#1. 공식 적분법 - 암기

1. x^{α} 적분법

1-1) $\alpha = -1$일 때,	1-2) $\alpha \neq -1$일 때
① $\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + C$	① $\int x^{\alpha}dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C$
② $\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert + C$	② $\int (ax+b)^{\alpha}dx = \frac{1}{a}\times\frac{1}{\alpha+1}(ax+b)^{\alpha+1}+C$

참고 일차함수가 합성된 경우 원리는 치환적분이지만 공식처럼 사용한다.

$\Rightarrow$ $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$

2) 분수 꼴 1 : 몫과 나머지로 식 변형

$\frac{B}{A}$ (A의 차수 $\leq$ B의 차수)이면 $\frac{B}{A} = \frac{AQ+R}{A} = Q+\frac{R}{A}$

3) 분수 꼴 2 : 항등식의 원리 (헤비사이드의 은닉법)

① $\frac{ax+b}{(x+1)(2x+1)}$	$\Rightarrow$ $\frac{ax+b}{(x+1)(2x+1)} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{2x+1}$
② $\frac{ax^2+bx+c}{(x+1)(x^2+x+2)}$ (이차식 허근 구조)	$\Rightarrow$ $\frac{ax^2+bx+c}{(x+1)(x^2+x+2)} = \frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+2}$
③ $\frac{ax^2+bx+c}{(x+1)(x+2)^2}$ (이차식 중근 구조)	$\Rightarrow$ $\frac{ax^2+bx+c}{(x+1)(x+2)^2} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+2)}+\frac{C}{(x+2)^2}$

2. 지수 · 로그함수의 적분법

1) 지수함수의 부정적분	
① $\int e^{x}dx = e^{x}+C$	② $\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b}+C$
③ $\int a^{x}dx = \frac{1}{\ln a}a^{x}+C$	④ $\int a^{bx+c}dx = \frac{1}{b}\frac{1}{\ln a}a^{bx+c}+C$
2) 로그함수의 부정적분	
① $\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C$	② $\int \ln(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\{(ax+b)\ln(ax+b) - (ax+b)\} + C$
참고) 항등식의 마법 - 식의 모양 기억	
① 곱의 미분법의 역 계산	$\int (f'g+fg')dx = f(x)\cdot g(x)+C$
② 몫의 미분법의 역 계산	$\int \left(\frac{f'g-fg'}{g^2}\right)dx = \frac{f(x)}{g(x)}+C$ $\int \left(\frac{f'(x)-f(x)}{e^{x}}\right)dx = \frac{f(x)}{e^{x}}+C$
③ 로그함수 + 합성함수	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln\lvert f(x)\rvert+C$

#2. 치환적분법과 부분적분법

1. 치환적분법

1) 기본원리 : 치환할 함수의 도함수가 있는지 확인

$$\int f'(g(x))g'(x)dx = f(g(x))+C$$

: $g(x)=t$로 치환 후, 양변을 x에 대해서 미분하면 $g'(x)=\dfrac{dt}{dx} \Leftrightarrow \boxed{g'(x)dx=dt}$이므로

$$\int f'(g(x))\boxed{g'(x)dx} = \int f'(t)\boxed{dt} = f(t)+C = f(g(x))+C$$

2) $\ln x$ 와 $\dfrac{1}{x}$

예시 다음 부정적분 $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{\ln x+1}}dx$ 을 구하여라.

➡ $\ln x+1=t$라고 치환하면 $\dfrac{1}{x}dx=dt$이므로 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{t}}dt = 2t^{\frac{1}{2}}+C = 2\sqrt{\ln x+1}+C$ 이다.

2. 도함수가 안 보여도 치환하라.

1) 일차식 치환 ➡ 일차식$\sqrt{\text{일차식}}$, $\dfrac{\text{일차식}}{\sqrt{\text{일차식}}}$

예시 다음 부정적분 $\displaystyle\int (2+3x)\sqrt{2x+1}\,dx$을 구하여라.

$2x+1=t$라고 하면, $dx=\dfrac{1}{2}dt$이고, $3x+2 = \dfrac{3}{2}(t-1)+2 = \dfrac{3}{2}t+\dfrac{1}{2}$이다.

$$\int (2+3x)\sqrt{2x+1}\,dx = \int \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}t+\frac{1}{2}\right)\sqrt{t}\,dt = \int\left(\frac{3}{4}t^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{4}t^{\frac{1}{2}}\right)dt = \frac{3}{10}t^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{6}t^{\frac{3}{2}}+C$$

$$= \frac{3}{10}(2x+1)^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{6}(2x+1)^{\frac{3}{2}}+C$$

2) 지수함수 치환

예시 다음 부정적분 $\displaystyle\int \frac{1}{e^x+1}dx$을 구하여라.

➡ $e^x=t$라 치환 $e^x dx = dt \Leftrightarrow dx = \dfrac{1}{t}dt$

$$\int \frac{1}{e^x+1}dx = \int \frac{1}{t+1}\times\frac{1}{t}dt$$
$$= \int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$
$$= \ln|t|-\ln|t+1|+C$$
$$= \ln e^x-\ln(e^x+1)+C$$
$$= x-\ln(e^x+1)+C$$

예시 다음 부정적분 $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x-e^{-x}}$을 구하여라.

➡ $e^x=t$라고 치환하면 $e^x dx = dt \Leftrightarrow dx = \dfrac{1}{e^x}dt = \dfrac{1}{t}dt$

$$\int \frac{1}{e^x-e^{-x}}dx = \int \frac{1}{t-\frac{1}{t}}\times\frac{1}{t}dt = \int \frac{1}{t^2-1}dt$$
$$= \int \frac{1}{(t-1)(t+1)}dt = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$
$$= \frac{1}{2}(\ln|t-1|-\ln|t+1|)+C$$
$$= \frac{1}{2}\ln|e^x-1|-\frac{1}{2}\ln(e^x+1)+C$$

3) 역함수 치환

$f^{-1}(x)=g(x)$라 할 때, $\displaystyle\int g(x)dx$

➡ $g(x)=t$라 하면 $f(t)=x$ 즉, $f'(t)=\dfrac{dx}{dt} \Leftrightarrow f'(t)dt=dx$이므로 $\displaystyle\int g(x)dx = \int t f'(t)dt$

3. 부분적분법 : 로다삼지와 그적미적

1) 그적미적미그 : $\int g(x)\,dx = G_1(x)$, $\int G_n(x)\,dx = G_{n+1}(x)$, $f'(x) = f^{(1)}(x)$, $\{f^{(n)}(x)\}' = f^{(n+1)}(x)$

한 번	$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$ 그 적 $-\int$ 미 그 dx
두 번	$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - f'(x)G(x) + \int f^{(2)}(x)G(x)\,dx$ 그 적 − 미 적 $+\int$ 미 그 dx
세 번	$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - f'(x)G(x) + f^{(2)}(x)G_2(x) - \int f^{(3)}(x)G_2(x)\,dx$ 그 적 − 미 적 + 미 적 $-\int$ 미 그 dx
네 번	$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - f'(x)G(x) + f^{(2)}(x)G_2(x) - f^{(3)}(x)G_3(x) + \int f^{(4)}(x)G_3(x)\,dx$ 그 적 − 미 적 + 미 적 − 미 적 $+\int$ 미 그 dx

2) 로다삼지 : 이것은 적분 할 때, $\int \boxed{\text{이 부분}}\,dx$에 <함수를 배치하는 순서>이다.

포인트) 적분하는 대상은 계속 적분되므로 적분하기 쉬운 함수를 뒤에 배치한다.

예를 들면 피적분함수에 있는 함수를 $\int \boxed{\text{로}\times\text{삼}}\,dx$, $\int \boxed{\text{삼}\times\text{지}}\,dx$, $\int \boxed{\text{로}\times\text{지}}\,dx$과 같이 배치

예시 다음 부정적분 $\int x\cos x\,dx$을 구하여라. (피적분함수의 배치를 <다항×삼각>의 순서로 배치한다.)

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int 1\times\sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C$$

3) $\int \ln x\,dx$의 관찰 : 잘 생각해보면 $\boxed{?} \xrightarrow{\frac{d}{dx}} \ln x$인 $\boxed{?}$을 바로 찾을 수가 없다.

① 그적미그 : $\int(\ln x)\times 1\,dx = (\ln x)\times x - \int\left(\frac{1}{x}\right)\times x\,dx = (\ln x)\times x - \int 1\,dx = x\ln x - x + C$

② 그적미적미적 ⋯ : $\int(\ln x)\times 1\,dx$

$$= (\ln x)(x) - \left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{x^2}{2}\right) + \left(\frac{-1}{x^2}\right)\left(\frac{x^3}{2\cdot 3}\right) - \left(\frac{1\cdot 2}{x^3}\right)\left(\frac{x^4}{2\cdot 3\cdot 4}\right) + \left(\frac{-1\cdot 2\cdot 3}{x^4}\right)\left(\frac{x^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\right) - \cdots$$

그 적 − 미 적 + 미 적 − 미 적 + 미 적 − ⋯

$$= (\ln x)(x) - \left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots\right)x + C = x\ln x - x + C$$

➡ <그 적 $-\int$ 미 그 dx>를 한 후에 식의 모양을 관찰하는 것이 보통이다.

4) 규칙형 : 미분되는 함수가 언젠가는 0이 된다면

① $\int x^n\times(\text{지수함수})dx$	② $\int x^n\times(\text{삼각함수})dx$
다음 부정적분 $\int x^3e^x dx$을 구하여라. $\int x^3e^x dx$ $= x^3e^x - 3x^2e^x + 6xe^x - 6e^x + 0e^x + \cdots$ $= x^3e^x - 3x^2e^x + 6xe^x - 6e^x + C$	다음 부정적분 $\int x^2\cos x\,dx$을 구하여라. $\int x^2\cos x\,dx$ $= x^2\sin x - (2x)(-\cos x) + 2(-\sin x) - 0(\cos x) + \cdots$ $= x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C$

5) 순환형 : 그 적 $-\int$ 미 그 dx 후 식의 모양관찰

다음 부정적분 $\int \cos x\,e^x dx$을 구하여라.

$$\int \cos x\,e^x dx = \cos x e^x + \int \sin x e^x dx = \cos x e^x + \sin x e^x - \int \cos x e^x dx$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\int \cos x\,e^x dx} = \cos x e^x + \sin x e^x - \boxed{\int \cos x e^x dx}$$

$$\Leftrightarrow 2\int \cos x e^x dx = \cos x e^x + \sin x e^x \Leftrightarrow \int \cos x e^x dx = \frac{\cos x e^x + \sin x e^x}{2} + C$$

#3. 삼각함수 : 6+9+8+9+7+1 공식

1) 기본6개 공식

① $\int \cos x dx = \sin x + C$ ② $\int \sin x dx = -\cos x + C$ ③ $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$

④ $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$ ⑤ $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$ ⑥ $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$

2) 9개의 기본 변형 ⇒ 제곱관계, 역수관계, 상제관계

① $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$ $\Rightarrow$ $\int \frac{1}{1-\sin^2 x} dx = \tan x + C$

② $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$ $\Rightarrow$ $\int \frac{1}{1-\cos^2 x} dx = -\cot x + C$

③ $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \sec x + C$ $\Rightarrow$ $\int \frac{\sin x}{1-\sin^2 x} dx = \sec x + C$

④ $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = -\csc x + C$ $\Rightarrow$ $\int \frac{\cos x}{1-\cos^2 x} dx = -\csc x + C$

⑤ $\int \frac{1}{1+\cos x} dx = \int \frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{1-\cos^2 x} dx - \int \frac{\cos x}{1-\cos^2 x} dx = -\cot x + \csc x + C$

⑥ $\int \frac{1}{1+\sin x} dx = \int \frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x} dx = \int \frac{1}{1-\sin^2 x} dx - \int \frac{\sin x}{1-\sin^2 x} dx = \tan x - \sec x + C$

⑦ $\int \tan^2 x\, dx = \int (\sec^2 x - 1) dx = \tan x - x + C$

⑧ $\int \cot^2 x\, dx = \int (\csc^2 x - 1) dx = -\cot x - x + C$

⑨ $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \tan x - \cot x + C$

3) 8가지 응용변형

① $\int \sin x \cos x\, dx = \frac{1}{2} \int \sin 2x\, dx = -\frac{1}{4} \cos 2x + C$

② $\int (\cos^2 x - \sin^2 x) dx = \int \cos 2x\, dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C$

③ $\int \sin^2 x\, dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + C$

④ $\int \cos^2 x\, dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + C$

⑤ $\int \sin 3x \cos x\, dx = \int \frac{1}{2} (\sin 4x + \sin 2x) dx = -\frac{1}{8} \cos 4x - \frac{1}{4} \cos 2x + C$

⑥ $\int \cos 2x \sin x\, dx = \int \frac{1}{2} (\sin 3x - \sin x) dx = -\frac{1}{6} \cos 3x + \frac{1}{2} \cos x + C$

⑦ $\int \cos 4x \cos 2x\, dx = \int \frac{1}{2} (\cos 6x + \cos 2x) dx = \frac{1}{12} \sin 6x + \frac{1}{4} \sin 2x + C$

⑧ $\int \sin 3x \sin 2x\, dx = \int -\frac{1}{2} (\cos 5x - \cos x) dx = -\frac{1}{10} \sin 5x + \frac{1}{2} \sin x + C$

뒤에 시험 볼 수 있도록
암기테스트 넣어 놨습니다.