_3-{}_4C_3=\frac{7\times6\times5}{3!}-\frac{4\times3\times2}{3!}=35-4=31$

4. 정답 ②

$3A=\log_a\left(\frac{x^2}{y^3}\right)^3=\log_a\frac{x^6}{y^9}$

$2B=\log_a\left(\frac{y^2}{x^3}\right)^2=\log_a\frac{y^4}{x^6}$

$\therefore\ 3A+2B=\log_a\left(\frac{x^6}{y^9}\cdot\frac{y^4}{x^6}\right)=\log_a\frac{1}{y^5}$

5. 정답 ⑤

$\lim_{n\to\infty}\left\{f\left(a+\frac{b}{n}\right)-f\left(a-\frac{b}{n}\right)\right\}$

$\frac{b}{n}=h$ 라고 하면 $n\to\infty$ 일 때, $h\to0$ 이다.

준식$=\lim_{h\to0}\frac{b}{h}\{f(a+h)-f(a-h)\}$

$=\lim_{h\to0}\frac{b}{h}\{f(a+h)-f(a)+f(a)-f(a-h)\}$

$=\lim_{h\to0}b\left\{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-\frac{f(a-h)-f(a)}{h}\right\}$

$=b\{f'(a)+f'(a)\}=2bf'(a)$

6.정답 ④

다섯 사람의 몫을 각각

$a-2d,\ a-d,\ a,\ a+d,\ a+2d$라

고 하면

$120=(a-2d)+(a-d)+a+(a+d)+(a+2d)=5a$

$\therefore a=24$

$(a-2d)+(a-d)=\frac{1}{7}\{a+(a+d)+(a+2d)\}$

$2a-3d=\frac{1}{7}(3a+3d)$

$14a-21d=3a+3d$

$11a=24d$

$a=24$이므로 $d=11$

$\therefore a+2d=24+2\cdot11=46$

7. 정답 ④

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{3}$에서 양변을 제곱하면,

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{9}$

$\Rightarrow 1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{9} \Rightarrow \sin\theta\cos\theta=-\frac{4}{9}$

$\frac{1}{\cos\theta}\left(\tan\theta+\frac{1}{\tan^2\theta}\right)=\frac{1}{\cos\theta}\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right)$

$=\left(\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\right)=\left(\frac{\sin^3\theta+\cos^3\theta}{\cos^2\theta\sin^2\theta}\right)$

$=\frac{(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$

$=\frac{\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{4}{9}\right)\right\}}{\left(-\frac{4}{9}\right)^2}=\frac{39}{16}$

8.정답 ⑤

$\sum_{n=1}^{\infty}r^n$이 수렴하므로, $|r|<1$ …… ㈎

따라서, $|r^2|<1,\ |-r|<1$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}r^n,\ \sum_{n=1}^{\infty}r^{2n},\ \sum_{n=1}^{\infty}(-r)^n$은 모두 수렴한다.

즉, ①, ②, ③은 수렴한다.

④ : ㈎에서 $-1<r<1 \Rightarrow -2<r-1<0$

$\Rightarrow -1<\frac{r-1}{2}<0$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r-1}{2}\right)^n$ 은 수렴한다.

⑤ : $-\frac{1}{2}<\frac{r}{2}<\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{3}{2}<\frac{r}{2}-1<-\frac{1}{2}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{2}-1\right)^n$ 은 수렴하지 않는다.

9. 정답 ①

$y^2=4x$ 에 접하고 기울기가 3인 접선의 방정식을

$y=3x+a$ 라 하고, $x=\frac{y^2}{4}$을 대입하면

$y=3\cdot\frac{y^2}{4}+a \Rightarrow 3y^2-4y+4a=0$에서

$\frac{D}{4}=4-12a=0\ \ \therefore\ a=\frac{1}{3}$

즉, 접선의 방정식은 $y=3x+\frac{1}{3}$ …… ①

$y=3x+2$를 x 축의 방향으로 k 만큼 평행 이동시키면,

$y=3(x-k)+2=3x-3k+2$ …… ②

①, ②에서 $-3k+2=\frac{1}{3}$

$\therefore\ k=\frac{5}{9}$

10. 정답 ③

$(1+x+x^2+x^3)^3=\{(1+x+x^2+x^3)+x^4\}^3$

$=(1+x+x^2+x^3)^3+[3(1+x+x^2+x^3)^2x^4$

$\quad +3(1+x+x^2+x^3)x^8+x^{12}]$ 이므로

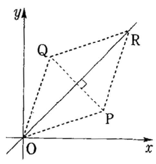
[ ]부분에서 x^3 의 항은 나올 수 없다.

즉, $(1+x+x^2+x^3)^3$ 의 x^3 의 계수와

$(1+x+x^2+x^3+x^4)^3$ 의 x^3 의 계수는 같다.

$\therefore\ a-b=0$

11. 정답 ③



$|\overrightarrow{OP}|=1$이므로

$\overrightarrow{OP}=(\cos\theta,\ \sin\theta)$라 놓으면

$\overrightarrow{OQ}=(\sin\theta,\ \cos\theta)$

$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$

$\quad=(\cos\theta+\sin\theta,\ \cos\theta+\sin\theta)$

$\overrightarrow{OR}=(x,\ y)$로 놓으면 $x=y$ 이고,

$x=\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$

$|x|\le\sqrt{2}$

즉, 자취는 선분이다.

12. 정답 ②

$v(t)=0$인 t 의 값은 $t=2,\ 4$이고 이 시각에

$v(t)$의 부호가 바뀌었으므로 운동방향이 바뀐 것이다.

또, $\int_0^t v(t)\,dt=0$이므로 $t=4$인 순간의 동점 P 의 위치는 원점이다.

13. 정답 ⑤

$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$이지만 $f'(0)$이 존재하지 않는다.

Ⅰ. $y'=\lim_{h\to 0}\frac{hf(h)}{h}=\lim_{h\to 0}f(h)=f(0)$

Ⅱ. $y'=\lim_{h\to 0}\frac{h^2f(h)}{h}=\lim_{h\to 0}hf(h)$

Ⅲ.

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{1+hf(h)}-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-hf(h)}{h(1+hf(h))}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-f(h)}{1+hf(h)}=-f(0)$$

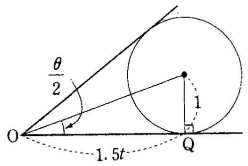
14. 정답 ④

첫 번째와 마지막 번째에는 반드시 우회전을 해야 되므로 (우, 좌, 우), (우, 좌, 우, 좌, 우), … 등과 같이 우회전 횟수와 좌회전 횟수의 합은 홀수이다.

즉, $a+b=$홀수

$\therefore$ a가 짝수이면 b 는 홀수, a 가 홀수이면 b 는 짝수

15. 정답 ①



t초 후의 선분 OQ의 길이는 $1.5t$이므로

$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{1}{1.5t}=\frac{2}{3t}$

$$\therefore\ \tan\theta=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}=\frac{\frac{4}{3t}}{1-\frac{4}{9t^2}}=\frac{12t}{9t^2-4}$$

양변을 t에 관하여 미분하면

$$\sec^2\theta\cdot\frac{d\theta}{dt}=\frac{12(9t^2-4)-12t\times 18t}{(9t^2-4)^2}$$

$$\therefore\ \frac{d\theta}{dt}=\frac{-12(9t^2+4)}{(9t^2-4)^2}\cdot\cos^2\theta$$

그런데 $\overline{OQ}=2$이면 $1.5t=2$에서 $t=\frac{4}{3}$

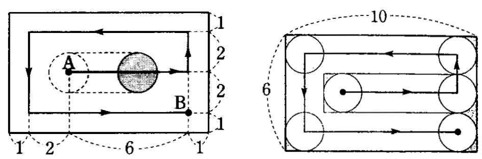
이 때 $\tan\theta=\frac{4}{3}$, $\cos\theta=\frac{3}{5}$이므로

$$\left[\frac{d\theta}{dt}\right]_{t=\frac{4}{3}}=\frac{-12\left\{9\times\left(\frac{4}{3}\right)^2+4\right\}}{\left\{9\times\left(\frac{4}{3}\right)^2-4\right\}}\times\left(\frac{3}{5}\right)^2=-\frac{3}{5}$$

16. 정답 ③

반지름의 길이가 1인 원이 화살표 방향을 따라 이동할 때 지나지 않는 부분은 오른쪽 아래 그림에서 어두운 부분이다. 따라서, 그 넓이는 한 변의 길이가 2인 정사각형에서 반지름의 길이가 1인 원을 제외한 부분의 넓이의 2배와 같다.

$\therefore\ 2(4-\pi)$



17. 정답 ⑤

$f_1(x)=x^2$에서 $f'_1(x)=2x$

$f_{n+1}(x)=f_n(x)+f'_n(x)$ 에서

$f_2(x)=f_1(x)+f'_1(x)=x^2+2x$

즉, $f_n(x)$는 x^2 인 계수가 1인 2차식이므로

$f_n(x)=x^2+a_nx+b_n$ 으로 놓을 수 있다.

$f_{n+1}(x)=x^2+a_{n+1}x+b_{n+1}$ 로 놓으면

$f_{n+1}(x)-f_n(x)=f'_n(x)$에서

$x^2+a_{n+1}x+b_{n+1}-(x^2+a_nx+b_n)=2x+a_n$

$(a_{n+1}-a_n)x+b_{n+1}-b_n=2x+a_n$

$\therefore\ a_{n+1}-a_n=2,\ b_{n+1}-b_n=a_n$

$a_{n+1}-a_n=2$에서 $a_n=a_1+2(n-1)$

$a_1=0$이므로 $a_n=2(n-1)$

$b_{n+1}-b_n=2(n-1)$에서 $b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}2(k-1)$

$\therefore\ b_{25}=b_1+\sum_{k=1}^{24}2(k-1)=0+2\left(\frac{24\cdot25}{2}\right)-2\cdot24=552$

18. 정답 ④

1점짜리 문항을 x개, 1.5점짜리 문항을 y개,
2점짜리 문항을 z개라고 하면

$x+1.5y+2z=40$ …… ㉠

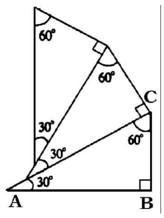
$x+y+z=30$ $(x\geq1,\ y\geq1,\ z\geq1)$ …… ㉡

㉠×2−㉡×3하면 $-x+z=-10$

$\therefore\ x=z+10$

$z\geq1$이므로 $x=z+10\geq11$

이 때 $y=18$이고 주어진 조건을 만족하므로
x의 최소값은 11



19. 정답 ④

오른쪽 그림에서 붙여 나가는 직각삼각형의 빗변이 선분 AB와 이루는 각의 크기가 차례로 30°, $30^\circ\times2$, $30^\circ\times3$, …이 되므로, 직각삼각형을 n개 붙였을 때 n번째의 빗변과 선분 AB가 이루는 각의 크기는

$30^\circ\times n\leq360^\circ$

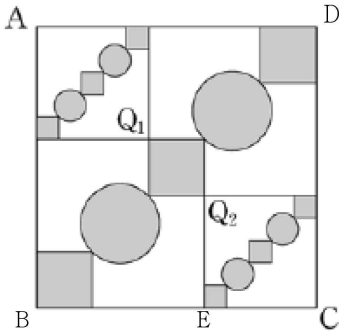
$\therefore\ n\leq12$

따라서 12개까지 붙일 수 있다.

20. [정답] ②

[풀이]

[출제의도] 무한등비급수를 이용하여 반복되는 도형에서 넓이의 합에 대한 극한값을 구할 수 있는가?



$\overline{\mathrm{BE}}$: $\overline{\mathrm{EC}}=3$: 2이므로 닮음비는 $\frac{2}{5}$이다.

따라서 넓이의 비는 $\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{4}{25}$이고 도형의 개수는 2배씩 늘어나므로 무한등비급수의 공비는

$\frac{4}{25}\times2=\frac{8}{25}$

또한, 그림 R_1에서 $\overline{\mathrm{BD}}=5\sqrt{2}$이므로

$S_1=3\times1+2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\pi$

$=3+\pi$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{3+\pi}{1-\frac{8}{25}}$

$=\frac{25}{17}(\pi+3)$

21. [정답] ④

[풀이]

[출제의도] 역함수의 미분법을 활용할 수 있는가?

$h(t)=t\times\{f(t)-g(t)\}$이므로

$h'(t)=\{f(t)-g(t)\}+t\times\{f'(t)-g'(t)\}$

그러므로

$h'(5)=\{f(5)-g(5)\}+5\{f'(5)-g'(5)\}$ …… ㉠

한편, $y=x^3+2x^2-15x+5$와 직선 $y=5$가 만나는 점의 x좌표는

$x^3+2x^2-15x+5=5$

$x(x^2+2x-15)=0$

$x(x+5)(x-3)=0$

$\therefore\ x=-5$ 또는 $x=0$ 또는 $x=3$

그러므로

$f(5)=3,\ g(5)=-5$ …… ㉡

한편, $y'=3x^2+4x-15$에서

$f'(5)=\frac{1}{3\cdot3^2+4\cdot3-15}=\frac{1}{24}$

$g'(5)=\frac{1}{3\cdot(-5)^2+4\cdot(-5)-15}=\frac{1}{40}$ …… ㉢

㉡과 ㉢을 ㉠에 대입하면

$h'(5)=\{3-(-5)\}+5\left(\frac{1}{24}-\frac{1}{40}\right)$

$=8+\frac{1}{12}$

$=\frac{97}{12}$

22. **정답** 17

$\int_2^x f(t)dt = x^2+ax+2$에 $x=2$를 대입하면

$0=4+2a+2$이므로 $a=-3$

$\int_2^x f(t)dt = x^2-3x+2$에서 양변을 x에 관하여

미분하면 $f(x)=2x-3$이므로

$f(10)=20-3=17$

23. **정답** 35

1부터 10까지 10개의 자연수 중에서

서로 다른 두 수 를 택하는 방법은

$_{10}C_2 = \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} = 45$ ⋯ ①

이 때, 두 수의 곱이 홀수인 경우는

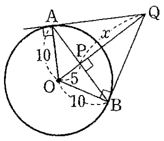
(홀수)×(홀수) ⇒ 홀수이므로

$_5C_2 = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$ ⋯ ②

따라서 구하는 경우의 수는

①과 ②에서 $45-10=35$

24.**정답** 15



그림에서 $\angle AOP = \angle QAP$

이고 $\angle OAP = \angle AQP$이므로

$\triangle OAP$와 $\triangle AQP$는 닮은꼴

이다.

따라서 $\overline{PQ}$의 길이를 x라 하면

$\overline{AP} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{OP}^2} = \sqrt{10^2-5^2} = 5\sqrt{3}$이므로

$\overline{OP} : \overline{PA} = \overline{PA} : \overline{PQ}$에서 $5 : 5\sqrt{3} = 5\sqrt{3} : x$

$\therefore x=15$

25.**정답** 16

$(\log_2 x)^3 + 3\log_2 x = 4(\log_2 x)^2 + \log_2 x$

$\log_2 x = t$로 치환하면 $t^3+3t = 4t^2+t$

$t^3-4t^2+2t=0,\ t(t^2-4t+2)=0$

$\therefore t=0,\ t^2-4t+2=0$

(ⅰ) $t=0$일 경우

$\log_2 x = 0 \quad \therefore x=1$

(ⅱ) $t^2-4t+2=0$일 경우

$(\log_2 x)^2 - 4\log_2 x + 2 = 0$

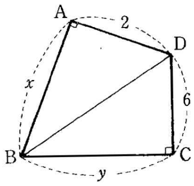
위 식을 만족하는 x의 값을 α, β라 하면

$\log_2\alpha + \log_2\beta = 4$ $\log_2\alpha\beta = 4$

$\therefore \alpha\beta = 2^4 = 16$

(i), (ii)에서 구하는 해의 곱은 $1\times16=16$

26. **정답** 24



위의 그림에서

$\overline{BD}^2 = y^2+4 = x^2+36,\ y^2-x^2=32$

$(y+x)(y-x) = 16\times2 = 8\times4 = 32\times1$

$\begin{cases} y+x=16 \\ y-x=2 \end{cases}$ 에서 $(x,\ y)=(7,\ 9)$

$\begin{cases} y+x=8 \\ y-x=4 \end{cases}$ 에서 $(x,\ y)=(2,\ 6)$

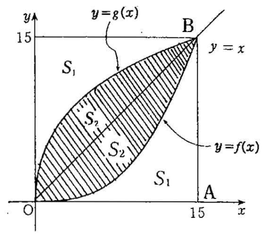
$\begin{cases} y+x=32 \\ y-x=1 \end{cases}$ 에서 모순

$x+y \le 16$

따라서, (둘레의 길이)≤ 24

즉, 최대 길이는 24이다.

27. 정답 45



함수 $y=g(x)$가 함수 $y=f(x)$의 역함수이므로

영역은 위의 그림과 같이 분할되고

$\int_0^{15} f(x)dx = S_1$이다.

주어진 조건에서 $2S_1 : 2S_2 = 2 : 3$이므로

$S_1 : S_2 = 2 : 3$이다.

그러므로 S_1은 $\triangle$OAB의 넓이의 $\frac{2}{5}$이다.

(사각형 OABC 넓이의 $\frac{1}{5}$이다.)

$\therefore S_1 = 15\times15\times\frac{1}{5} = 45$

28. 답 20

$y=k\cdot3^x$

$P\cdot Q$의 x좌표를 각각 α, 2α라 놓으면

$3^{-\alpha} = k\cdot3^{\alpha}$ ⋯⋯ ㉠

$-4\cdot3^{2\alpha}+8 = k\cdot3^{2\alpha}$ ⋯⋯ ㉡

㉠에서 $k=3^{-2\alpha}$

㉡에 대입하면

$-4\cdot3^{2\alpha}+8 = 3^{-2\alpha}\cdot3^{2\alpha} = 1$

$\therefore 3^{2\alpha} = \frac{7}{4}$

$\therefore\ k=\frac{4}{7}$

$\therefore\ 35k=20$

29. 답 12

$2(x+a)^n$의 전개식에서 x^{n-1}의 계수는

$2\,{}_nC_1a^1=2an$

$(x-1)(x+a)^n=x(x+a)^n-(x+a)^n$의 전개식에서 x^{n-1}의 계수는

${}_nC_2a^2-an=\frac{n(n-1)}{2}a^2-an$

이 때, $2an=\frac{n(n-1)}{2}a^2-an$

즉, $3an=\frac{n(n-1)}{2}a^2$이어야 하므로 $3=\frac{n-1}{2}a$

$\therefore\ a(n-1)=6$

㉠을 만족하는 모든 경우는 다음과 같다.

a	$n-1$	n	an
1	6	7	7
2	3	4	8
3	2	3	9
6	1	2	12

따라서 구하는 an의 최대값은 12이다.

30. 답 19

A영역에 색을 칠하게 될 확률은 $\frac{3}{4}$,

B영역에 색을 칠하게 될 확률은 $\frac{1}{4}$이다.

이 때, 3번째 시행에서 마치는 경우는

A, A, B의 순서로 칠하거나,

B, B, A의 순서로 칠하게 되는 경우이다.

이 때, 위의 각 경우의 확률은 각각

$\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{9}{64}$, $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{64}$이므로

구하는 확률은 $\frac{9}{64}+\frac{3}{64}=\frac{12}{64}=\frac{3}{16}$

$\therefore\ p+q=16+3=19$