스파클러의 확통빈칸 N제

김경호 지음

01

규칙이 다음과 같은 게임을 할 때, 게임의 점수가 1점이 될 때까지 점수였던 서로 다른 수의 총합을 확률변수 X라 하자.

○ 시작할 때 점수는 2점이다.
○ 점수가 x점이었을 때 동전을 던져서 앞면이 나오면 $x+1$점이 점수가 되고, 뒷면이 나오면 0점이 점수가 된다.
○ 점수가 1점이 될 때까지 동전 던지기를 반복한다.

다음은 확률 $\mathrm{P}(X \leq 40)$의 값을 구하는 과정이다.

게임이 종료되기 위해선 점수가 0점이 된 후 앞면이 나와야만 하므로 점수가 0점이 된 이후의 상황은 고려하지 않아도 된다.
즉, 보유했던 점수의 최댓값이 k일 경우 $X=$ [(가)]이고 구해야 하는 값은
$\mathrm{P}(X \leq 40)=\mathrm{P}([(가)] \leq 40)$가 된다.
즉, 이는 $[(가)] \leq 40$을 만족시키는 2이상의 자연수 k의 최댓값 M에 대하여 $\mathrm{P}(k \leq M)$의 값을 구하는 것과 같다.
$\mathrm{P}(k=t)=$ [(나)]이므로 $\mathrm{P}(X \leq 40)=$ [(다)]이다.

위 과정에서 (가),(나)에 알맞은 식을 각각 $f(k), g(t)$, M, (다)에 알맞은 수를 각각 a, b라 할 때, $\dfrac{a}{1-b} \times f(4) \times g(10)$의 값을 구하시오.

14

0과 1이 적힌 각각의 카드 한 장이 들어있는 주머니 안에서 임의로 카드를 한 장 뽑아 수를 확인한 후 주머니에 되돌려 놓는 시행을 3번 반복한다. 다음은 3번까지 뽑은 수의 합이 $6n$번까지 뽑은 수의 약수가 될 확률을 구하는 과정이다. (단, n은 2이상의 자연수)

3번까지 나오는 수의 합이 될 수 있는 수는 $0,1,2,3$이다. $6n$번까지 나온 수의 합이 이들의 배수가 되는 확률을 구하는 것과 같으므로, 각각의 경우에 대해 확률을 구해보자.

ⅰ) 3번까지 나온 수의 합이 1일 때의 확률

3번까지 나온 수의 합이 1일 경우 이후에 나오는 숫자들과는 상관없이 배수를 만족한다. 그러므로 확률은 $[(가)]$이다.

ⅱ) 3번까지 나온 수의 합이 2일 때의 확률

3번까지 나온 수의 합이 2일 경우 남은 $(6n-3)$번의 시행 중에서 짝수 번 1이 나와야 한다. 그러므로 확률은 확률의 곱셈정리를 활용하면 $[(나)]$이다.

ⅲ) 3번까지 나온 수의 합이 3일 때의 확률

3번까지 나온 수의 합이 3일 경우 남은 $(6n-3)$번의 시행 중에서 3의 배수 번 1이 나와야 한다. 그러므로 확률은 확률의 곱셈정리를 활용하면 $[(다)]$이다.

한편, 일반적으로 $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1} {}_{6n-3}C_{3k} = \frac{2^{6n-3}-2}{3}$ 임이 알려져 있다.

그러므로, 3번까지 뽑은 수의 합이 $6n$번까지 뽑은 수의 약수가 될 확률은 $[(라)]$이다.

위 과정에서 (가),(나)에 알맞은 수를 a,b라 하고, (라)에 알맞은 식을 $f(n)$이라 하자. $\dfrac{9a}{b^2}\times\displaystyle\lim_{n\to\infty}f(n)$의 값을 구하시오.

22

동전을 한 개 던져 앞면이 나오면 게임을 종료하고, 뒷면이 나오면 한 번 더 동전을 던지는 시행을 게임이 종료될 때 까지 반복할 때, 동전을 던진 횟수를 확률변수 X라 하자. 다음은 확률변수 X의 분산 $V(X)$를 구하는 과정이다.

> k**번 동전을 던지고 게임이 종료 될 확률은** $\mathrm{P}(X=k)=$ [가] **이므로,**
>
> $E(X)=\sum_{k=1}^{\infty} k\times$ [가] **이다.**
>
> **한편,** $\sum_{k=1}^{\infty} x^k = \frac{x}{1-x}(-1<x<1)$**이므로,** $\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$**가 되고**
>
> **이를 이용하면** $E(X)=$ [나] **이다.**
>
> X^2**의 평균은** $E(X^2)=\sum_{k=1}^{\infty} k^2\times$ [가] **로 구할 수 있고,**
>
> **한편,** $\sum_{k=1}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}$**이므로,** $\sum_{k=1}^{\infty} k^2x^{k-1} = \frac{1-x^2}{(1-x)^4}$ **가 된다.**
>
> **이를 이용하면** $E(X^2)=$ [다] **이다.**
>
> **따라서, 분산** $V(X)=$ [라] **이다.**

위의 [가]에 알맞은 식을 $f(k)$, [나], [다], [라]에 알맞은 수를 각각 a,b,c라 할 때, $\frac{f(ac)}{f(b)}$의 값은? (문과도 풀 수 있으나 중간 식 전개과정을 이해하려하지 마세요)

스파클러의

확통 빈칸

N제