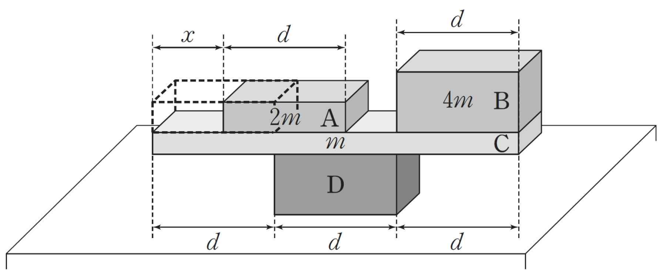
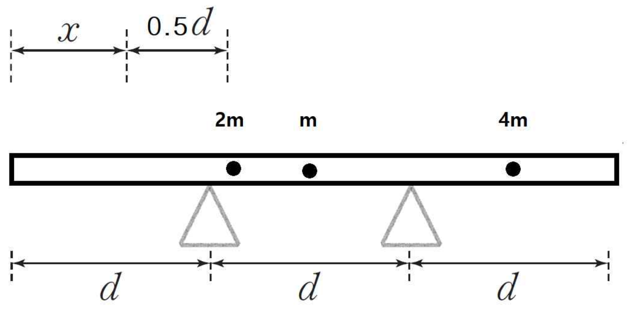
〔5〕 분산법

방금전에 배운 돌림힘의 기본적인 풀이 방향은 회전하는 지점을 기준으로 돌림힘 평형식을 이용하여 미지수를 구하였다. 이것이 기본에 충실한 풀이이다. 하지만 이번에 다룰 풀이는 인강에서 다루지 않는 내용일 뿐더러 기존의 풀이 방법들과는 바라보는 시선이 달라지므로 집중해서 보도록 하자.

기존 풀이가 **돌림힘 평형식을 세워서** 풀었다면 분산법은 **수직항력을 구해서**푸는것이기 때문에 시선이 다르다. 백문이 불여일견 한번 비교해보도록 하자.

20141120 : x의 최댓값을 구하여라.





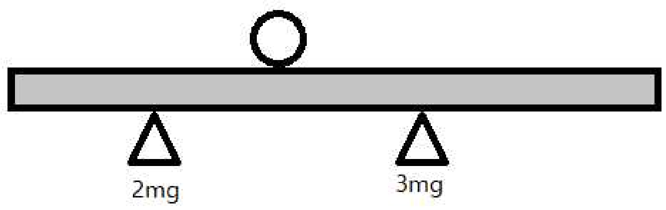
기본 풀이의 시선 : x가 점점 커지면 막대 C는 시계방향으로 회전할테니 오른쪽 받침점을 기준으로 평형식을 세워주면 답이 나오겠군! (돌림힘 평형식 시선)

분산법의 시선 : x가 점점 커지면 막대 C는 시계방향으로 회전할테니 **왼쪽 받침대의 수직항력은 0이고 오른쪽 받침대의 수직항력은 7m에 해당하는 값이 나오겠군!** (분산법 시선)

즉, 분산법은 물체에 의한 수직항력을 직접 구해서 접근을 하게 된다. 그러면 이제 분산법에 대해 알아보자. 분산법을 하기 위해서는 새로운 단어를 하나 정의하도록 하자.

(1) **영향력** : 어떠한 물체 또는 힘이 특정 지점의 수직항력, 또는 장력에 영향을 주는 정도. 물체 A에 의하여 두 받침대에서 측정되는 수직항력, 또는 두 줄에서 측정되는 장력이 a, b만큼 증가했을 때, 두 지점에 대한 A의 영향력은 (a,b)라고 정의한다.

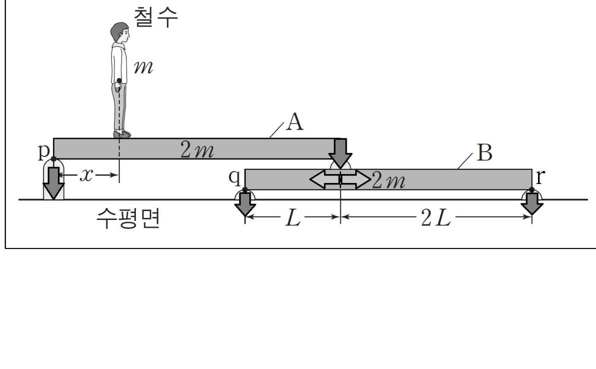
예시



무게 5mg짜리 물체를 올렸더니 두 받침대에서 측정되는 수직항력이 **2mg, 3mg가 증가 하였다.**
따라서 두 받침점에 대한 물체의 영향력은 (2mg,3mg)다.
(kg 단위를 쓸 때는 (2m,3m)이라고도 쓴다.)

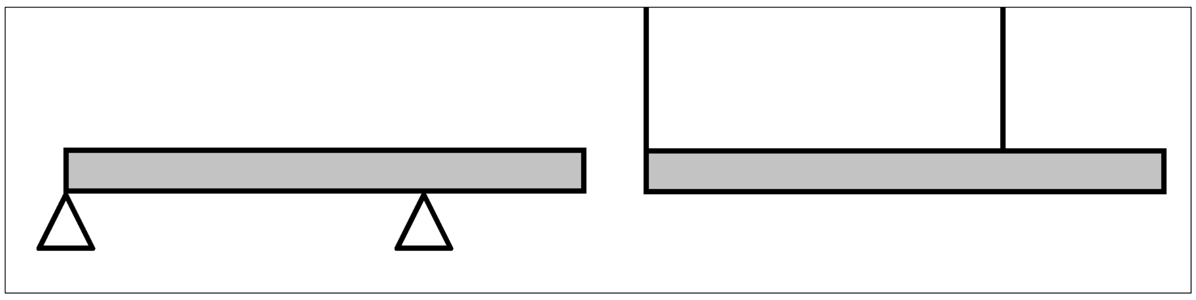
- 또한, 계산의 편의성을 위해 앞에 상수를 곱해주기도 한다.
ex) 2(2, 4)=(4, 8), a(m,n)=(am,an)

(2) 영향력의 특징
1) 힘은 접촉점을 통해 퍼져나가며 퍼져나간 힘들의 합은 원래 힘의 크기와 같다.



철수와 A의 무게는 막대 A와 접촉한 지점인 p와 오른쪽으로 분산되며 오른쪽으로 분산된 힘은 q와 r로 분산된다. 따라서 철수와 A에 의해 p, q, r에 대한 수직항력은 총 3mg 증가한다. 또한 **B의** 무게는 q와 r로 분산된다.

2) **힘의 방향이 같다면** 장력(줄)을 수직항력(받침대)로 해석해도 무방하다. (단, 힘의 방향은 같아야한다.)



위 두 그림은 **같은 상황이다.**

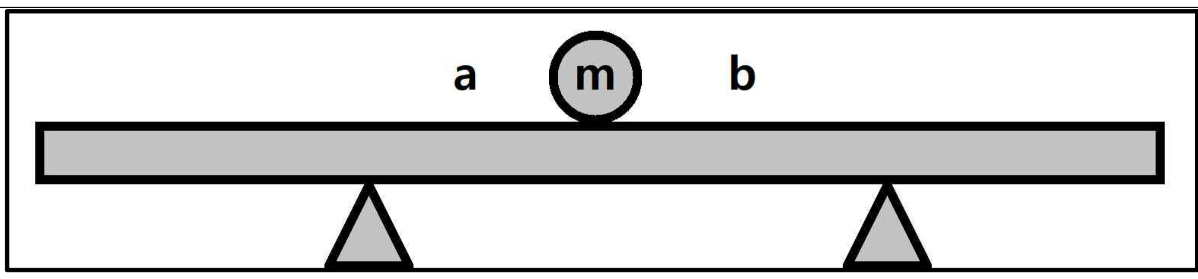
수직항력의 방향과 장력의 방향도 모두 윗방향이며 수직항력의 합과 장력의 합이 막대의 무게로 같다.
단, 왼쪽에선 수직항력을 구하고 오른쪽에선 장력을 구한다.
(물론 위 그림은 같은 상황이라 장력도 수직항력도 같게 나온다.)

분산법을 사용하려면 기본적으로 위와 같이 힘의 전달 방향을 파악해야한다. 그럼 이제 분산법을 통해 힘이 수직항력, 장력에 얼마나 영향을 주는지 구하는 법을 알아보도록 하자.

(3) 내분법

분산법의 첫 단계인 **내분법**이다. 두 받침대 위에 있는 물체는 두 받침대의 사이(내부)에 있거나 바깥(외부)에 존재 할 것이다. 내분법은 두 받침점 사이에 있는 물체의 영향력을 구하는 방법이다.

내분법 : 두 점 사이에 존재하는 힘의 영향력을 계산하는 방식. 계산 방식은 아래와 같다.



두 점 사이에 존재하는 힘에서 두 점까지의 거리가 a:b 일 때
그 힘의 영향력은 힘을 b:a로 분산한 값과 같다.

(증명)

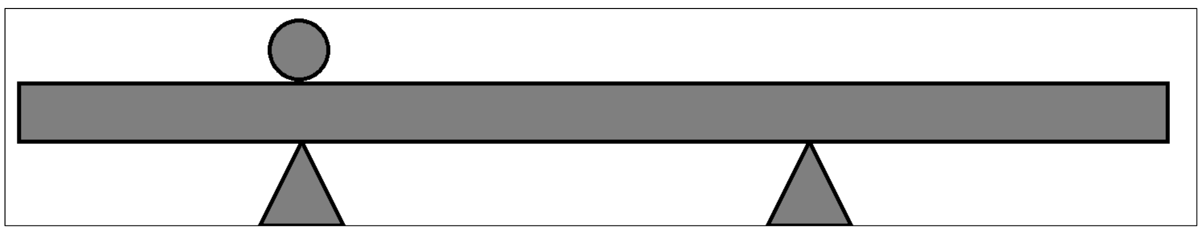
두 받침대에서 작용하는 수직항력의 크기를 각각 A, B라 하면 $A+B=mg$이다.
오른쪽 받침점을 기준으로 돌림힘 평형식을 세우면 mg에 의한 반시계 방향 돌림힘은 bmg이다.
또한 A에 의한 시계방향 돌림힘의 크기는 $(a+b)A$이다. 따라서 $(a+b)A=bmg, A=\frac{b}{a+b}mg$이다.
따라서 $A=\frac{b}{a+b}mg$, $B=\frac{a}{a+b}mg$이며 이를 통해 힘 mg가 거리비 a:b의 반대비인 b:a로 분산됨을 알 수 있다. 따라서 m의 영향력은 $\frac{mg}{a+b}(b,a)$이다. (외우지 말것. 이유는 뒤에서 알게된다.)

위와 같은 내분법의 증명 결과로 아래와 같은 내분법의 특징을 두가지 알 수 있다.

***내분법에 의한 분산의 특징**

(1) 물체에 의한 영향력 (A,B)에 대하여 $A \geq 0, B \geq 0$이다.
(2) 물체의 영향력의 **절대값 반대비는 거리비와 일치한다.**

* 만약 두 받침대까지중 어느 한 받침대 까지의 거리가 0이면 영향력이 어떻게 되는가?

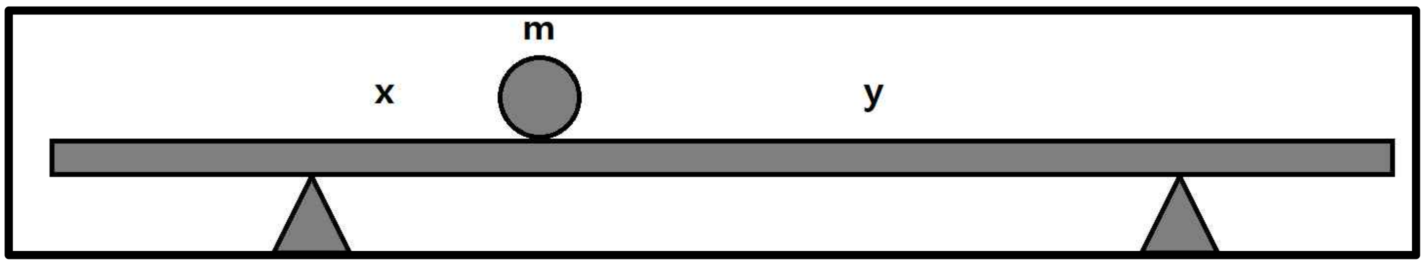


이때도 간단하다. 왼쪽, 오른쪽 받침대까지의 거리비가 0:r이므로 r:0, 즉 왼쪽으로 분산된다. 따라서 물체의 질량이 m이면 영향력은 질량으로 표현하면 (m,0), 힘으로 표현하면 (mg,0)이 된다.

위와 같은 방법으로 두 받침대 사이에 존재하는 물체에 의한 두 받침대에서 측정되는 수직항력의 크기를 구할 수 있다. 이제 내분법을 계산하는 법을 익힌 뒤에 내분법을 이용하여 수직항력을 실제로 한번 구해보도록 하자.

* 영향력을 쓸 때는 헷갈리지 않도록 **왼쪽 영향력은 왼쪽에, 오른쪽 영향력은 오른쪽에 쓰자.**

(4) 내분법의 적용법



물체의 질량 m과 두 받침대까지의 거리 x, y를 통해 m의 영향력을 구해볼것이다.

(예제 1) m=5, x=2, y=3. m의 영향력을 구하여라. 풀이) 물체의 질량이 5이며 두 받침대까지의 거리비가 2:3이므로 5는 3:2로 분산된다. 따라서 m=5의 영향력은 5=(3,2)이다.

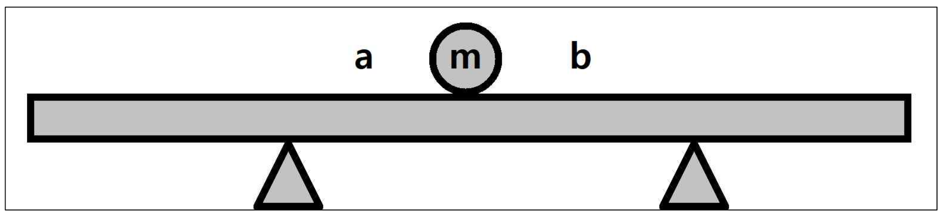
위 예제같은 경우엔 5가 3:2으로 분산된 값이 (3,2)라는것이 **직관적으로 보여** 바로 구한사람이 많을것이다. 그렇다면 직관적으로 보이지 않으면 어떻게 해야할까? 아래의 예제를 보도록 하자.

(예제 2) m=10, x=7, y=11. m의 영향력을 구하여라.

위 예제는 10을 7:11의 반대비인 11:7로 분산시켜야 하는데 이때 값이 직관적으로 바로 구해지지 않는다. 물론 구해진다면 좋으나 대다수가 그렇지 않을것이다. 이러한 상황을 위해서 앞에서 비례식을 배운것이다.
앞에서 배운 비례식 내용을 다시 인용해보도록 하겠다.

a:b=1:3, a+b=80일때 a와 b의 값을 각각 구하여라. (합 이용)

위 문제를 어떻게 풀었는가? 80에서 4를 나눈값인 20을 1과 3에 곱하여 20, 60을 구했을것이다. 예제 2처럼 복잡한 비례식을 위와 같은 개념으로 손쉽게 구할 수 있다. 아래와 같은 단계로 구해보도록 하자.



위 물체의 영향력은 $\dfrac{1}{a+b}(b,a)mg$이다. 영향력은 아래와 같은 단계로 구하도록 한다.

1단계 : 일단 거리비의 반대비를 영향력으로 둔다.
= 거리비가 a:b이므로 영향력은 (b,a)이다.

2단계 : 거리의 **합**으로 나눠주어 **영향력의 합을 1로 만들어준다.**
= (b,a)의 영향력의 합은 a+b이므로 a+b로 나눠주면 $\dfrac{1}{a+b}(b,a)$으로 합이 1이된다.

3단계 : 영향력의 합을 **실제 무게 또는 질량**으로 맞춰준다.
= 영향력의 합이 m이 나와야 하므로 m을 곱해주면 $\dfrac{m}{a+b}(b,a)$이다.

위와 같은 단계로 차근차근 영향력을 구하면 실수하지 않고 쉽게 구할 수 있을 것이다. 이제 차근차근 영향력을 구해보도록 하자.
예시 : m=3, x=6, y=11이다.

1단계 : (11,6)　　2단계 : $\dfrac{1}{17}(11,6)$　　3단계 : $\dfrac{3}{17}(11,6)$

(1) m=10, x=3, y=7
(2) m=6, x=2, y=3
(3) m=15, x=13, y=12
(4) m=13, x=4, y=7

답
(1) $10=(7,3)$
(2) $6=\dfrac{6}{5}(3,2)$
(3) $15=\dfrac{3}{5}(12,13)$
(4) $13=\dfrac{13}{11}(7,4)$

(5) 영향력의 합

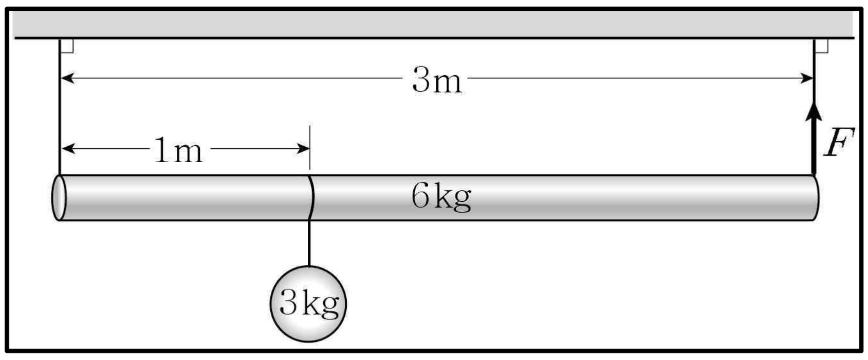
위치 A에 존재하는 어떤 물체의 영향력이 (3,4)이고 위치 B에 존재하는 어떤 물체의 영향력이 (1,2)라고 한다. 그럼 이때 두 물체가 위치해있다면 수직항력은 어떻게 될까? 예상했던대로 (4,6)이 된다. 즉, 물체가 추가됨에 따라 특정지점의 수직항력 또는 장력은 영향력의 합으로 나타내어진다.

- 영향력끼리는 덧셈이 가능하다. -

한번 기출 자료를 통해 작용해보도록 하자.

20130318

그림과 같이 실에 매달려 수평인 상태로 정지해 있는 원기둥 모양의 막대에 물체가 매달려 있다. 막대와 물체의 질량은 각각 6kg, 3kg이고 막대의 길이는 3m이다.



오른쪽 실이 막대를 당기는 힘 F의 크기는? (단 g는 $10m/s^2$이고, 막대의 재질은 균일하다.)

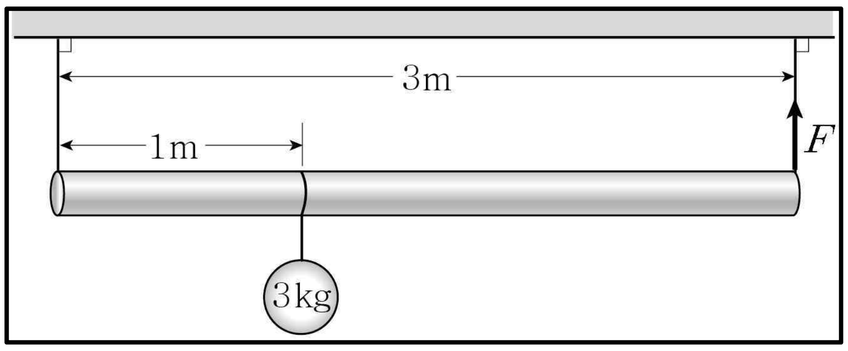
① 30N ② 40N ③ 45N ④ 50N ⑤ 60N

위 문제는 **실에 대한** 영향력을 구해보도록 하자. 6kg에 해당하는 막대의 영향력은 두 실까지의 거리비가 1:1이므로 영향력은 (3,3)이 될것이다.(kg단위) 3kg의 영향력은 막대를 통해 두 실로 1:2 반대비인 2:1로 분산되므로 3kg의 영향력은 (2,1)이 될것이다. **따라서 두 물체의 영향력 합은 (5,4)이다.**

문제에서 구하고자 하는 값은 오른쪽 영향력 F이므로 이는 4kg에 해당하는 40N이 된다. 아래 문제는 위 문제를 살짝 바꾼 예제이다. 영향력의 합을 이용해 풀어보도록 하자.

20130318 수정

그림과 같이 실에 매달려 수평인 상태로 정지해 있는 원기둥 모양의 막대에 물체가 매달려 있다. 물체의 질량은 3kg이며 막대의 길이는 3m이다.

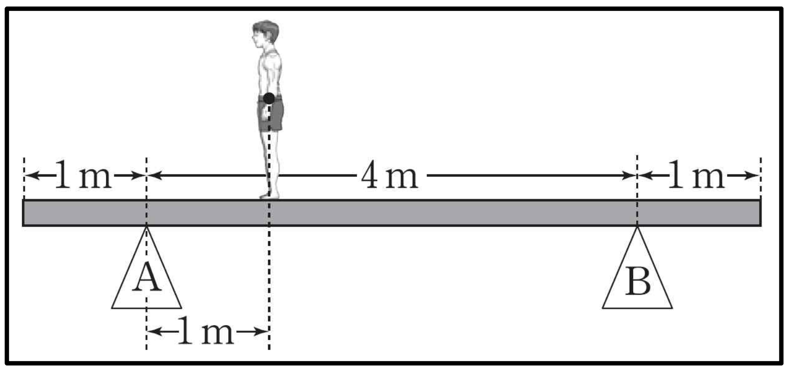


오른쪽 실에서 측정되는 장력의 크기가 60N일 때 막대의 질량은?

오른쪽 실의 장력 60N은 막대와 물체에 의한 영향력이다. 따라서 물체영향력+막대영향력=장력 이다. 따라서 (20,10)+(x,x)=(20+x,60),이다. 따라서 10+x=60이므로 x=50이고 막대영향력은 (50,50)이다. 막대의 무게는 영향력의 합과 같으므로 100N이며 질량은 10kg이 된다. 아래 문제도 풀어보도록 하자.

20140619 수정

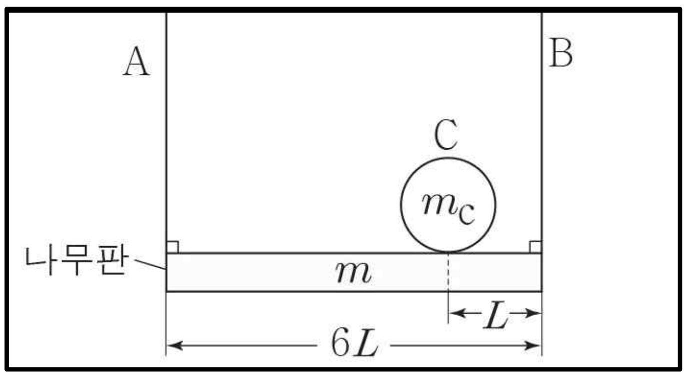
그림은 두 받침대 A, B위에 놓인 길이 6m, 질량 40kg인 직육면체 나무판 위에 철수가 정지해 있는 상태에서 나무판이 수평을 유지하고 있는 모습을 나타낸 것이다. 이때 A가 나무판을 떠받치는 힘의 크기는 650N이다.



철수의 무게는? (단, g는 $10m/s^2$이고, 나무판의 밀도는 균일하며 두께와 폭은 무시한다.)

위 문제에서 A지점에 대한 영향력 합이 650N 즉, 65kg이라는 뜻이다. 그런데 막대의 A에 대한 영향력이 20kg이므로 철수의 A에 대한 영향력은 45kg이 된다. 그런데 철수는 A, B까지의 거리비가 1:3이므로 3:1로 분산이 된다. 따라서 철수의 영향력은 (45,15)이다. 따라서 철수의 무게는 600N이다.

20160418 수정
 그림과 같이 길이가 6L인 나무판은 양 끝이 실 A, B로 연결되어있다. 나무판의 한쪽 끝으로부터 L만큼 떨어진 곳에 놓인 물체 C가 정지해 있다. 나무판, C의 질량은 각각 m, m_c이다.



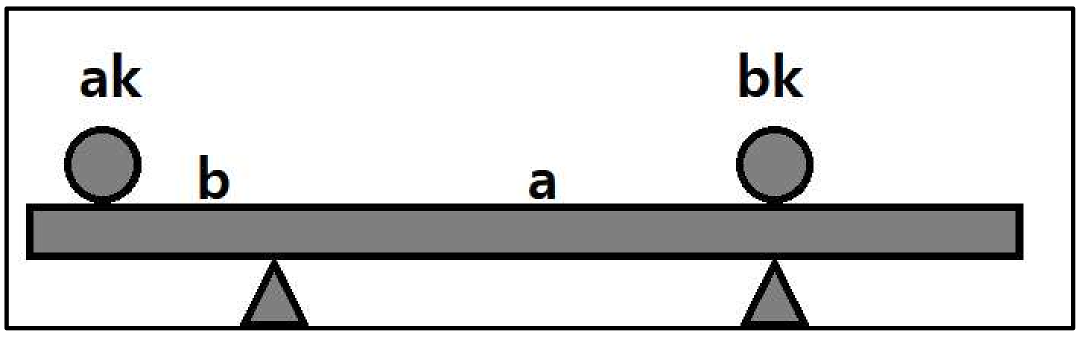
실 A, B에서 측정되는 장력의 크기가 1:3일때 m_c의 값은?

 위 문제에서는 실 A, B에 대한 영향력을 구할것이다. 그런데 장력의 크기가 1:3이므로 영향력은 (k, 3k)꼴로 1:3이 나와야 한다. 막대 m의 영향력은 (0.5m, 0.5m)이며 m_c의 영향력은 거리비가 5:1이므로 영향력이 1:5로 분산된다. 따라서 $\frac{1}{6}(m_c, 5m_c)$이다. 따라서 영향력의 합은 $(\frac{1}{2}m+\frac{1}{6}m_c, \frac{1}{2}m+\frac{5}{6}m_c)$이다. 그런데 이 영향력의 값이 1:3이므로 $\frac{1}{2}m+\frac{1}{6}m_c : \frac{1}{2}m+\frac{5}{6}m_c = 1:3,\ \frac{1}{2}m+\frac{5}{6}m_c = \frac{3}{2}m+\frac{1}{2}m_c\ \frac{1}{3}m_c = m, m_c = 3m$

(6) 외분법

 내분법이 두 지점 사이에 존재하는 힘에 대한 영향력을 구한다면 외분법은 두 지점 **외부**에 존재하는 힘에 대한 영향력을 구하는 방식이다. 실제 돌림힘 문제에서는 두 지점 내부, 외부 물체와 힘이 섞여 나오므로 내분법과 외분법을 모두 익혀 두는것이 중요하다. 이제 외분법에 대해서 알아보도록 하자.

외분법 : 두 점 외부에 존재하는 힘의 영향력을 계산하는 방식. 계산 방식은 아래와 같다.



두 점 외부에 존재하는 물체의 영향력은 **거리의 반대비로 분산되며 서로 부호가 다르다.**

(증명)
 영향력을 통해 증명해보도록 하자. 위 상황에서 왼쪽 받침대를 기준으로 두 물체까지의 거리비가 b:a인데 힘의 비가 a:b이므로 오른쪽 받침대가 없어도 평형상태를 유지한다. 그런데 오른쪽 받침대에서 수직항력의 크기가 F라 하면 (단, $F>0$) 평형이 깨지게 되므로 $F=0$이다. 따라서 ak와 bk의 두 받침대에 대한 영향력의 합은 $(ak+bk, 0)$이다. bk의 영향력은 내분법에 의해 (0, bk)이므로 ak의 영향력은 (ak+bk, -bk)이다.
 따라서 두 받침대 외부에 존재하는 ak의 영향력은 a+b:a인 거리비의 반대비로 분산되고 **더 멀리 떨어진 쪽은 음수를 가지게 된다. (물체가 오른쪽에 있으면 부호가 (-, +)가 된다.)**

 내분과는 다르게 외부에 존재하는 ak의 영향력은 k(a+b,-b)로 어느 한쪽은 양수, 어느 한쪽은 음수를 가진다. 하지만 **내분법과 마찬가지로 합은 힘의 크기와 같다.**

***외분법에 의한 분산의 특징**
(1) 물체에 의한 영향력 (A,B)에 대하여 A와 B는 부호가 반대이다. (0인 경우 제외)
(2) 물체의 영향력의 **절대값 반대비는 거리비와 일치한다.**

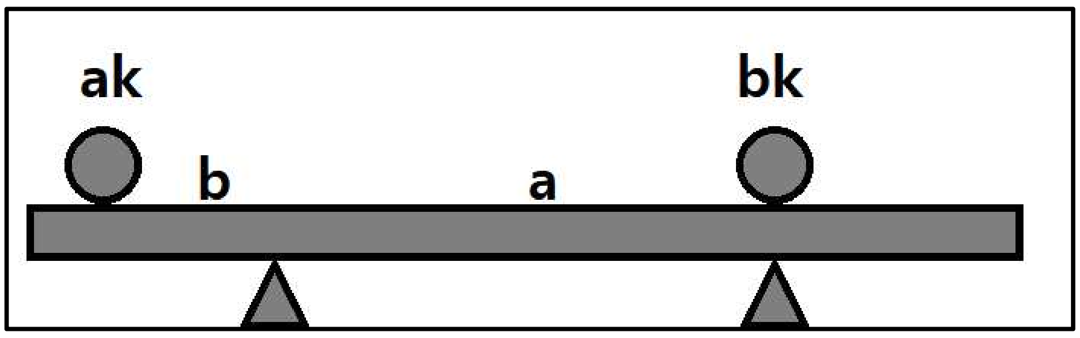
* 만약 두 받침대까지중 어느 한 받침대 까지의 거리가 0이면 영향력이 어떻게 되는가?

 이때도 내분법과 마찬가지로 어느 한쪽까지의 거리가 0이므로 그 지점으로 모든 힘이 쏠린다고 하면 된다.

* 외분법도 영향력을 쓸 때는 헷갈리지 않도록 **왼쪽 영향력은 왼쪽에, 오른쪽 영향력은 오른쪽에 쓰자.**

 앞에서 내분법에 대해서 배울 때 내분법에 의한 분산을 차근차근 계산하는 법을 다루었다. 내분법과는 달리 외분법은 **부호가 반대**이기 때문에 직관적으로 판단하기가 더더욱 어렵다. 따라서 외분법은 어떻게 계산하는지 그 적용법을 배워보도록 하자.

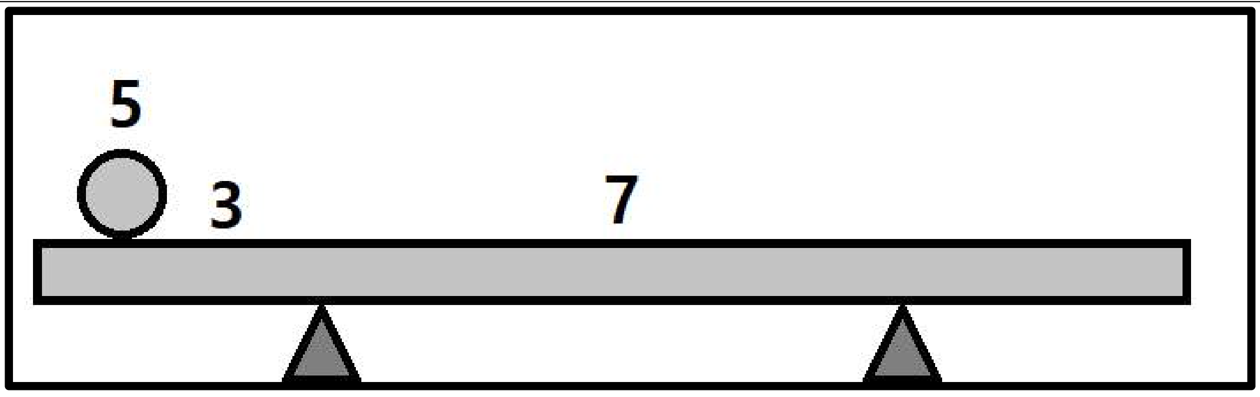
(7) 외분법의 적용법



위 그림에서 ak의 영향력은 (ak+bk, -bk)임을 앞에서 확인했다. 외분법을 적용하는 법에 대해 다루기 전에 외분법에 의한 영향력의 특징을 다시 한번 살펴보자.

***외분법에 의한 분산의 특징**
(1) 물체에 의한 영향력 (A,B)에 대하여 **A와 B는 부호가 반대이다.** (0인 경우 제외)
(2) 물체의 영향력의 **"절대값 반대비"는 "거리비"와 일치한다.**

외분법의 적용 방식도 내분법과 같다. 아래 예제를 살펴보도록 하자.

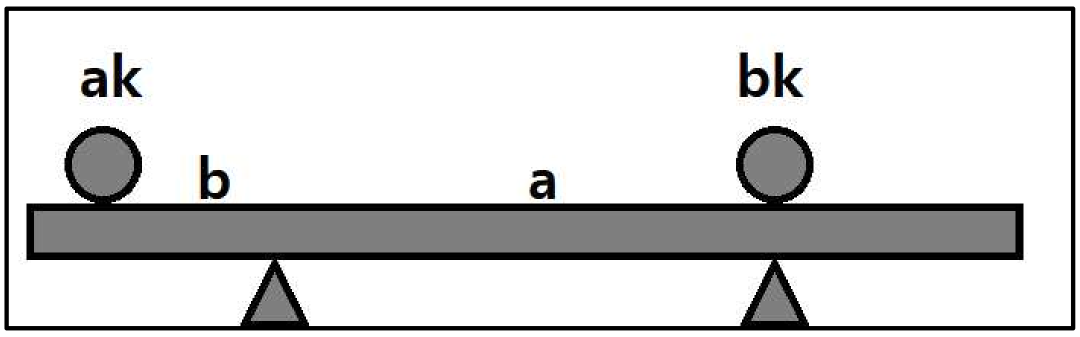


왼쪽 받침대보다 왼쪽에 있는 물체의 질량은 5이다.
두 받침대까지의 거리비가 3:10일 경우 물체의 영향력은?

외분법은 거리비의 반대비로 분산되면서 부호가 반대이기 때문에 익숙하지 않을것이다. 외분법의 적용법을 먼저 알아보고 적용을 해보도록 하자. 역시 앞에서 다룬 비례식 내용을 다시 인용하겠다.

예제 2
a:b=3:4, b-a=10일때 a와 b의 값을 각각 구하여라. (차 이용)

위 문제는 3과 4의 차 1을 10에서 나눠 나온 10을 3과 4에 곱해 a와 b의 값 30, 40을 구했을것이다. 외분법에 의한 영향력은 위 내용을 이용한다.



위 그림의 ak의 영향력은 (ak+bk, -bk)이다.
영향력은 아래와 같은 단계로 구하도록 한다.

1단계 : 일단 거리비의 반대비를 영향력으로 둔다. (절대값의 반대비가 거리비이므로)
= 거리비가 b:a+b이므로 영향력은 (a+b,b)이다.

2단계 : 물체로부터 먼 쪽이 음수이므로 -를 붙여준다.
= 위 그림은 물체가 왼쪽에 있으므로 오른쪽에 -를 붙여주면 (a+b,-b)이다.

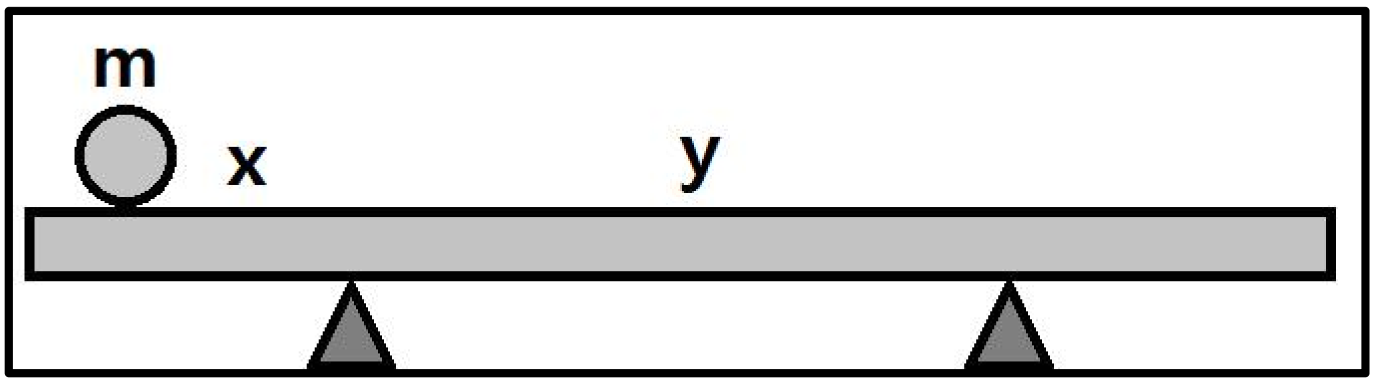
3단계 : 영향력의 합으로 나눠 영향력의 합을 1로 맞춰준다.
= (a+b, -b)의 합은 a이므로 $\frac{1}{a}(a+b,-b)$

4단계 : 영향력의 합을 물체의 질량으로 맞춰준다.
= 합이 ak가 나와야 하므로 $\frac{ak}{a}(a+b,-b)=k(a+b,-b)=(ak+bk,-bk)$

위와 같은 단계로 차근차근 영향력을 구하면 외분법에 의한 영향력도 구할 수 있을것이다.

이번엔 외분법을 통해 아래 물체들의 영향력을 구해보도록 하자.

유형 1) 왼쪽 물체의 영향력을 구하라.



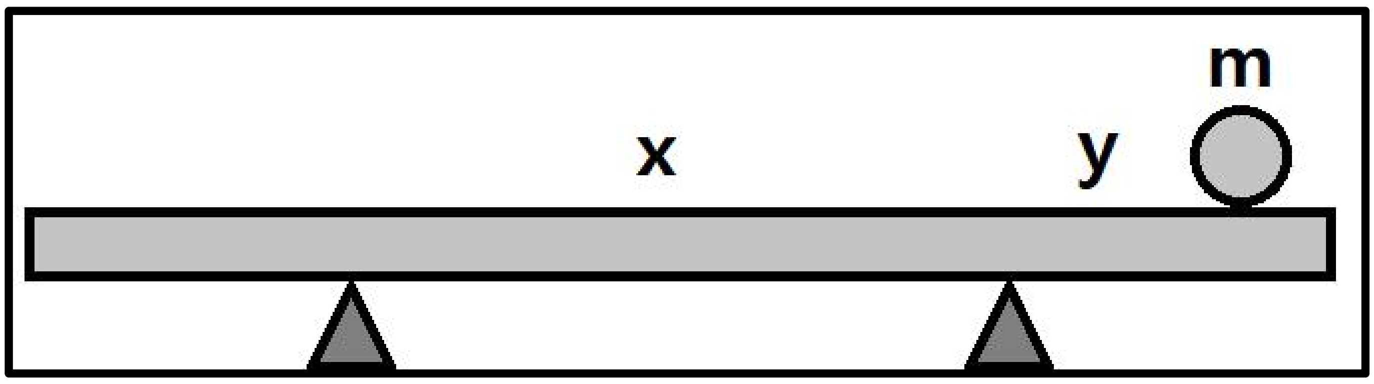
*m은 물체의 질량, x는 왼쪽 받침대까지의 거리, y는 두 받침대 사이의 거리이다.
예시) m=10, x=3, y=7이다. m의 영향력을 구하여라

1단계 : $(10,3)$　　2단계 : $(10,-3)$　　3단계 : $\frac{1}{7}(10,-3)$　　4단계 : $\frac{10}{7}(10,-3)$

(1) m=10, x=3, y=8
(2) m=6, x=2, y=4
(3) m=15, x=4, y=5
(4) m=13, x=2, y=7

답
(1) $(11,-3)\frac{5}{4}$
(2) $(6,-2)\frac{3}{2}$
(3) $(9,-4)3$
(4) $(9,-2)\frac{13}{7}$

유형 2) 오른쪽 물체의 영향력을 구하라.



*m은 물체의 질량, x는 두 받침대 사이의 거리, y는 오른쪽 받침대까지의 거리이다.
예시) m=10, x=5, y=3이다. m의 영향력을 구하여라

1단계 : $(3,8)$　　2단계 : $(-3,8)$　　3단계 : $\frac{1}{5}(-3,8)$　　4단계 : $2(-3,8)$

(1) m=10, x=5, y=2
(2) m=6, x=6, y=5
(3) m=15, x=2, y=3
(4) m=13, x=5, y=7

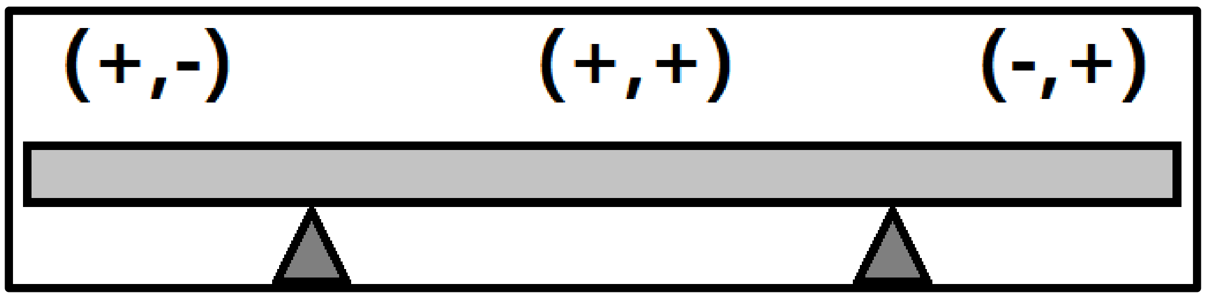
답
(1) $10=(-4,14)$
(2) $6=(-5,11)$
(3) $15=\frac{15}{2}(-3,5)$
(4) $13=\frac{13}{5}(-7,12)$

이제 두점의 내부, 외부에 있는 물체의 영향력을 구하는 법을 알았으므로 이제 분산법을 이용해 문제를 풀 준비가 되었다. 한번 기출에 적용하기 전에 마지막 단계를 거치도록 하자.

(8) **영향력을 통한 위치의 추론**

일직선 상에 점 A, B, C가 존재한다. C에서 A, B까지의 거리가 2:3일 때 C의 위치는?
이 질문에 단 하나의 정답을 내놓을 수 있는가? 없다. 왜냐하면 C는 A, B의 내부에 있는 2:3 내분점이거나 A, B의 외부에 있는 2:3 외분점일 수도 있기 때문이다. 이때 이용하는 조건이 **영향력의 부호조건이다.**
내분법과 외분법을 통해 물체의 위치에 따른 영향력의 부호는 아래와 같을것이다.

물체의 위치에 따른 영향력의 부호는 아래와 같다.



따라서, 두 지점에 대한 물체의 영향력을 알면 물체의 위치까지 추론이 가능하다. 그렇다면 물체의 영향력을 통해 물체의 위치를 구하기 위해서는 어떻게 해야할까? 여기서 사용할 내용이 앞에서 배운 비례식 예제이다.

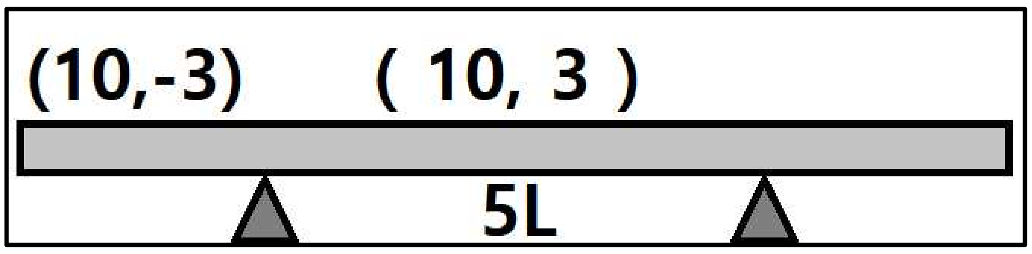
예제 1 a:b=1:3, a+b=80일때 a와 b의 값을 각각 구하여라. (합 이용)	예제 2 a:b=3:4, b-a=10일때 a와 b의 값을 각각 구하여라. (차 이용)

위 예제를 거리를 구하려는 시점으로 보면 아래와 같다.

예제 1 두 받침대 사이에 존재하는 물체에서 받침대까지의 거리가 1:3이며 받침대 사이의 거리는 80이다. 두 받침대까지의 거리는?	예제 2 두 받침대 외부에 존재하는 물체에서 받침대까지의 거리가 3:4이며 받침대 사이의 거리는 10이다. 두 받침대까지의 거리는?

즉, 영향력을 통해 물체의 위치를 거리를 추론할때도 비례식을 사용한다. 그럼 영향력을 통한 위치는 어떻게 구하는지 적용방법을 알아보도록 하자.

유형 1) 내부 물체의 위치



영향력이 (10,3)이면 물체는 두 받침대의 내부에 있으며 거리비는 3:10, 거리합은 5L일것이다. 내부 물체의 영향력은 비례식의 성질을 이용해 아래와 같은 단계로 구하도록 한다.

1단계 : 영향력의 반대비가 거리비 이므로 반대비로 표현한다.
= 두 받침대까지의 거리는 (3,10) *영향력이 아닌 거리를 표현한것이다

2단계 : 두 받침대까지의 거리 합을 1로 맞춰준다.
= $\frac{1}{13}(3,10)$

3단계 : 두 받침대까지의 거리 합을 실제 거리 합으로 맞춰준다
= $\frac{5L}{13}(3,10)$. 따라서 두 받침대까지의 거리는 각각 $\frac{15}{13}L, \frac{50}{13}L$이다.

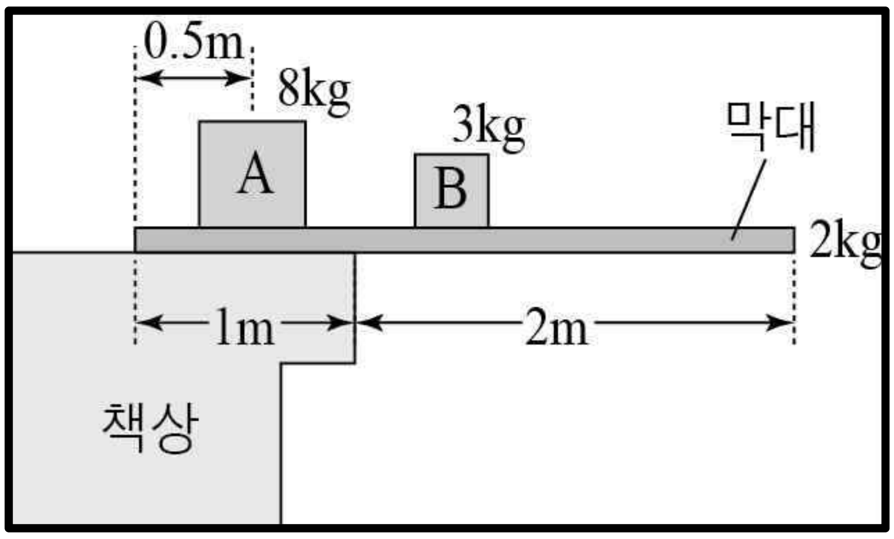
그럼 물체가 외부에 있을 때는 어떻게 할까? 마찬가지다. 단, 왼쪽이냐 오른쪽이냐를 판단 후 **거리 차**를 이용한다. 영향력이 (10,-3)인것처럼 외부에 있을때는 아래와 같이 구한다.

1단계 : 영향력이 (+,-)이므로 왼쪽에 있으며 거리비는 절대값 반대비인 3:10이므로 3,10이라 잡는다.
= 거리비가 (3,10)
2단계 : 거리차를 1로 맞추고 다시 실제 거리차로 맞춰준다.
= $\frac{1}{7}(3,10) \rightarrow \frac{5}{7}(3,10)L$ 따라서, 두 받침대까지의 거리는 $\frac{15}{7}L, \frac{50}{7}L$이다.
이제 분산법을 통해 물체의 영향력, 거리까지 추론하는 법을 알 수 있다. 이제 문제 조건 해석법을 보자.

(9) 문제 조건의 영향력적 해석

분산법을 다 배워두고 조건을 영향력적으로 해석하지 못하면 무슨 소용이 있겠는가? 이번엔 문제 조건을 영향력으로 해석 해볼 것이다. 기본적으로 수직항력, 장력을 통해 접근을 하는데 한번 예제를 같이 풀어보도록 하자.

20150717



그림과 같이 질량 2kg, 길이 3m인 균일한 막대 위에 질량 8kg인 물체 A와 질량 3kg인 물체 B를 올린 후, 막대를 책상에 올려놓았더니 막대가 수평을 유지하였다. 막대는 책상에 1m 걸쳐있고, 막대의 왼쪽 끝과 A 사이의 거리는 0.5m이다. B만 천천히 오른쪽으로 움직일 때, 막대가 수평을 유지할 수 있는 A와 B 사이 거리의 최댓값은? (단, A, B의 크기와 막대의 두께는 무시한다.)

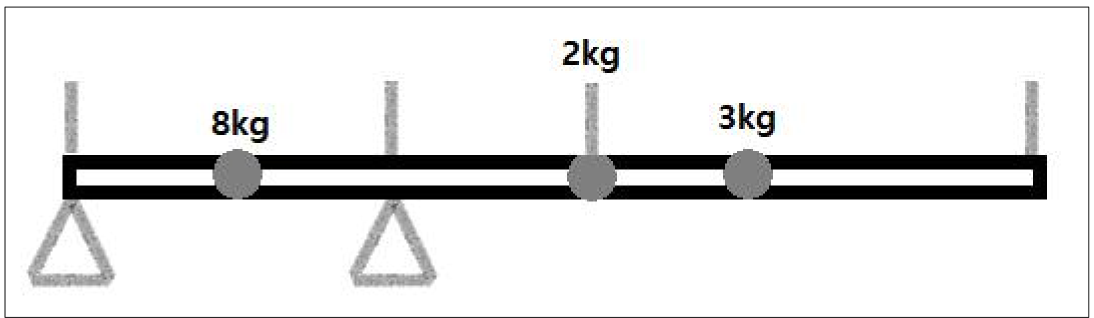
① 1m ② $\frac{4}{3}m$ ③ $\frac{3}{2}m$ ④ $\frac{5}{3}m$ ⑤ $2m$

영향력을 풀기 전에 앞에서 다룬 자료의 변형을 먼저 하도록 하자.

1단계 : 대칭형 물체는 대칭축 지점에 원, 또는 점으로 표시한다.
- 점으로 표시할 경우 그림이 깔끔해져 쾌적해진다.

2단계 : **회전 가능한 지점에는 받침점을 그려준다. (수직항력 조건 사용)**
- 실제로 시계방향으로 회전하더라도 반시계방향으로 회전할때의 받침점도 그려준다.

3단계 : 최대 최소 문제에서 실제 회전축을 제외한 **수직항력이** 0인 받침점은 지워준다.
- 3단계에서 지울거면 2단계에서 굳이 왜 또다른 받침대를 그리냐고 생각할 수 있다. 하지만, 여기서 **수직항력이 0인 지점의 존재**는 뒤에서 다룰 **분산법** 풀이에서 꼭 필요한 단서로 적용된다.



변환 상태.

B(3kg)이 점점 오른쪽으로 이동하면 시계방향으로 회전하므로 왼쪽 수직항력은 0이 된다. 영향력의 합은 모든 물체의 질량, 무게합과 같으므로 질량으로 전체 영향력을 표시하면 (0, 13)이 된다.

A의 영향력은 거리비가 1:1 내분이므로 A : 8 = (4,4)
막대의 영향력은 거리비가 3:1 외분이므로 B : 2 = (-1,3)
그런데 A, 막대, B의 영향력 합이 **(0,13)**이므로 B의 영향력은 (-3, ?)이다. 그런데 B의 영향력 **합은 3이 나와야 하므로** B의 영향력은 **(-3, 6)**이 된다.

B의 영향력을 구했으니 위치를 구하자. (-,+)이므로 오른쪽이며 거리비는 2:1이다. 또한 거리차가 1m이므로 두 받침대까지의 거리는 2m, 1m이다. 오른쪽 받침대에서 A까지의 거리는 0.5m 이므로 A와 B 사이 거리는 1.5m이다.

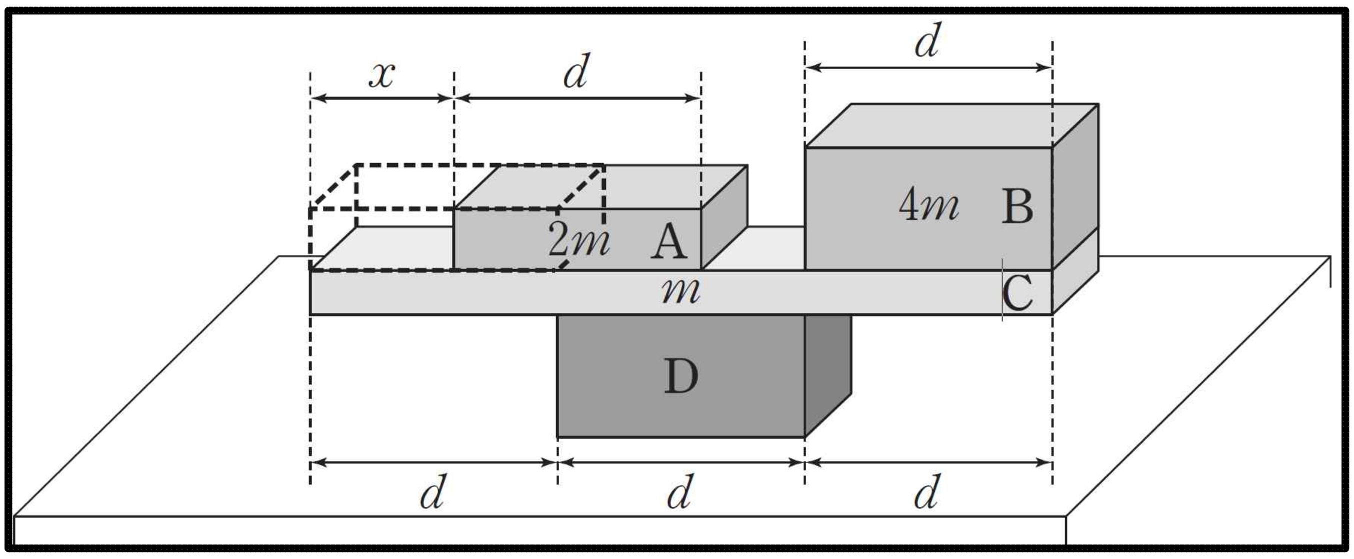
즉, 보통 분산법을 통해 문항을 풀 때는 아래와 같다.

1. 자료의 변형을 거친다.
2. 움직이지 않는, 영향력이 변하지 않는 물체의 영향력을 구한다.
3. 문제 조건을 통해 "전체 영향력" 조건을 파악한다.
4. 움직이는, 영향력이 변하는 물체의 영향력을 구하고 문제에서 구하고자 하는 값을 구하도록 한다.

몇가지 기출 문제를 같이 풀어보도록 하자.

20141120

그림은 직육면체 나무 막대 A~D가 평형을 유지하고 있는 상태에서 A를 B쪽으로 x만큼 이동시켰을 때, 평형을 계속 유지하고 있는 것을 나타낸 것이다. A, B, C의 질량은 각각 2m. 4m, m이고, D는 수평한 책상면 위에 고정되어 있다.



평형을 유지하기 위한 x의 최댓값은? (단, 막대의 밀도는 균일하고, 마찰은 무시한다.)

① $\frac{1}{2}d$　② $\frac{3}{5}d$　③ $\frac{2}{3}d$　④ $\frac{3}{4}d$　⑤ $\frac{4}{5}d$

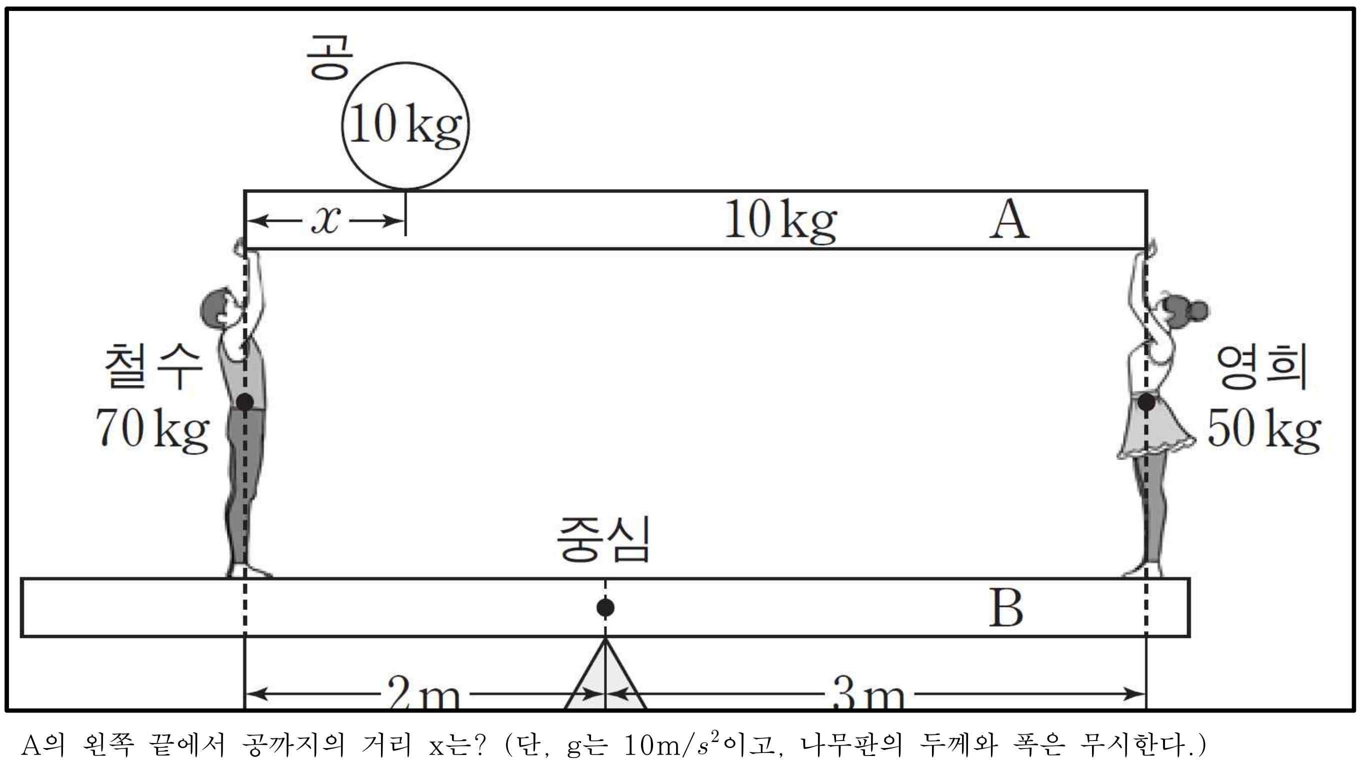
역시 자료변형을 거치면 D의 양 끝점에 받침대가 생기고 x가 최대일 때 왼쪽 영향력이 0이므로 A, B, C의 영향력 합은 (0, 7)이 될것이다. (m 생략)

C는 1:1 내분을 해주면 (0.5,0.5)일것이며 B는 거리 3:1로 외분해주면 (-2,6)이다. 그럼 B, C의 영향력 합은 (-1.5,6.5)이며 이를 통해 A의 영향력을 구하면 (1.5,0.5)이다. 따라서 거리비는 1:3으로 C의 맨 왼쪽에서 1.25d 떨어진 거리에 A가 존재한다. A는 왼쪽으로부터 x+0.5d만큼 떨어져 있으므로 1.25d=x+0.5d다. 따라서 x=0.75d인 4번이 정답이다.

*** 영향력을 통해 위치를 구한 풀이.**

20131120

그림과 같이 받침대 위에 놓인 나무판 B 위에서 철수와 영희가 공이 놓여 있는 나무판 A의 양쪽 끝을 수직으로 떠받치고 있다. 직육면체 나무판 A와 B는 지면과 수평을 이루고 있으며 공은 정지해 있다. B의 중심에 놓인 받침대로부터 철수와 영희까지의 거리는 각각 2m, 3m이고, A의 길이는 5m이다. 철수와 영희의 질량은 각각 70kg, 50kg이고, 공과 A의 질량은 각각 10kg이다. 공과 A, B의 밀도는 균일하다.



A의 왼쪽 끝에서 공까지의 거리 x는? (단, g는 10m/s^2이고, 나무판의 두께와 폭은 무시한다.)

① 0.5m　② 0.6m　③ 0.7m　④ 0.8m　⑤ 0.9m

공의 10kg은 철수와 영희를 통해 철수, 영희 발밑에 도달하며 막대 A도 철수, 영희의 발밑에 도달한다. 또한 철수, 영희의 질량도 각각 철수, 영희 발밑에 도달한다. 따라서, 공, A, 철수, 영희의 영향력이 모두 철수, 영희 발밑에 도달하는데 받침대에서 해당 지점까지의 거리비가 2:3이므로 도달하는 힘의 비는 3:2이다. 따라서 철수와 영희의 아래 지점에 대한 영향력의 합은 (3k,2k)꼴로 나올것이다.

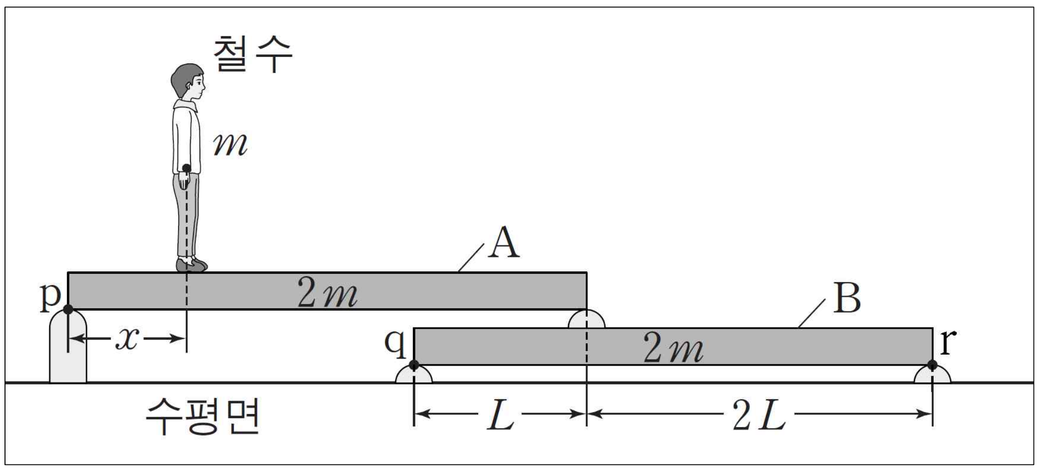
철수의 영향력 = (70,0), 영희의 영향력 = (0,50) A의 영향력은 (5,5)가 될것이다. 여기서 중요한건 공의 영향력이다. 공은 철수, 영희까지의 거리비가 x:5-x이므로 영향력이 (10-2x,2x)가 된다.

따라서 영향력의 합은 (70,0)+(0,50)+(5,5)+(10-2x,2x)=(85-2x,55+2x)=(3k,2k)이다.

$85-2x:55+2x=3:2, 165+6x=170-4x, x=0.5$따라서 x는 0.5m이다.

***거리 미지수인 x에 대한 영향력을 나타내 미지수를 구한 풀이.**

20150920 그림과 같이 질량 m인 철수는 나무판 A에 서 있고, 질량 2m, 길이 3L인 동일한 나무판 A, B는 수평면과 나란하게 양끝이 받침대로 고정되어 있다. 철수가 점 p에서 x만큼 떨어진 곳에 정지해 있을 때, 받침대가 나무판을 받치는 힘은 점 p와 q에서 같고, 철수, A, B는 평형을 이룬다. p, q는 각 나무판의 왼쪽 끝점이다.



x는? (단, 나무판의 밀도는 균일하며, 나무판의 두께와 폭, 받침대의 질량, 철수의 크기는 무시한다.)

① $\frac{1}{2}L$ ② $\frac{3}{5}L$ ③ $\frac{2}{3}L$ ④ $\frac{3}{4}L$ ⑤ $\frac{4}{5}L$

문제를 읽어보면 **"받침대가 나무판을 받치는 힘은 점 p와 q에서 같고=p,q에 대한 영향력이 같다."라는 것을 알 수 있다.** 그런데 철수의 영향력은 p, q 외에도 B의 오른쪽 지점에도 전달된다. 따라서 B의 맨 오른쪽 받침대를 r이라 하고 p, q, r에 대한 영향력 (p, q, r)을 구해보도록 하자.
먼저 B는 p에는 전달되지 않고 q와 r에 전달될것이다. B의 중심으로부터 거리비가 1:1이므로 B의 p, q, r에 대한 영향력은 (0,m,m)이다. A는 처음에 m, m으로 분산되나 이 m이 q와 r에 2:1로 분산된다. 따라서 A의 영향력은 $(m,\frac{2}{3}m,\frac{1}{3}m)$이다. 문제는 철수다. 철수는 처음에 3-x:x로 분산된다. 그리고 x에 해당하는 값이 2:1로 다시 한번 분산된다. 하지만 이러면 철수의 영향력이 x에 관해 복잡한 식으로 나올것이다. 물론 그렇게 풀어도 답은 나오지만 좀더 깔끔한 풀이를 위해 임의의 미지수로 영향력을 잡는다. 아래 내용을 보자.

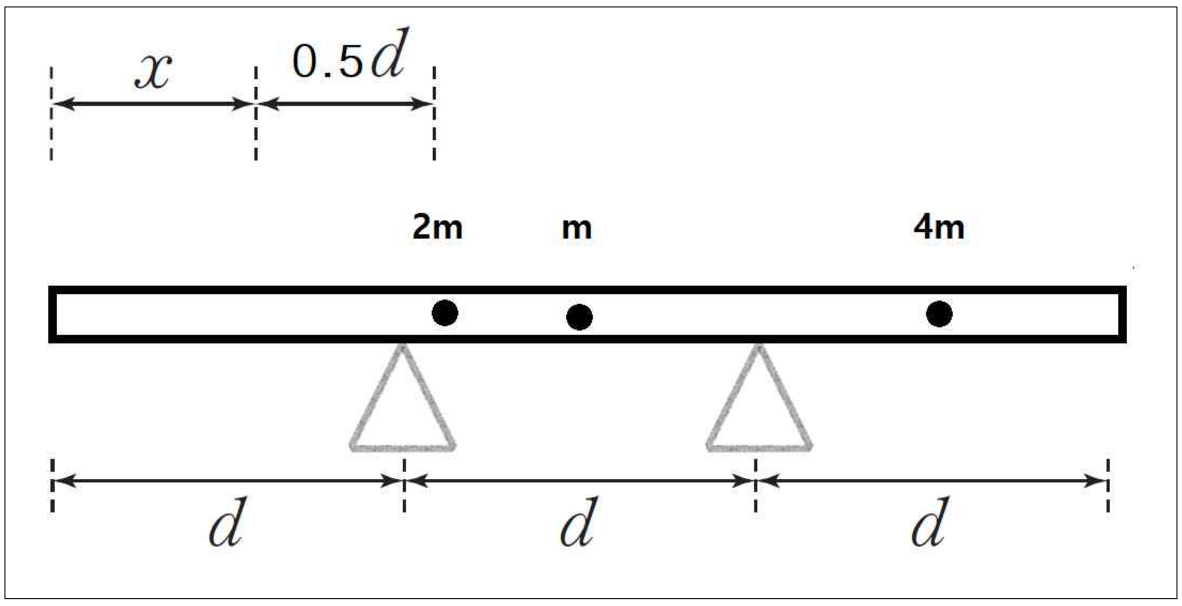
영향력의 합은 힘의 크기와 같다.

즉, 철수의 무게는 처음에 양쪽으로 분산되는데 **그 합은 m이 나와야 한다.** 따라서 처음에 m-3k, 3k로 분산된다고 해도 **상관 없다. 그리고 이 3k는 다시 2:1로 분산되므로 A의 영향력은 (m-3k,2k,k)이다.**
따라서 p, q에 대한 전체 영향력은 $(m+m-3k,m+\frac{2}{3}m+2k)$이며 p, q에 대한 영향력은 같다.
따라서 $2m-3k=\frac{5}{3}m+2k, 5k=\frac{1}{3}m, 3k=\frac{1}{5}m$. 따라서 철수의 영향력은 처음에 $\frac{4}{5}m, \frac{1}{5}m$으로 분산 된 것이다. 따라서 4:1로 분산 되었다는것은 거리비가 1:4라는것을 의미한다. 따라서 x는 $\frac{3}{5}L$이다.

*** 분산된 영향력을 편한 미지수로 잡고 분산 비율을 통한 거리의 역추론.**

(10) 내분법과 외분법의 동등성

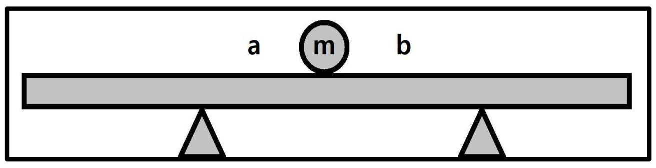
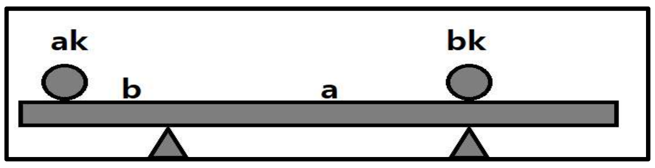
위 내용을 통해서 알 수 있는 내용은 영향력을 "거리에 관한 식"으로 나타내도 답이 나오고 "한쪽 영향력을 임의의 미지수로 잡아도" 풀린다. **하지만 이러한 의문을 가질 수 있다. 아래 그림을 보자.**



20141120 자료 변환

의문 : 과연 왼쪽 끝점에서 0.5d+x만큼 떨어진 A는 **두 받침대 사이에 있는가 외부에 있는가?**

그렇지 않은가? 우리는 A의 영향력을 (2m-k,k)라 두고 B, C영향력과 전체 영향력 조건을 이용해 A의 영향력을 구할 수 있으나 만약 **거리를 통해 영향력을 나타내려면 내분법을 써야하는가 외분법을 써야 하는가? x가 0.5d보다 작으면 외부에 있고 0.5d보다 크면 외부에 있게될텐데** x를 구하기 전까지는 외분법을 쓸지 내분법을 모르는것 아닌가? 결론을 말하자면 **무엇을 쓰든 올바른 정답이 나온다**. 그 이유는 외분법과 내분법이 **원리적으로는 서로 같기 때문이다**.

	
내분법 증명 그림	외분법 증명 그림

내분법과 외분법이 원리적으로 동등하다면 **내분법으로 외부 물체의 영향력이 증명 가능하고 외분법으로 내부 물체의 영향력이 증명될것이다**. 그 증명이 가능한 이유는 내분법, 외분법 증명 과정에서의 **길이 부호 방향의 설정 때문이다**. 왼쪽, 오른쪽 받침대를 각각 A, B라 하겠다.

내분법에서는 **길이의 부호를 A는 좌우로 각각-,+ B는 좌우로 각각 +,-라 설정을 하였다. 그래서 가운데 물체의 거리가 +,+로 나오고 내분법에 의해 부호를 바꿔주면 영향력이 거리가 나온것이다**. 내분법으로 외분 물체의 영향력 부호가 같게 나오는지 확인해보자.

내분법은 좌우 길이 부호를 바꿔주면 영향력의 부호가 나온다.

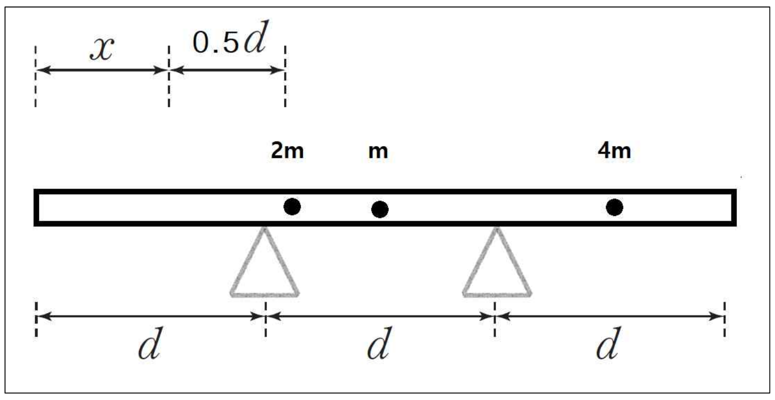
(1) A의 왼쪽 물체의 영향력 부호는 +,-가 나오는가?
A의 왼쪽에 있다면 내분법 거리 부호로 인해 거리 부호가 -,+가 나오며 내분법에 의해 부호는 +,-이다.
(2) B의 오른쪽 물체의 영향력 부호는 -,+가 나오는가?
B의 오른쪽에 있다면 내분법 거리 부호로 인해 거리 부호가 +,-가 나오며 내분법에 의해 부호는 -,+가 나온다.

내분법으로 외부 물체 부호가 같게 나옴을 확인 가능하다. 그럼 이번엔 외분법으로도 내부 물체 부호가 올바르게 나오는가? 확인해보자. A 왼쪽 물체를 증명할 때는 A, B의 좌우 거리 부호를 모두 +,-로 잡고 반대로 B의 오른쪽 물체를 증명할 때는 A, B의 좌우 거리 부호를 모두 -,+로 잡았다. 외분법에 의한 영향력의 부호는 아래와 같이 정했다.

외분법은 좌우 길이 부호를 바꾼 뒤 먼쪽의 부호를 바꿔주면 부호가 나온다.

(1) 왼쪽 외분에 의한 받침대 사이 물체의 영향력 부호는 +,+가 나오는가?
A의 좌우 거리 부호는 +,-고 B의 좌우 거리 부호는 +,-이다. 따라서 내부 물체의 거리 부호는 -,+이며 이를 서로 바꾸면 +,-가 된다. 그리고 왼쪽 외분에 의해 오른쪽 부호는 바뀌므로 +,+가된다.
(2) 오른쪽 외분에 의한 받침대 사이 물체의 영향력 부소는 +,+가 나오는가?
A의 좌우 거리 부호는 -,+고 B의 좌우 거리 거리 부호는 -,+이다. 따라서 내부 물체의 거리 부호는 +,-이며 이를 서로 바꾸면 -,+가된다. 그리고 오른쪽 외분에 의해 왼쪽 부호는 바뀌므로 +,+가 된다.

따라서 **내분법으로 외부 물체의 영향력이 나오고 외분법으로 내부 물체의 영향력이 나온다**. 따라서, **거리에 관한 미지수로 영향력을 써도 실제 위치에 대한 영향력이 나온다**. 확인해보도록 하자.



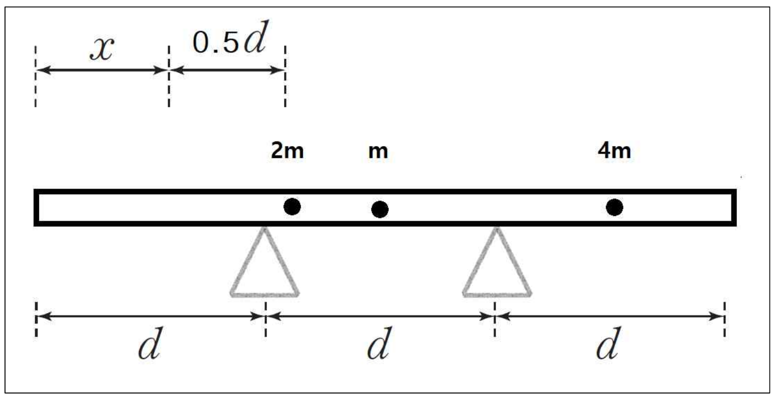
20141120 자료 변환

m과 4m의 영향력은 각각 (0.5,0.5), (-2,6)으로 합이 (-1.5,6.5)이다.
이제 2m의 영향력을 외분 내분 해도 답이 나오는지 확인해보자.

외분법 사용 : 2m이 왼쪽 받침대보다 왼쪽에 있다 하면 두 받침대까지의 거리는 0.5-x, 1.5-x이다. 따라서 영향력은 (1.5-x,x-0.5)2=(3-2x,2x-1)이다. 따라서 3-2x-1.5=0, x=0.75이다.
내분법 사용 : 2m이 내부에 있다 하면 두 받침대까지의 거리는 x-0.5, 1.5-x이다. 따라서 영향력을 구하면 (1.5-x,x-0.5)2=(3-2x,2x-1)이므로 3-2x-1.5=0, x=0.75

즉, 실제로는 **내부** 있으나 **외분법**을 사용해도 답이 나옴이 확인 가능하다.

그럼 한가지 의문을 더 제기해보겠다. **미지수 x로 내분법을** 이용하여 영향력을 나타내고 **외분법으로 거리를 추론해도 옳게 나오는가?** 내분법으로 영향력 표시해놓고 **외분법으로 거리화를 해도 옳게 나오는가?**



20141120 자료 변환

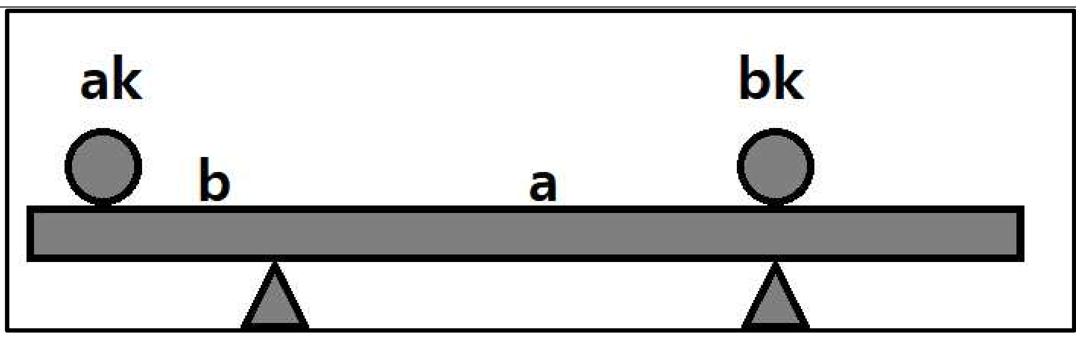
2m의 영향력을 **외분법**으로 표기하면 (3-2x,2x-1)이며 **내분법으로 표기하면** (3-2x,2x-1)이다.

즉, 외분법을 쓰든 내분법을 쓰든 그 의미가 같기 때문에 무엇을 이용하든 상관없다.

단, 부호에 주의하도록 한다. (거리 좌표 부호)

(11) 위로 작용하는 힘의 영향력

여태까지 아래로 작용하는 힘, 무게의 영향력에 대해 배웠다. 만약, 아래가 아닌 위로 작용한다면 이 힘의 영향력은 어떻게 될까? 간단히 증명해보도록 하자.



ak와 bk에 의한 왼쪽 받침대와 오른쪽 받침대에 대한 영향력의 합은 (ak+bk,0)이다.

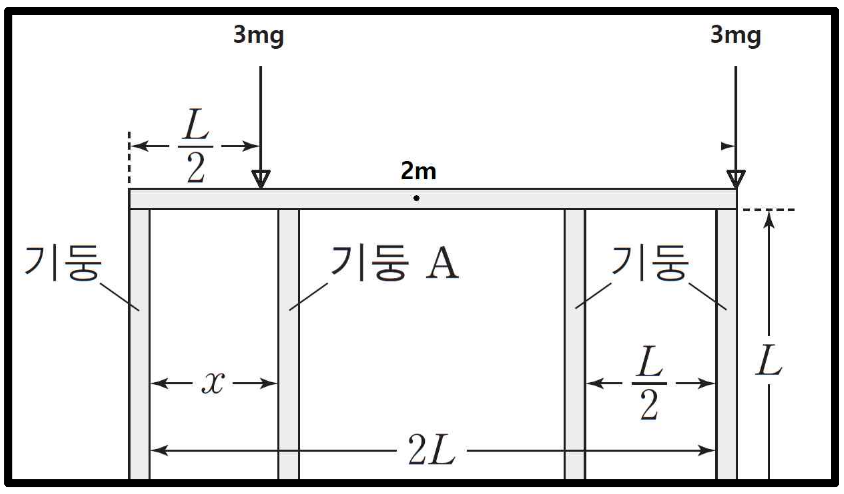
만약, 왼쪽받침대 지점을 위로 ak+bk로 당겨주면 두 받침대에 대한 전체 영향력은 (0,0)이 된다.

따라서 그 힘의 영향력은 (-ak-bk)이 된다.

즉, 힘의 방향이 반대면 전체 부호를 바꿔주면 된다.

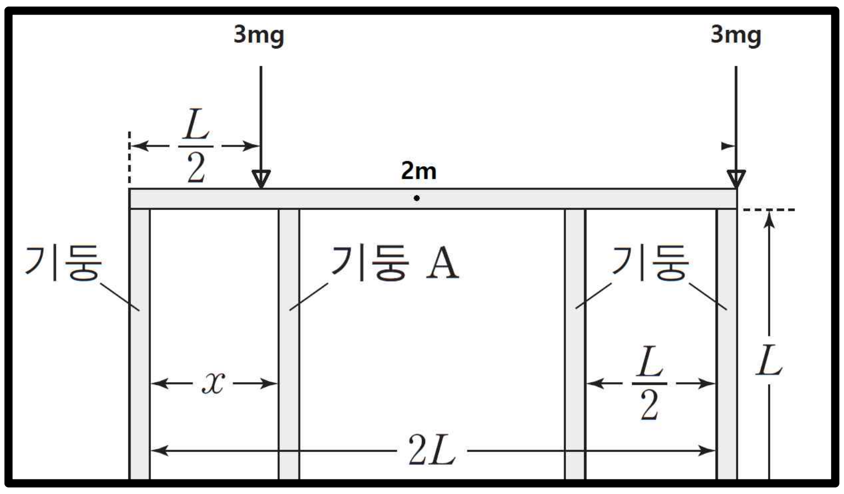
쉽게 말해 어떤 지점에 **아랫방향으로 준 힘의 영향력이 (a,b)면 똑같은 지점에, 같은 힘의 크기로 위로 당겨주는 힘의 영향력은 (-a,-b)가 된다는 의미이다.** 이러한 개념은 부력, 장력에 사용되고 수직항력에도 사용이 되곤 하는데 아래 문제를 보도록 하자.

20161118 수정

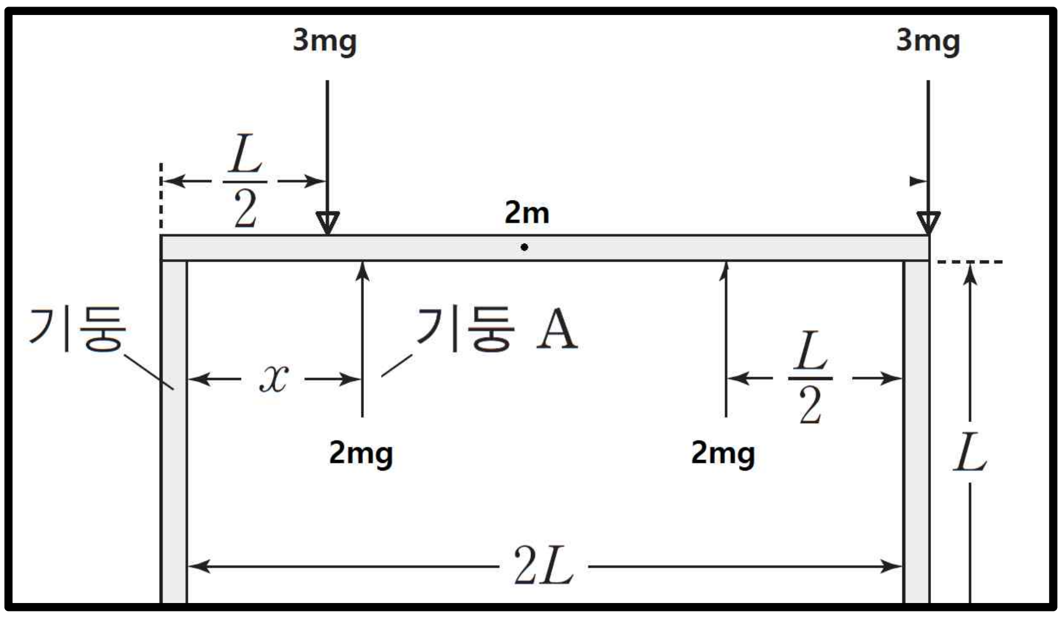


그림은 4개의 막대가 질량 2m인 막대와 두 힘 3mg를 받는 모습이다. 이때, 네 기둥에서 작용하는 수직항력의 크기가 모두 같을 때, x의 값을 구하여라.

20161118 수정



받침대가 4개라서 3mg, 2m의 영향력을 구하기는 어렵다. 이럴 땐, 수직항력의 **영향력**을 계산하면 된다.
가운데 기둥 2개의 수직항력을 힘으로 해석하면 아래와 같은 시선으로 볼 수 있다.



그럼 3mg, 2m, 2mg들에 의한 두 기둥에 대한 영향력이 (2m,2m)이라 해석이 가능하다. (질량단위)
왼쪽 3mg는 거리비가 1:3이므로 (2.25m,0.75m)이며 오른쪽 3mg는 (0,3m), 막대 2m은 (m,m)이며 오른쪽 2mg는 거리비가 3:1인데 **윗방향이므로** (-0.5m,-1.5m)이다.
이들의 합은 (2.75m,3.25m)이다. 전체 영향력이 (2m,2m)이므로 x만큼 떨어진 2m의 영향력은 (-0.75,-1.25)다. 따라서 영향력의 비가 3:5이므로 거리비는 5:3, 거리합이 2L이므로 기둥 A로부터 두 받침대까지의 거리는 각각 $\frac{5}{4}L, \frac{3}{4}L$이다. 따라서 $x = \frac{5}{4}L$이다.

여기까지가 분산법에 대한 이론이다. 이제 분산법을 이용하여 문제들을 풀어보도록 하자.

* 뒤에서 풀 문항중에는 **분산법이 아닌 다른 방법으로 더 풀었을 경우 더 간단한 문제도 있다.** 하지만, 그럼에도 불구하고 분산법으로 풀게 하는 이유는 이러한 과정에서 **어떤 문제를 어떤 방식으로 풀었을 때 좋을지 판단하는 눈이 길러지기 때문이다.** 따라서 식이 복잡하더라도 차근차근 식을 세워 풀어보도록 하자.