처음 만나는 개념
하나. 기반논리

뜻이 있는 곳에 길이 있다.

'뜻'은 다른 말로 하면 '명분과 가치'이다.
20대를 살아가는, 살아갈 너희들은 이 말을 믿어야 한다.
'선택의 순간' 가장 중요한 판단 기준이 바로 '나의 뜻'이다.
어떤 일에 '뜻'을 가지면 반드시 사람이 모이고 길이 생긴다.

믿음은 바라는 것들의 실상이다.

이 말은 성경 구절이지만 세상을 살아가는데 반드시 필요한 '신념'이다.
모든 바라는 것들은 '강하게 믿으면 실상'이 된다.

믿으면 된다.

미천한 수학자

믿으면 된다.

미천한
수학자

‘수학은 암기가 아니다.’

이것은 올바른 주장입니다.

수학은 ‘암기’만으로는 절대 해결되지 않는

‘그 무엇’인가가 존재하기 때문입니다.

하지만 이 주장이 ‘암기는 필요 없다.’

를 의미하는 것은 아닙니다.

우리는 ‘정확한 수학 개념’을 인지해야 하고,

그것들은 나중에 찾아볼 수 있도록

잘 ‘정리’되어 있어야 합니다.

.

.

.

‘공부는 때론 무의미해 보이는 과정의 반복이다.’

기억되지도 않은 지식이

논리로 사용될 수는 없는 것입니다.

강제로, 억지로라도 외울 것은 외워야 합니다.

믿으면 된다.

미친한 수학자

책의 구성과 학습법

1. 구조도 그리기

- 구조도가 그려져 있지 않으면 배운 내용을 바탕으로 그려본다.
- 병렬적 방식이 아닌 유기적 흐름으로서 수학을 인지하는 것이 꾸준한 학습에 도움을 준다.

: 구조도를 그리는 것은 <u>생각을 정리하는 것</u>은 다음 지식을 받아들이고, 이해하고, 기억된 지식을 사용하는 등 모든 학습에 중요하고 또한 유효하다.
: 생각 정리의 목적이지 암기의 목적이 아니다.

2. 필기

- 최대한 필기할 것이 없도록 하긴 했으나 일부 필기할 것도 있다.
(단, 암기노트에는 모든 내용, 구조도까지 들어가 있을 것)

3. 예제

- 모든 개념은 예제와 유기적으로 연동되어 기억되어야 하므로, 개념복습에서 예제의 모든 과정을 하나하나 밟아 보는 것은 필수이다.

4. 복습법

- 1회 차 복습은 책으로 한다. 책을 정독하고 필기한 내용을 정리하며 '구조도'를 그려본다. 당장은 문제를 푸는 것이 도움이 되지 않는다고 느낄 수 있으나 앞으로 방대한 양의 지식을 흡수하는 데에 반드시 필요한 과정이다.
- 2회 ~ 마지막 회차 복습에는 '암기노트가 제공' 될 것이므로 암기노트의 내용을 읽고, 암기 테스트의 빈칸을 채우고 예제를 풀어보는 행위 자체가 '복습'에 엄청난 도움을 줄 것이다.

목차

Part 1. 식에 대한 논리

Part 2. 함수의 논리

목차

목차

Part 5. 이동과 영역

Part 6. 집합의 언어와 명제의 형식

목차

Part 7. 함수 기본 이론

Part 8. 유리함수와 무리함수

Part 9. 등차수열과 등비수열

목차

Part 10. 수열의 합과 수학적 귀납법

Part 11. 지수와 로그

저자의 말...!

<u>기반논리의 책이 두꺼워진 이유는</u>

<u>미적분, 확통, 기벡에 비해서 접할 기회가</u>

<u>너무 적기 때문입니다.</u>

<u>분명히 모든 문제에 '부분적인 논리'로 들어감에도 불구하고,</u>

그리고 꽤 많은 부분에서

그 논리가 문제를 푸는 핵심적인 역할을 함에도 불구하고,

학생들은 이것을 경시합니다.

그래서 더 많은 문제를 실었습니다.

킬러는 아니지만 누군가에게는 어려울 수도 있습니다.

부디,

기반논리는

이 책 한 권으로 끝냈으면 좋겠습니다.

후에 이 책을 복습할 수 있는 암기노트를 제공했을 때,

단, 하루면 이 책 한 권을 복습할 수 있어야 합니다.

3개월 만에 성적 수직상승..

이런 말은 거르셔야 합니다.

어떤 사람은 키가 190으로 태어났고,

몸에 근육도 충분하고, 탄성도 좋고, 체력도 좋다고 합시다.

이런 사람이 만약 농구공을 한 번도 잡아본 적이 없다고 하죠.

이런 사람들은... 당연히 금방 농구를 잘 할 수 있게 되죠.

이런 사람들은 사람들 입에 굉장히 많이 회자가 되긴 하지만

그래서 저런 사람들이 엄청 많이 있다고 생각되기도 하지만

사실 굉장히 드물죠.

대부분은 다 기 170정도에 운동을 하지 않으면 체력이 떨어집니다.

약간의 차이가 있을 수 있지만 충분히 극복이 가능한 정도입니다.

결국 **미적분 내용은 농구하는 방법을 의미**하지만 이미 그전에

'미적분'을 받아들일 수 있는 지적인 능력을

결정하는 것은 기반논리입니다.

그래서 본인이 식도 잘 다루지 못하고, 식과 그래프와 개연성도 능숙하지 못하며,

상황과 상황의 동치도 능숙하게 다루지 못한다면

기초 체력부터 훈련하는 게 맞습니다.

목표가 최소 상위권 대학이라면

이 정도의 훈련을 하는 게 맞습니다.

이 훈련을 다 끝내고 견뎌보면

같은 미적분을 보더라도 시야가 달라질 것입니다.

수학의 논리란 상황과 상황의 동치를

이해하는 것이다.

각 상황을 정확히 이해해야 하고

이해한 상황들끼리 논리적으로 연결되어 있음을 느껴야 한다.

방정식의 상황을 함수의 상황으로 바꾸어 생각하고,

함수의 상황에서 관계식을 세우는 것.

이런 것이 바로 상황과 상황의 동치, 그리고 상황과 동치가 되는 관계식이다.

이런 예측은 불필요한 수식적 연산을 생략하게 하며,

논리적 확신을 갖게 한다.

밑 빠진 독에

물을 붓지 않으려면

반드시 기반논리에

시간을 투자하셔야 합니다.

믿으면 된다.

미친한 수학자

좌표평면 위에 중심이 (m, n)이고 반지름이 r인 원이 있다.
점 $\mathrm{A}(m+r, n+r+p)$ $(p \neq -r)$에서 이 원에 그은 접선 중 y축과 평행하지 않은 직선의 기울기를 $f(p)$라고 하자. p에 대한 방정식 $f(p)=1$의 두 실근을 p_1, p_2 $(p_1 < p_2)$라고 할 때, $\dfrac{p_2 - p_1}{r} = k+1$에 대하여 $k^3 + 3k^2 - 5k + 7$의 값을 구하시오.

우리가 버려야 하는 것은 조급함이고,
우리가 가져야 하는 것은 믿음이다.

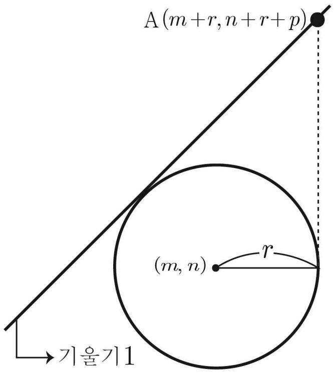
1) 정답 14

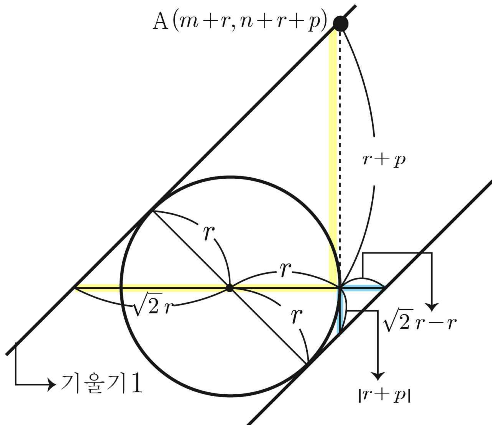
[풀이1] $f(p)=1$에 초점을 맞추어 상황을 해석해 보자.

$f(p)=1$인 p의 값은 '기울기$=1$'인 순간의 p이다.

- '문제의 상황'을 '동치가 되는 그래프의 상황'으로 옮겨보면 아래와 같다.

- 여기에서 '$p=$나머지 문자'로 표현가지 위해서는 '관계식'이 필요한데 이 식은 '도형의 상황'에서 풀어내도 된다.





(1) → 직선의 기울기가 1이므로 '직각이등변삼각형'의 성질에 의하여

$r+\sqrt{2}r=r+p \iff p=\sqrt{2}r$

(2) → 역시 이등변 삼각형의 성질에 의하여

$r+p=-(\sqrt{2}r-r)$ (좌표와 길이개념) $\iff p=-\sqrt{2}r \iff p=-\sqrt{2}r$

즉, $\dfrac{p_2-p_1}{r}=\dfrac{2\sqrt{2}r}{r}=2\sqrt{2}=k+1$ 그러므로 $k^2+k+1=8 \iff k^2+2k-7=0$

$k^3+3k^2-5k+7=(k^2+2k-7)(k+1)+14 \;=14$

[풀이2] 좌표평면 그 자체의 상황에 집중하여 접근해 본다.

(☆ 식을 세우고 반드시 '문제의 상황'과 '동치'가 되는지 확인한다.)

- $y=a(x-m-r)+n+r+p \quad (p\neq -r, r>0)$과 원이 '접한 상황'이다.

즉, $ax-y-(m+r)a+n+r+p=0$과 (m,n)사이의 거리 $=r$

- 여기에서 a는 내가 '둔 문자'이고, 이 관계식의 상황은 문제의 상황과 동치가 되기 때문에 a의 값은 1개만 존재한다는 것을 예측해야 한다. 비록 복잡해 보이지만 a에 대한 일차방정식일 것이라는 것을 예측해야 한다.

$$\Rightarrow \quad \frac{|am-n-(m+n)a+n+r+p|}{\sqrt{a^2+1}}=r \iff |r+p-ar|=r\sqrt{a^2+1}$$

$$\iff (ar)^2-2(r+p)ar+(r+p)^2=r^2(a^2+1)$$

$$\iff -2(r+p)ar+2rp+p^2=0$$

$$\iff a=\frac{p^2+2rp}{2r(r+p)} \quad (p\neq -r)$$

(예상대로 a에 대한 일차방정식이었고, 둔 문자인 a에 대한 방정식을 풀었다.)

$f(p)=1 \iff p^2+2rp=2rp+2r^2 \iff p=\pm\sqrt{2}r$ 나머지 과정은 [풀이1] 과 동일!

식에 대한 논리란?

수학에 있어서 '식'은 일종의 언어이다. 그 자체로 '어떤 상황을 표현'한다.

'식으로 표현'하고, '식을 변형'하고, '식을 해석'하는 것은

수학을 논리적으로 접근하기 위한 매우 중요한 밑바탕이며 수학에서 가장 어려운 과정이다.

식을 구성하는 문자 : 변수와 상수

수학이 '연산'의 영역이 '논리'의 영역으로 넘어가면 <숫자> 대신에 <문자>를 쓴다.

문자는 숫자를 의미하는 일차적 의미가 있을 뿐만 아니라.
상황을 의미하는 이차적 의미도 있다.

그래서 보통 문자를 정할 때, 그 상황을 표현하는 영어의 앞글자를 따는 경우가 많다.

일단 우리는 가장 러프하게 x, y, z를 변수, a, b, c를 상수라고 생각하자.

상황과 **관계식**이라는 말

방정식의 상황, 항등식의 상황, 함수의 상황

위에 언급된 상황들은 **변수와 상수가 모두 존재하는 상황**을 말한다.
문제에서 적절하게 **'상황을 설정'**하면 우리는 그 **'상황과 동치가 되는 관계식'**을 찾는다.

이것이 개념의 1단계이다.

우리가 배우는 수학적 개념이 많아지면서 상황과 상황이 연결되기 시작한다.
이것을 **'상황과 상황의 동치'**라고 한다.

- 교과서에서 이런 '상황과 상황의 동치'를 **직접 제시**하기도 하고,
- **관계식을 매개**로 상황과 상황이 연결되기도 한다.

이것이 개념의 2단계이며
이것을 인지하면서 문제를 풀어야 실력이 비교적 빠르게 는다.

#1. 식에 대한 논리의 틀

식

식 변형의 관점

성질
- 등식의 성질
- 부등식의 성질
- 절댓값의 성질

⋮

공식
- 대수적 공식 (항등식에 포함)
- 의미와 의미를 연결하는 식 (부정방정식에 포함)

식의 성격의 관점

항등식

방정식
- 정방정식
- 부정방정식 → 연립방정식

부등식

- 엄밀하게 보면 $2(x+1)=2x+2$와 같은 식은 '항등식'으로 볼 수도 있지만, '해가 무수히 많이 존재하는 방정식'으로 볼 수도 있다.

#2. 다항식 구구단

- #1의 구조도에서 <공식>에 해당하는 내용이다.
- 마치 구구단을 암기하는 것보다 더 ‘강하게’ 암기되어야 한다.
  마치 머릿속 사진처럼 ‘식의 구조가 통째로 보일 때’까지
  ‘이제 완전하다.’라는 생각이 들 때까지 매일 쓰고, 반복하라.

#2-1. 이항공식

1) 곱셈공식과 인수분해, 완전제곱식

① $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$	② $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

③ $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$	④ $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$ $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

⑤ 기타공식
- $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2) = a^4+a^2b^2+b^4$
- $a^n-b^n = (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+b^{n-1})$
  $a^n+b^n = (a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots+b^{n-1})$ (n은 홀수)

2) 곱셈공식의 변형공식 (합、차、곱)

① $a^2+b^2 = (a+b)^2-2ab$ $= (a-b)^2+2ab$	② $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ $(a-b)^2 = (a+b)^2-4ab$ $(a+b)^2 = (a-b)^2+4ab$

③ $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$ $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$	④ 그 외의 경우 : 방법을 기억 - $a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2$ - $a^5+b^5=(a^2+b^2)(a^3+b^3)-a^2b^2(a+b)$

#2-2. 단항공식

① $(x+1)^3 = x^3+3x^2+3x+1$ $(x-1)^3 = x^3-3x^2+3x-1$	② $(x+1)(x^2-x+1) = x^3+1$ $(x-1)(x^2+x+1) = x^3-1$

③ $x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$ $x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$	

④ 기타공식

- $(x^2+x+1)(x^2-x+1) = x^4+x^2+1$

  $x^4+x^2+1 = (x^2+x+1)(x^2-x+1)$
- $x^n-1 = (x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)$

  $x^n+1 = (x+1)(x^{n-1}-x^{n-2}+\cdots-x+1)$ (n은 홀수)

⑤ 참고) 계수에 대한 관점

- $(x+a)(x+b) = x^2+(a+b)x+ab$
- $(x+a)(x+b)(x+c) = x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$

(세 수의 합) (두수의 곱의 합) (세수의 곱)

#2-3. 삼항공식

① $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

② $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = a^3+b^3+c^3-3abc$

$a^3+b^3+c^3 = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca = \frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

if) $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca = 0 \Leftrightarrow a=b=c$

③ $(ab+bc+ca)^2 = (ab)^2+(bc)^2+(ca)^2+2abc(a+b+c)$

$(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2 = (ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)$

④ $a^4+b^4+c^4 = (a^2+b^2+c^2)^2-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$

#3. 항등식의 논리

항등식의 논리

식 변형 논리

관계식을 결정하는 논리
- 대입법 - ‘적절한 수치’를 대입
- 비교법 - 차수와 계수를 비교 (only 다항식)

항등식의 종류

관용적 항등식 ⇨ 함수표현과 같이 관용적으로 인정되는 항등식이 있다.
ex) $f(x)=x+1$

조건 항등식 ⇨ <항등식이 조건>으로 주어질 때는 다음 조건을 수반한다.
- · x값에 상관없이 성립하는 등식 = x에 대한 항등식
- · 모든 실수 x에 대해서 성립하는 등식 = x에 대한 항등식
- · 임의의 실수 x에 대해서 성립하는 등식 = x에 대한 항등식

공식 항등식 ⇨ 우리는 <다항식>에서 배운 논리를 통해 식을 변형하게 되는데 이 식 또한 항등식이며, 우리가 쓴 식이 항등식임을 인지하는 것으로 충분하다.

- 항등식과 방정식의 구분이 모호한 경우
: 예를 들어 $f(x)=g(x)$라는 식이 주어진 경우,
이 식이 항등식인지 방정식인지 구분하는 방법은 ‘그 식을 통해 구하는 것’에서 알 수 있다.
만약 변수에 해당하는 x를 구하는 상황이라면 방정식이라고 볼 수 있고,
미정계수에 해당하는 a, b, c를 구해야 하는 상황이라면 항등식으로 볼 수 있다.

- 항등식의 변형 - 주어진 항등식과 새로운 항등식에서 각각 관계식을 찾아야 관계식이 부족하지 않다.
: 주어진 항등식 $\xleftrightarrow[\text{논리변형}]{\text{동치변형}}$ 새로운 항등식

- 문자가 2개인 항등식
: 기본 항등식의 논리 + 문자가 1개인 항등식으로 만들기

믿으면 된다.

미천한
수학자

처음 만나는 개념

하나. 기반논리

믿으면 된다.

미천한 수학자