



스파클러^의 확통빈칸 N제

스파클러 지음

자연수 a, b, c, n 에 대하여 abc 가 2^{n+1} 의 배수이고 12^n 의 약수가 되도록 하는 서로 다른 순서쌍 (a, b, c) 의 개수를 d_n 이라 하자. 다음은 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{n^\alpha} = \beta$ ($\beta \neq 0$)일 때, α, β 의 값을 구하는 과정이다.

a, b, c 가 12^n 의 약수이므로 $a = 2^{p_1} \times 3^{q_1}$, $b = 2^{p_2} \times 3^{q_2}$, $c = 2^{p_3} \times 3^{q_3}$ 라고 할 수 있다. (p_i, q_i 는 음이 아닌 정수)

이 때, abc 가 2^{n+1} 의 배수이고 12^n 의 약수이기 위해선 $n+1 \leq p_1 + p_2 + p_3 \leq [(가)]$, $q_1 + q_2 + q_3 \leq n$ 을 만족해야 한다.

$n+1 \leq p_1 + p_2 + p_3 \leq [(가)]$ 를 만족하는 서로 다른 순서쌍 (p_1, p_2, p_3) 의 개수는 $\{ {}_4H_{[(가)]} - [(나)] \}$ 이고, $q_1 + q_2 + q_3 \leq n$ 를 만족하는 서로 다른 순서쌍 (q_1, q_2, q_3) 의 개수는 $[(나)]$ 이다.

그러므로, $d_n = ({}_4H_{[(가)]} - [(나)]) \times [(나)]$ 이고 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{n^\alpha} = \beta$ ($\beta \neq 0$)를 만족하는 $\alpha = [(다)]$, $\beta = [(라)]$ 이다.

위 과정에서 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n), g(n)$, (다), (라)에 알맞은 수를 각각 s, t 라 할 때, $f(3) \times st + g(4)$ 의 값을 구하시오.

음이 아닌 정수 x_1, x_2, x_3 가 다음 조건을 만족한다.

(가) $x_1 + x_2 + x_3 = 6n$ (단, n 은 자연수이다.)

(나) $x_1 > x_2 > x_3$

다음은 서로 다른 순서쌍 (x_1, x_2, x_3) 의 개수를 구하는 방법을 이용해 $P(6n, 3) = 3n^2$ 을 증명하는 과정이다.

$[(가)] = x_1', x_3 + 1 = x_3'$ 이라 하면

$x_1' + x_2 + x_3' = 6n, x_1' \geq x_2 \geq x_3'$

을 만족하는 서로 다른 순서쌍 (x_1, x_2, x_3) 의 개수는

자연수 $6n$ 을 3개의 자연수로 분할하는 방법의 수 $P(6n, 3)$ 와 같다.

한편, (가)와 $x_i > x_j > x_k$ (i, j, k 는 1, 2, 3중 하나이고, 서로 다르다.)

을 만족하는 순서쌍의 개수를 N 이라하면

(가), (나)을 만족하는 순서쌍 (x_1, x_2, x_3) 의 개수는 $\frac{N}{[(나)]}$ 과 같다.

N 은 (가)만 만족하는 (x_1, x_2, x_3) 의 서로 다른 순서쌍의 개수인 ${}_3H_{6n}$ 에서

x_1, x_2, x_3 중 서로 같은 것이 있는 경우의 수를 제외해준 것과 같으므로

$N = {}_3H_{6n} - [(다)]$

이다. 즉, $\frac{N}{[(나)]} = P(6n, 3)$ 이고 이를 정리하면

$P(6n, 3) = 3n^2$ 임을 알 수 있다.

위의 (가), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(x_1), g(n)$, (나)에 알맞은 수를 a 라 하자.

$a \times \{f(6) + g(11)\}$ 의 값을 구하시오.