미천한 수학자

초월함수의 미분법 암기노트

#1. 미분의 방법

NOTE. 선행학습

1) 축약된 표현

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$: 구간 $[x, x+\Delta x]$에서의 평균 변화율 ➡ 즉, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$	$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$: 도함수의 정의 ➡ 즉, $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$
$\frac{dy}{dx}$: 도함수 ➡ 즉, $\frac{dy}{dx} = f'(x)$	$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a}$: $x=a$에서 미분계수 ➡ 즉, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a} = f'(a)$
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$을 평균변화율, $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$을 도함수의 정의, $\frac{dy}{dx}$을 도함수, $\frac{d}{dx}$을 x에 대한 미분 (프라임과 거의 같은 의미), $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a}$을 $x=a$에서 미분계수라고 읽는다.	

2) 기본공식

x^n의 미분법	곱의 미분법	합성함수의 미분법
① $\{x^n\}' = nx^{n-1}$ ② $\{c\}' = 0$	$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$	(겉 미분)×(속미분)
도함수의 성질		
① $\{f(x) \pm g(x)\}' = f'(x) \pm g'(x)$	② $\{cf(x)\}' = cf'(x)$	

1. x^α의 미분법

1) 기본공식	2) 추가공식	
$\frac{d}{dx}x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$ (α는 실수)	$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^m}\right) = \frac{-m}{x^{m+1}}$ <엠마왓슨 공식>	$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

참고 1) $\frac{1}{x^n}$은 x^{-n}으로 $\sqrt{x}$은 $x^{\frac{1}{2}}$으로 바꾸어 <기본공식>을 적용할 수 있지만 반드시 따로 암기한다.

참고 2) $x^{무리수}$인 경우에는 증명하지 않는다. 다만 미분법공식을 쓸 수 있다는 것이 알려져 있다.
예를 들면 x^π, x^e, $x^{\sqrt{2}}$ 등이 그렇다. (나머지는 뒤에서 차차 증명한다.)

예시 1 1)다음 함수에서 $\frac{dy}{dx}$를 구하여라.

(1) $y = x^{-3}$ (2) $y = \frac{2}{x^2}$ (3) $y = \frac{x^3+4x^2-x+1}{2x^5}$

예시 2 2)다음 함수에서 $\dfrac{dy}{dx}$를 구하여라.

(1) $y=x^{-\frac{2}{3}}$ (2) $y=\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$ (3) $y=\dfrac{x^2+x+1}{\sqrt[3]{x^2}}$

2. 몫의 미분법

1) 공식	2) 공식의 암기
$\dfrac{d}{dx}\left\{\dfrac{g(x)}{f(x)}\right\} = \dfrac{g'(x)f(x)-g(x)f'(x)}{\{f(x)\}^2}$	① 분자부터 미분, ② $\dfrac{\text{분자미분,분모곱해} - \text{분자곱해,분모미분}}{(\text{분모})^2}$

증명 1 : 몫의 미분법의 증명

$\dfrac{g(x)}{f(x)}=h(x)$라 하면,

$$h'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{h(x+\Delta x)-h(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{g(x+\Delta x)}{f(x+\Delta x)}-\dfrac{g(x)}{f(x)}}{\Delta x}\times\frac{f(x+\Delta x)f(x)}{f(x+\Delta x)f(x)}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)f(x)-g(x)f(x+\Delta x)}{\Delta x}\times\frac{1}{f(x+\Delta x)f(x)}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)f(x)-f(x)g(x)-g(x)f(x+\Delta x)+f(x)g(x)}{\Delta x}\times\frac{1}{f(x+\Delta x)f(x)}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{g(x+\Delta x)-g(x)\}f(x)-g(x)\{f(x+\Delta x)-f(x)\}}{\Delta x}\times\frac{1}{f(x+\Delta x)f(x)}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left[\underbrace{\frac{\{g(x+\Delta x)-g(x)\}}{\Delta x}}_{g'(x)}f(x)-g(x)\underbrace{\frac{\{f(x+\Delta x)-f(x)\}}{\Delta x}}_{f'(x)}\right]\times\underbrace{\frac{1}{f(x+\Delta x)f(x)}}_{\frac{1}{\{f(x)\}^2}}$$

$$= \frac{g'(x)f(x)-g(x)f'(x)}{\{f(x)\}^2}$$

증명 2 : α의 확장 (자연수 → 정수)

자연수인 m에 대하여 $n=-m$이라고 할 때, x^n의 미분을 증명하여 본다.

$x^n = x^{-m} = \dfrac{1}{x^m}$이다. 몫의 미분법에 의해서 $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x^m}\right) = \dfrac{-mx^{m-1}}{(x^m)^2}$

지수법칙의 의하여 분자지수에 분모지수를 빼주면 $\dfrac{-mx^{m-1}}{(x^m)^2} = -mx^{-m-1}$이다.

$-m=n$이므로 대입하면 nx^{n-1}이다. n이 자연수일 때의 공식이 음의 정수에도 사용될 수 있음을 확인하였다.

예시 3 3)다음 함수 $y=\dfrac{x^2+3x+1}{2x+3}$의 도함수를 구하여라.

3. 합성함수와 음함수

1) 합성함수의 미분법 공식

① $\dfrac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$ ② $\dfrac{d}{dx}f(g(h(x))) = f'(g(h(x)))g'(h(x))h'(x)$

2) 음함수 미분법 (음함수의 의미 + 합성함수의 미분법)

1) 용어 : 우리나라에서는 음수와 음함수의 음자를 같은 글자를 쓴다. 하지만 그 의미는 분명히 다르고 그것이 영어에서는 정확히 들어난다. 음수는 영어로 negative number 이다. 그런데 음함수는 전혀 다른 Implicit function (내포하는 함수)라고 쓴다. 이것은 바로 도형을 의미한다.

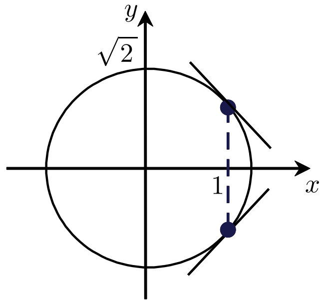
2) 설명 : $x^2+y^2=r^2$인 원을 생각해 보면 함수의 정의에 의하여 함수가 아니라고 알고 있다. 하지만 이 식을 y에 대해서 정리해 보면 $y=\sqrt{r^2-x^2}$ 또는 $y=-\sqrt{r^2-x^2}$가 나온다는 사실을 알고 있다.
결국 도형이란 사실 식을 정리해보면 정의역을 공유하는 서로 다른 함수의 합집합으로 볼 수 있는 것이다.
즉, 도형은 결국 함수를 내포한다.

3) 결론 : 결국 음함수 미분법이란 변수 y를 x에 대해서 미분한다면
y를 통째로 하나의 함수처럼 보고 합성함수의 미분법을 진행하는 방법이다.
(하지만 y에 대해서 미분한다면 y는 지금까지 미분해왔던 데로 하나의 일차 항에 불과하다.)
- 헷갈린다면 y를 $f(x)$라고 생각하고 미분해보길 바란다.

예를 들어 y^2을 y에 대해서 미분할 경우 $\Rightarrow 2y$

y^2을 x에 대해서 미분할 경우 $\Rightarrow 2y\dfrac{dy}{dx}$ $\boxed{2y(\text{겉 미분})\times\dfrac{dy}{dx}(\text{속미분})}$

4) 참고 : 지금까지 (양)함수와는 달리 음함수의 경우에는 $x=\alpha$에서는 미분계수를 찾으라고 한다면 미분계수가 두 개 이상이 나올 수 있다. 그래서 음함수 미분계수를 구하라고 할 때는 미분하는 점의 y좌표도 함께 알려준다.



예를 들어 $x^2+y^2=2$인 원이라면 $x=1$에서만 물어본다면 오른쪽과 같이 두 개 나올 수 있으므로 $(1,1)$에서의 미분계수를 찾으라는 식으로 물어보는 것이 보통이다.

3) 설명 : 음함수 미분법

★ $x^2+y^2=r^2$을 두 함수로 나눠보면 ① $y=\sqrt{r^2-x^2}$ 또는 ② $y=-\sqrt{r^2-x^2}$이다.

① $y=\sqrt{r^2-x^2}$의 도함수를 구해보면 ($\sqrt{\ }$의 미분법과 합성함수 미분법을 이용하였다.)

$$\frac{d}{dx}y = \frac{-2x}{2\sqrt{r^2-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}$$ 그런데 $y=\sqrt{r^2-x^2}$이므로 $\dfrac{d}{dx}y = -\dfrac{x}{y}$

② $y=-\sqrt{r^2-x^2}$의 도함수 역시 구해보면 ($\sqrt{\ }$의 미분법과 합성함수 미분법을 이용하였다.)

$$\frac{d}{dx}y = -\frac{-2x}{2\sqrt{r^2-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$$ 그런데 $y=-\sqrt{r^2-x^2}$이므로 $\dfrac{d}{dx}y = -\dfrac{x}{y}$

★ 그리고 $x^2+y^2=r^2$의 양변을 x에 대해 미분하여 음함수 미분법(합성함수 미분법)을 사용하면

좌변 : $\dfrac{d}{dx}(x^2+y^2) = \dfrac{d}{dx}x^2+\dfrac{d}{dx}y^2 = 2x+2y\times\dfrac{dy}{dx}$ 우변 : $\dfrac{d}{dx}r^2 = 0$

이므로 $\dfrac{d}{dx}y = -\dfrac{x}{y}$이다.

결국 교과서에 나오는 설명은 하나의 예를 통해서 <음함수 미분법은 사용해도 된다.>라는 것을 알려준 것이다.

4) 증명 : α의 확장 (정수 → 유리수)

$m \times n \neq 0$인 정수에 대하여 $\alpha = \dfrac{n}{m}$이라고 할 때, x^{α}의 미분을 증명하여 본다.

$x^{\alpha} = x^{\frac{n}{m}} \Leftrightarrow y^{m} = x^{n}$이다. 양변을 음함수 미분법에 의하여 x에 대해 미분하면

$$\frac{d}{dx}y^{m} = \frac{d}{dx}x^{n} \Leftrightarrow my^{m-1} \times \frac{dy}{dx} = nx^{n-1} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{nx^{n-1}}{my^{m-1}}\text{이다.}$$

여기에서 y에 $x^{\frac{n}{m}}$을 대입하고 지수법칙을 적용하면

$$\frac{dy}{dx} = \frac{nx^{n-1}}{my^{m-1}} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{nx^{n-1}}{m\left(x^{\frac{n}{m}}\right)^{m-1}} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{n}{m} \times \frac{x^{n-1}}{\left(x^{\frac{n}{m}}\right)^{m-1}} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{n}{m} \times \frac{x^{n-1}}{x^{\frac{n(m-1)}{m}}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{n}{m} \times x^{n-1-\frac{n(m-1)}{m}} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{n}{m}x^{\frac{n}{m}-1}\text{이다.}$$

그런데 $\alpha = \dfrac{n}{m}$이므로 $\dfrac{dy}{dx} = \alpha x^{\alpha - 1}$이다.

예시 4 2011. 6. 가형(76%). 26번. 4점

4)함수 $f(x) = (x+1)^{\frac{3}{2}}$과 실수 전체의 집합에서 미분 가능한 함수 $g(x)$에 대하여
함수 $h(x)$를 $h(x) = (g \circ f)(x)$라 하자. $h'(0) = 15$일 때, $g'(1)$의 값을 구하시오.

예시 5 5)$xy^{2} = 1$의 식에서 $\dfrac{dy}{dx}$를 구하시오.

4. 역함수 미분법

1) 역함수 미분법	2) 역함수의 미분계수	3) 역함수의 도함수
어떤 함수가 <$x = y$에 대한 식>으로 주어졌을 때, $\dfrac{dy}{dx}$를 구하는 방법. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{dx}{dy}\right)}$	$y = f(x)$가 점 (a, b)를 지날 때, 이 함수의 역함수 $y = f^{-1}(x)$의 $x = b$에서의 미분계수. $(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$	$y = f(x)$의 역함수의 도함수는 1 단계 : $y = x$대칭. 즉, $x = f(y)$ 2 단계 : y에 대해서 미분 후 역수. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{dx}{dy}\right)} = \dfrac{1}{f'(y)}$

설명 1 : <역함수 미분법>이라는 방법

역함수 미분법) $x = f(y)$처럼 표현된 함수에서 양변을 y에 대해 미분하면

$$\frac{dx}{dy} = f'(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{f'(y)}$$

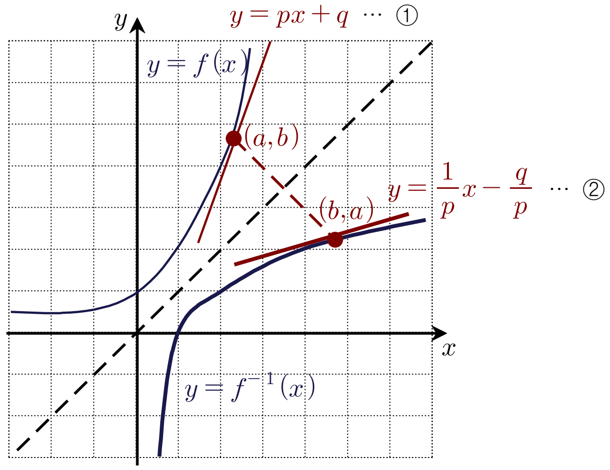
이처럼 마치 분수처럼 계산되는 특징을 이용하여 미분하는 것을 <역함수 미분법>이라고 한다.
(- 역함수만 미분 하는 게 아니라고....-_-)

음함수 미분법) $x = f(y)$라고 표현된 식에서 (음함수 미분법을 이용하여) 양변을 x에 대해 미분하여

$1 = f'(y)\dfrac{dy}{dx} \Leftrightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{f'(y)}$라는 같은 관계식을 얻을 수 있다.

설명 2 : <역함수의 미분계수>는 기하학적으로 기억

$y=f(x)$위의 점 (a,b)에서 접선의 방정식과
$y=f^{-1}(x)$ 위의 점 (b,a)에서 접선의 방정식은
$y=x$ 대칭관계이다. 즉, 역함수 관계이다.
결국 $y=f(x)$위의 점 (a,b)에서 접선의 방정식을
$y=px+q$라고 할 경우 이 함수의 역함수를 실제로
구해보면 $y=\frac{1}{p}x-\frac{q}{p}$이 나오고 이 일차함수가
$y=f^{-1}(x)$위의 점 (b,a)에서 접선의 방정식이다.



즉, ①의 식에서 접선의 기울기 $f'(a) = p$이다.
②의 식에서 접선의 기울기 $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{p}$이다.

이 역수관계를 이용하면 문제에서 $(f^{-1})'(b)$를 구하라고 하는 경우에 $\frac{1}{f'(a)}$로 대신할 수 있다.

결국 $(f^{-1})'(b)=\frac{1}{f'(a)}$이다. 공식을 단지 암기하지 말고 그림을 떠올려 명확히 이해하라.

설명 3 : <역함수의 도함수> 구하기

참고) y라는 문자가 내포하는 함수를 명확하게 이해해야 역함수의 도함수가 헷갈리지 않는다.

① 의미상 역함수 : $y=f(x) \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$: 같은 식, 같은 그래프

➡ 이 때의 y는 $f(x)$를 의미하는 y이다.

② 구한 역함수 : $y=f(x) \xrightarrow{y=x\text{ 대칭}} x=f(y)$: 다른 식, 다른 그래프

➡ 이 때의 y는 역함수 $f^{-1}(x)$를 의미하는 y이다.

<결론> $y=x$대칭을 시킨 후 <역함수의 미분법>을 이용하든 <음함수 미분법>을 이용하든 $\frac{dy}{dx}$를 구해주면 이것이 역함수의 도함수이다.

예시 6 6)다음 식 $x=\sqrt{y^3+1}$의 도함수를 역함수 미분법을 이용하여 구하여라.

예시 7 7)함수 $y=x\sqrt{1+x}$ $(x>0)$의 역함수의 도함수를 구하여라.

예시 8 8)함수 $y=g(x)$가 함수 $y=f(x)$의 역함수이고 $f(1)=3$, $f'(1)=2$일 때, $g'(3)$의 값은?

1) (1) $\frac{d}{dx}y \; = \; \; = -\frac{3}{x^4}$ (2) $\frac{d}{dx}y = \frac{2\times(-2)}{x^3} = \frac{-4}{x^3}$

(3) 1 단계 : $y = \frac{x^3+4x^2-x+1}{2x^5} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x^3}-\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^5}\right)$

2 단계 : $\frac{d}{dx}y = \frac{1}{2}\left(\frac{-2}{x^3}+\frac{-12}{x^4}-\frac{-4}{x^5}+\frac{-5}{x^6}\right)$

정답은 (1) $\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{x^4}$ (2) $\frac{dy}{dx} = \frac{-4}{x^3}$ (3) $\frac{d}{dx}y = \frac{1}{2}\left(\frac{-2}{x^3}+\frac{-12}{x^4}-\frac{-4}{x^5}+\frac{-5}{x^6}\right)$

2) (1) $\frac{d}{dx}y = -\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}-1} = -\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}}$

(2) 1 단계 : $y = \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} \Leftrightarrow y = x^{-\frac{3}{4}}$ 2 단계 : $\frac{d}{dx}y = -\frac{3}{4}\times x^{-\frac{3}{4}-1} = -\frac{3}{4}x^{-\frac{7}{4}}$

(3) 1 단계 : $y = \frac{x^2+x+1}{\sqrt[3]{x^2}} \Leftrightarrow y = x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{2}{3}}$

2 단계 : $\frac{d}{dx}y = \frac{4}{3}\times x^{\frac{4}{3}-1} + \frac{1}{3}\times x^{\frac{1}{3}-1} + \left(-\frac{2}{3}\right)\times x^{-\frac{2}{3}-1} \Leftrightarrow \frac{d}{dx}y = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}$

정답은 (1) $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}}$ (2) $\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{4}x^{-\frac{7}{4}}$ (3) $\frac{dy}{dx} = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}$

3) 분모가 $2x+3$이기 때문에 x^{α}의 형태로의 식 변형이 되지 않는다. 어쩔 수 없이 몫의 미분법을 이용하여 미분한다.

$$y' = \frac{(x^2+3x+1)'(2x+3)-(x^2+3x+1)(2x+3)'}{(2x+3)^2} = \frac{(2x+3)(2x+3)-2(x^2+3x+1)}{(2x+3)^2} = \frac{2x^2+6x+7}{(2x+3)^2}$$

정답은 $y' = \frac{2x^2+6x+7}{(2x+3)^2}$

4) 합성함수의 미분법을 물어본 아주 기본적인 문제이다.

$h(x) = (g\circ f)(x)$의 양변을 미분하면 $h'(x) = g'(f(x))f'(x)$이다. 조건 $h'(0) = 15$을 활용하기 위해서 양변에 $x = 0$을 대입하면 $h'(0) = g'(f(0))f'(0) \Leftrightarrow 15 = g'(1)f'(0)$ 여기에서 $f'(x) = \frac{3}{2}(x+1)^{\frac{1}{2}}$이므로 $f'(0) = \frac{3}{2}$이다.

즉, $15 = g'(1)f'(0) \Leftrightarrow 15 = g'(1)\times\frac{3}{2} \Leftrightarrow g'(1) = 10$ 정답은 $g'(1) = 10$

5) 과정에서 곱의 미분법과 합성함수 미분법을 사용한다. 양변을 x에 대해서 미분하면

좌변은 $\frac{d}{dx}(xy^2) = \frac{d}{dx}x\times y^2 + x\times\frac{d}{dx}y^2$ 〈곱의 미분법〉 $= y^2 + x\times 2y\times\frac{dy}{dx}$ 〈다항함수 미분법, 음함수 미분법〉

우변은 $\frac{d}{dx}1 = 0$ 결국 $y^2+2xy\times\frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-y^2}{2xy} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-y}{2x}$ $(y\neq 0)$

(처음 식에서 어차피 y는 0일 수 없으므로 $y\neq 0$조건이 있는 것이나 마찬가지이다. 그러므로 약분해도 된다.)

정답은 $\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{2x}$

6) 양변을 y에 대해서 미분하면 $\frac{dx}{dy} = \frac{3y^2}{2\sqrt{y^3+1}}$이고, 역수를 취하면 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)} = \frac{2\sqrt{y^3+1}}{3y^2}$이다. 여기에서

$x = \sqrt{y^3+1}$ 이므로 대입해서 식을 조금 정리하면 $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{3y^2}$

이러한 역수를 취하는 계산테크닉을 활용 하는 것이 역함수 미분법. 역함수 미분법은 반드시 역함수를 미분하는 것이 아니라 이처럼 계산 테크닉의 측면을 말하는 것. 정답은 $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{3y^2}$

7) 물론 <음함수 미분법>을 이용하여 역함수의 도함수를 구할 수도 있다. 하지만 우리는 <역함수 미분법>을 이용하여 역함수의 도함수를 구해보도록 한다.

1 단계 : 역함수의 의미를 갖는 y를 만들어 내기 위해서 $y = x$에 대한 대칭을 시킨다. 즉, $x = y\sqrt{1+y} \quad (y > 0)$

2 단계 : 양변을 y에 대해서 미분한다. 곱의 미분법을 진행해도 좋으나 계산의 효율성을 위하여 $y\sqrt{1+y} = \sqrt{y^3+y^2}$ 으로 바꾼다. 양변을 y에 대하여 미분하면 $\frac{dx}{dy} = \frac{3y^2+2y}{2\sqrt{y^3+y^2}}$ 이고, 이것의 양변을 역수 취하면

$\frac{dy}{dx} = \frac{2\sqrt{y^3+y^2}}{3y^2+2y} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2y\sqrt{1+y}}{3y^2+2y}$ 이고 $(y > 0)$이므로 약분하면 $\frac{dy}{dx} = \frac{2\sqrt{1+y}}{3y+2}$ 이다.

정답은 $\frac{dy}{dx} = \frac{2\sqrt{1+y}}{3y+2}$

8) 그림을 생각해 보면 헷갈리지 않는다. 원래함수 $y = f(x)$는 $(1, 3)$을 지나므로 역함수 $y = g(x)$는 $(3, 1)$을 지난다.

우리가 구하고자 하는 $g'(3)$와 $f'(1)$은 역수관계이므로 $g'(3) = \frac{1}{f'(1)} \Leftrightarrow g'(3) = \frac{1}{2}$ 정답은 $g'(3) = \frac{1}{2}$

#1. 미분의 방법

NOTE. 선행학습

1) 축약된 표현

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$: 구간 $\boxed{\quad\quad}$에서의 $\boxed{\quad\quad\quad}$ ➡ 즉, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \boxed{\quad\quad\quad\quad}$	$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$: $\boxed{\quad\quad\quad}$ ➡ 즉, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \boxed{\quad\quad\quad\quad}$
$\frac{dy}{dx}$: $\boxed{\quad\quad}$ ➡ 즉, $\frac{dy}{dx} = \boxed{\quad\quad}$	$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a}$: $\boxed{\quad\quad\quad}$ ➡ 즉, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a} = \boxed{\quad\quad}$
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$을 $\boxed{\quad\quad}$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$을 $\boxed{\quad\quad\quad}$, $\frac{dy}{dx}$을 $\boxed{\quad\quad}$, $\frac{d}{dx}$을 $\boxed{\quad\quad\quad}$ (프라임과 거의 같은 의미), $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a}$ 을 $\boxed{\quad\quad\quad\quad}$라고 읽는다.	

2) 기본공식

x^n의 미분법		곱의 미분법	합성함수의 미분법
① $\{x^n\}' = \boxed{\quad}$	② $\{c\}' = \boxed{\quad}$	$\{f(x)g(x)\}' = \boxed{\quad\quad\quad\quad}$	$(\boxed{\quad\quad})\times(\boxed{\quad\quad})$
도함수의 성질			
① $\{f(x)\pm g(x)\}' = \boxed{\quad\quad}$		② $\{cf(x)\}' = \boxed{\quad\quad}$	

1. x^{α}의 미분법

1) 기본공식	2) 추가공식	
$\frac{d}{dx}x^{\alpha} = \boxed{\quad\quad}$ (α는 실수)	$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^m}\right) = \boxed{\frac{\quad}{\quad}}$ <엠마왓슨 공식>	$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \boxed{\frac{\quad}{\quad}}$

참고 1) $\frac{1}{x^n}$은 x^{-n}으로 $\sqrt{x}$은 $x^{\frac{1}{2}}$으로 바꾸어 <기본공식>을 적용할 수 있지만 반드시 따로 암기한다.

참고 2) $x^{무리수}$인 경우에는 증명하지 않는다. 다만 미분법공식을 쓸 수 있다는 것이 알려져 있다.
예를 들면 x^{π}, x^{e}, $x^{\sqrt{2}}$ 등이 그렇다. (나머지는 뒤에서 차차 증명한다.)

예시 1 다음 함수에서 $\frac{dy}{dx}$를 구하여라.

(1) $y = x^{-3}$ (2) $y = \frac{2}{x^2}$ (3) $y = \frac{x^3+4x^2-x+1}{2x^5}$

예시 2 다음 함수에서 $\frac{dy}{dx}$를 구하여라.

(1) $y=x^{-\frac{2}{3}}$ (2) $y=\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$ (3) $y=\frac{x^2+x+1}{\sqrt[3]{x^2}}$

2. 몫의 미분법

1) 공식	2) 공식의 암기
$\frac{d}{dx}\left\{\frac{g(x)}{f(x)}\right\}=\boxed{\frac{\quad}{\quad}}$	① 분자부터 미분, ② $\frac{\text{분자미분,분모곱해} - \text{분자곱해,분모미분}}{(\text{분모})^2}$

증명 1 : 몫의 미분법의 증명

$\frac{g(x)}{f(x)}=h(x)$라 하면,

$$h'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{h(x+\Delta x)-h(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{g(x+\Delta x)}{f(x+\Delta x)}-\frac{g(x)}{f(x)}}{\Delta x}\times\boxed{\frac{\quad}{\quad}}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)f(x)-g(x)f(x+\Delta x)}{\Delta x}\times\frac{1}{f(x+\Delta x)f(x)}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)f(x)-\boxed{\quad}-g(x)f(x+\Delta x)+\boxed{\quad}}{\Delta x}\times\frac{1}{f(x+\Delta x)f(x)}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{g(x+\Delta x)-g(x)\}f(x)-g(x)\{f(x+\Delta x)-f(x)\}}{\Delta x}\times\frac{1}{f(x+\Delta x)f(x)}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\underbrace{\frac{\{g(x+\Delta x)-g(x)\}f(x)}{\Delta x}}_{\boxed{\quad}}-\underbrace{\frac{g(x)\{f(x+\Delta x)-f(x)\}}{\Delta x}}_{\boxed{\quad}}\right]\times\underbrace{\frac{1}{f(x+\Delta x)f(x)}}_{\boxed{\frac{\quad}{\quad}}}$$

$$=\boxed{\frac{\quad}{\quad}}$$

증명 2 : α의 확장 (자연수 → 정수)

자연수인 m에 대하여 $\boxed{\quad}$이라고 할 때, x^n의 미분을 증명하여 본다.

$x^n=x^{-m}=\frac{1}{x^m}$이다. 몫의 미분법에 의해서 $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^m}\right)=\boxed{\frac{\quad}{\quad}}$

지수법칙의 의하여 분자지수에 분모지수를 빼주면 $\frac{-mx^{m-1}}{(x^m)^2}=\boxed{\quad}$이다.

$\boxed{\quad}$이므로 대입하면 nx^{n-1}이다. n이 자연수일 때의 공식이 음의 정수에도 사용될 수 있음을 확인하였다.

예시 3 다음 함수 $y=\frac{x^2+3x+1}{2x+3}$의 도함수를 구하여라.

3. 합성함수와 음함수

1) 합성함수의 미분법 공식

① $\dfrac{d}{dx}f(g(x)) = \boxed{\qquad\qquad}$　　　　② $\dfrac{d}{dx}f(g(h(x))) = \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$

2) 음함수 미분법 (음함수의 의미 + 합성함수의 미분법)

1) 용어 : 우리나라에서는 음수와 음함수의 음자를 같은 글자를 쓴다. 하지만 그 의미는 분명히 다르고 그것이 영어에서는 정확히 들어난다. 음수는 영어로 negative number 이다. 그런데 음함수는 전혀 다른 Implicit function (내포하는 함수)라고 쓴다. 이것은 바로 도형을 의미한다.

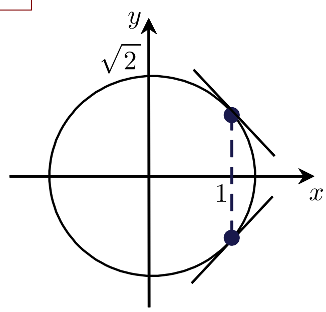
2) 설명 : $x^2+y^2=r^2$인 원을 생각해 보면 함수의 정의에 의하여 함수가 아니라고 알고 있다. 하지만 이 식을 y에 대해서 정리해 보면 $\boxed{\qquad\qquad}$ 또는 $\boxed{\qquad\qquad}$가 나온다는 사실을 알고 있다.
결국 도형이란 사실 식을 정리해보면 정의역을 공유하는 서로 다른 함수의 합집합으로 볼 수 있는 것이다.
즉, 도형은 결국 함수를 내포한다.

3) 결론 : 결국 음함수 미분법이란 변수 y를 x에 대해서 미분한다면
$\boxed{}$를 통째로 하나의 함수처럼 보고 $\boxed{\qquad\qquad\qquad}$을 진행하는 방법이다.
(하지만 y에 대해서 미분한다면 y는 지금까지 미분해왔던 데로 하나의 일차 항에 불과하다.)
- 헷갈린다면 y를 $f(x)$라고 생각하고 미분해보길 바란다.

예를 들어 y^2을 y에 대해서 미분할 경우 $\Rightarrow$ $\boxed{\qquad}$

y^2을 x에 대해서 미분할 경우 $\Rightarrow$ $\boxed{\qquad}$ | $\boxed{}$(겉 미분)$\times$ | —— | (속미분)

4) 참고 : 지금까지 (양)함수와는 달리 음함수의 경우에는 $x=\alpha$에서는 미분계수를 찾으라고 한다면 미분계수가 두 개 이상이 나올 수 있다. 그래서 음함수 미분계수를 구하라고 할 때는 미분하는 점의 y좌표도 함께 알려준다.



예를 들어 $x^2+y^2=2$인 원이라면 $x=1$에서만 물어본다면 오른쪽과 같이 두 개 나올 수 있으므로 $(1,1)$에서의 미분계수를 찾으라는 식으로 물어보는 것이 보통이다.

3) 설명 : 음함수 미분법

★ $x^2+y^2=r^2$을 두 함수로 나눠보면 ① $y=\sqrt{r^2-x^2}$ 또는 ② $y=-\sqrt{r^2-x^2}$ 이다.

① $y=\sqrt{r^2-x^2}$ 의 도함수를 구해보면 ($\sqrt{}$ 의 미분법과 합성함수 미분법을 이용하였다.)

$\dfrac{d}{dx}y = \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$ 그런데 $y=\sqrt{r^2-x^2}$ 이므로 $\dfrac{d}{dx}y = \boxed{\qquad}$

② $y=-\sqrt{r^2-x^2}$ 의 도함수 역시 구해보면 ($\sqrt{}$ 의 미분법과 합성함수 미분법을 이용하였다.)

$\dfrac{d}{dx}y = \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$ 그런데 $y=-\sqrt{r^2-x^2}$ 이므로 $\dfrac{d}{dx}y = \boxed{\qquad}$

★ 그리고 $x^2+y^2=r^2$의 양변을 x에 대해 미분하여 음함수 미분법(합성함수 미분법)을 사용하면

좌변 : $\dfrac{d}{dx}(x^2+y^2) = \dfrac{d}{dx}x^2+\dfrac{d}{dx}y^2 = \boxed{\qquad\qquad}$　　　우변 : $\dfrac{d}{dx}r^2 = 0$

이므로 $\dfrac{d}{dx}y = \boxed{\qquad}$이다.

결국 교과서에 나오는 설명은 하나의 예를 통해서 <음함수 미분법은 사용해도 된다.>라는 것을 알려준다 것이다.

4) 증명 : α의 확장 (정수 → 유리수)

$m \times n \neq 0$인 정수에 대하여 $\boxed{\quad}$이라고 할 때, x^{α}의 미분을 증명하여 본다.

$x^{\alpha} = x^{\frac{n}{m}} \Leftrightarrow y^m = x^n$이다. 양변을 $\boxed{\qquad\qquad}$에 의하여 x에 대해 미분하면

$\frac{d}{dx}y^m = \frac{d}{dx}x^n \Leftrightarrow \boxed{\qquad\qquad\qquad} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \boxed{\qquad}$이다.

여기에서 y에 $x^{\frac{n}{m}}$을 대입하고 지수법칙을 적용하면

$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$

그런데 $\alpha = \frac{n}{m}$이므로 $\frac{dy}{dx} = \alpha x^{\alpha - 1}$이다.

예시 4 2011. 6. 가형(76%). 26번. 4점

함수 $f(x) = (x+1)^{\frac{3}{2}}$과 실수 전체의 집합에서 미분 가능한 함수 $g(x)$에 대하여
함수 $h(x)$를 $h(x) = (g \circ f)(x)$라 하자. $h'(0) = 15$일 때, $g'(1)$의 값을 구하시오.

예시 5 $xy^2 = 1$의 식에서 $\frac{dy}{dx}$를 구하시오.

4. 역함수 미분법

1) 역함수 미분법	2) 역함수의 미분계수	3) 역함수의 도함수
어떤 함수가 ⟨$\boxed{\qquad\qquad}$⟩으로 주어졌을 때, $\frac{dy}{dx}$를 구하는 방법. $\frac{dy}{dx} = \boxed{\qquad}$	$y = f(x)$가 점 (a, b)를 지날 때, 이 함수의 역함수 $y = f^{-1}(x)$의 $x = b$에서의 미분계수. $(f^{-1})'(b) = \boxed{\qquad}$	$y = f(x)$의 역함수의 도함수는 1 단계 : $\boxed{\qquad\quad}$대칭. 즉, $x = f(y)$ 2 단계 : $\boxed{\ }$에 대해서 미분 후 역수. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)} = \frac{1}{f'(y)}$

설명 1 : ⟨역함수 미분법⟩이라는 방법

역함수 미분법) $x = f(y)$처럼 표현된 함수에서 양변을 $\boxed{\ }$에 대해 미분하면

$$\frac{dx}{dy} = f'(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{f'(y)}$$

이처럼 마치 분수처럼 계산되는 특징을 이용하여 미분하는 것을 ⟨역함수 미분법⟩이라고 한다.
(- 역함수만 미분 하는 게 아니라고....-_-)

$\boxed{\qquad\qquad\quad}$) $x = f(y)$라고 표현된 식에서 ($\boxed{\qquad\qquad\quad}$을 이용하여) 양변을 $\boxed{\ }$에 대해 미분하여

$1 = f'(y)\frac{dx}{dy} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{f'(y)}$라는 같은 관계식을 얻을 수 있다.

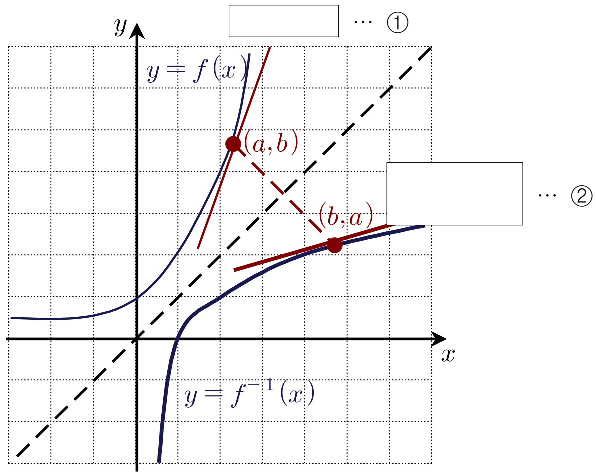
설명 2 : 〈역함수의 미분계수〉는 기하학적으로 기억

$y=f(x)$위의 점 (a,b)에서 접선의 방정식과

$y=f^{-1}(x)$ 위의 점 (b,a)에서 접선의 방정식은

$\boxed{\quad\quad}$ 대칭관계이다. 즉, $\boxed{\quad\quad}$ 관계이다.

결국 $y=f(x)$위의 점 (a,b)에서 접선의 방정식을 $y=px+q$라고 할 경우 이 함수의 역함수를 실제로 구해보면 $\boxed{\quad\quad\quad}$이 나오고 이 일차함수가 $y=f^{-1}(x)$위의 점 $\boxed{\quad\quad}$에서 $\boxed{\quad\quad\quad}$이다.



즉, ①의 식에서 접선의 기울기 $f'(a)$ $=$ $\boxed{\quad}$이다.

②의 식에서 접선의 기울기 $(f^{-1})'(b)$ $=$ $\boxed{\quad}$이다.

이 역수관계를 이용하면 문제에서 $(f^{-1})'(b)$를 구하라고 하는 경우에 $\boxed{\quad}$로 대신할 수 있다.

결국 $(f^{-1})'(b)=\boxed{\quad}$이다. 공식을 단지 암기하지 말고 그림을 떠올려 명확히 이해하라.

설명 3 : 〈역함수의 도함수〉 구하기

참고) y라는 문자가 내포하는 함수를 명확하게 이해해야 역함수의 도함수가 헷갈리지 않는다.

① 의미상 역함수 : $y=f(x)$ $\Leftrightarrow$ $x=f^{-1}(y)$: 같은 식, 같은 그래프

➡ 이 때의 y는 $\boxed{\quad\quad}$를 의미하는 y이다.

② 구한 역함수 : $y=f(x)$ $\xrightarrow{\boxed{\quad\quad}}$ $x=f(y)$: 다른 식, 다른 그래프

➡ 이 때의 y는 $\boxed{\quad\quad\quad}$를 의미하는 y이다.

〈결론〉 $y=x$대칭을 시킨 후 〈역함수의 미분법〉을 이용하든 〈$\boxed{\quad\quad\quad}$〉을 이용하든 $\dfrac{dy}{dx}$를 구해주면 이것이 역함수의 도함수이다.

예시 6 다음 식 $x=\sqrt{y^3+1}$ 의 도함수를 역함수 미분법을 이용하여 구하여라.

예시 7 함수 $y=x\sqrt{1+x}$ $(x>0)$의 역함수의 도함수를 구하여라.

예시 8 함수 $y=g(x)$가 함수 $y=f(x)$의 역함수이고 $f(1)=3$, $f'(1)=2$일 때, $g'(3)$의 값은?