공부하다

# 박수칠 수학

## 기본서

박상칠 지음

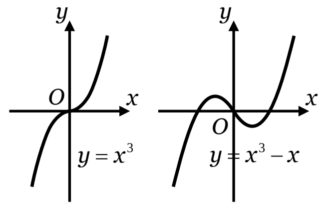
**미적분 I**

# §1. 함수의 극대·극소와 도함수

중등수학과 수학Ⅰ에서는 일차함수와 이차함수의 그래프를, 수학Ⅱ에서는 간단한 분수함수와 무리함수의 그래프를 공부했다. 여기서 함수의 그래프 개형을 그리는 방법은 대개 기본형의 그래프를 평행이동시키는 것이었다.

$\boxed{y=ax,\ y=ax^2,\ y=\dfrac{a}{x},\ y=\pm\sqrt{ax}}$

그런데 삼차 이상의 고차함수에서는 같은 방법이 통하지 않는다. 예를 들어 삼차함수 $y=x^3$과 $y=x^3-x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 합동이 아니기 때문에 $y=x^3$의 그래프를 평행이동해서 $y=x^3-x$의 그래프를 그릴 수 없다.




따라서 고차함수의 그래프 개형을 그리기 위해서는 새로운 방법이 필요한데 바로 도함수를 이용하는 방법이다. 이를 공부하기 위해 먼저 함수 $f(x)$의 증가·감소와 도함수 $f'(x)$ 사이에 어떤 관계가 있는지부터 알아보자.

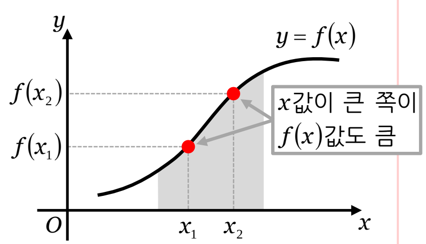
## 함수의 증가·감소

• 증가·감소의 정의

함수 $f(x)$와 구간 $I$에 속하는 임의의 두 수 $x_1$, $x_2$에 대하여

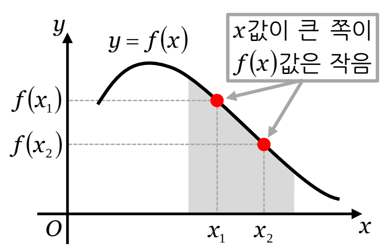
① 「$x_1<x_2$이면 $f(x_1)<f(x_2)$이다」가 항상 성립할 때, 함수 $f(x)$는 구간 $I$에서 증가한다고 한다.

또한 증가하는 구간에서 함수의 그래프는 오른쪽 위로 향한다.




② 「$x_1<x_2$이면 $f(x_1)>f(x_2)$이다」가 항상 성립할 때, 함수 $f(x)$는 구간 $I$에서 감소한다고 한다.

또한 감소하는 구간에서 함수의 그래프는 오른쪽 아래로 향한다.



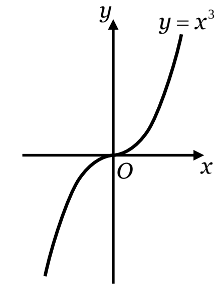

[예] 함수 $f(x)=x^3$은 구간 $(-\infty,\infty)$에서 증가한다. 이를 증명하려면 임의의 실수 $x_1$, $x_2$에 대해 「$x_1<x_2$이면 $f(x_1)<f(x_2)$」가 성립함을 보여야 한다.

임의의 실수 $x_1$, $x_2$에 대하여 $x_1<x_2$이면

$$\begin{aligned} f(x_1)-f(x_2)&=x_1^3-x_2^3\\ &=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)\\ &=(x_1-x_2)\left\{\left(x_1+\frac{1}{2}x_2\right)^2+\frac{3}{4}x_2^2\right\}<0 \end{aligned}$$

$\therefore f(x_1)<f(x_2)$

가 된다. 따라서 「$x_1<x_2$이면 $f(x_1)<f(x_2)$」가 성립하므로 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\infty)$에서 증가한다.




미분가능한 함수 $f(x)$가 특정 구간에서 증가하는지, 감소하는지를 판단할 때는 그 구간에서의 도함수 부호를 이용하는 것이 효과적이다.

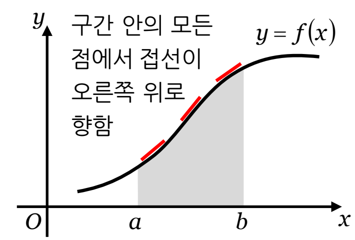
## 도함수와 함수의 증가·감소

• 도함수의 부호와 함수의 증가, 감소－Ⅰ

함수 $f(x)$가 구간 $(a,b)$에서 미분가능할 때

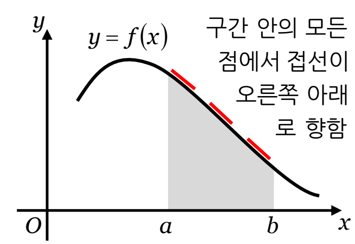
① 구간 $(a,b)$에서 $f'(x)>0$이면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.

∵ 구간 $(a,b)$에 속하는 모든 점에서 미분계수가 양수이므로 모든 접선이 오른쪽 위로 향하고, 곡선도 오른쪽 위로 향한다.

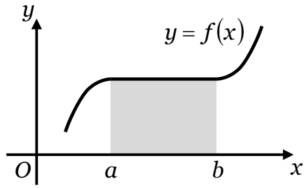



② 구간 $(a,b)$에서 $f'(x)<0$이면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다.

∵ 구간 $(a,b)$에 속하는 모든 점에서 미분계수가 음수이므로 모든 접선이 오른쪽 아래로 향하고, 곡선도 오른쪽 아래로 향한다.



③ 구간 $(a, b)$에서 $f'(x)=0$이면
함수 $f(x)$는 이 구간에서 상수함수다.
∵ $p.150$ 예제9 −(1)에서 평균값 정리로
증명되었다.




★ 명제 ①, ②의 정확한 증명도 평균값 정리를 이용한다.

[①의 증명]

구간 $(a, b)$에 속하는 임의의 두 수를 $x_1$, $x_2$ (단, $x_1 < x_2$)라 하면, 함수 $f(x)$는 구간 $[x_1, x_2]$에서 연속이고, 구간 $(x_1, x_2)$에서 미분가능하다. 따라서 평균값 정리에 의해 등식

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)$$

를 만족하는 $c$가 구간 $(x_1, x_2)$에 존재하고, $x_2-x_1>0$, $f'(c)>0$이므로

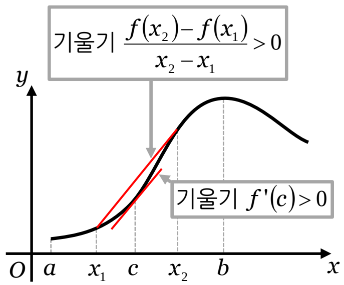
$$f(x_2)-f(x_1)>0 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

가 성립한다.

그러므로 구간 $(a, b)$에 속하는 임의의 두 수 $x_1$, $x_2$에 대하여

「$x_1 < x_2$이면 $f(x_1) < f(x_2)$이다」

가 성립하며, 함수 $f(x)$는 구간 $(a, b)$에서 증가한다.



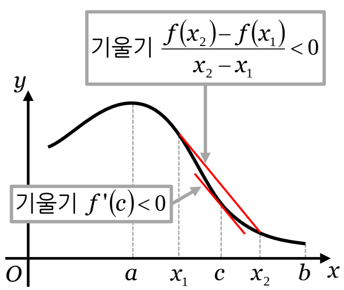

[②의 증명]

구간 $(a, b)$에 속하는 임의의 두 수를 $x_1$, $x_2$ (단, $x_1 < x_2$)라 하면, 함수 $f(x)$는 구간 $[x_1, x_2]$에서 연속이고, 구간 $(x_1, x_2)$에서 미분가능하다. 따라서 평균값 정리에 의해 등식

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)$$

를 만족하는 $c$가 구간 $(x_1, x_2)$에 존재하고, $x_2-x_1>0$, $f'(c)<0$이므로

$$f(x_2)-f(x_1)<0 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$$



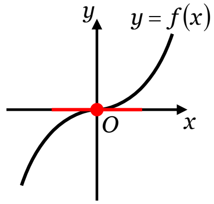

가 성립한다.

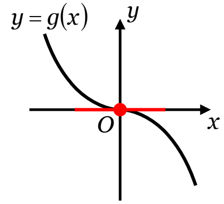
그러므로 구간 $(a, b)$에 속하는 임의의 두 수 $x_1$, $x_2$에 대하여

「$x_1 < x_2$이면 $f(x_1) > f(x_2)$이다」

가 성립하며, 함수 $f(x)$는 구간 $(a, b)$에서 감소한다.

★ 다음과 같이 함수 $f(x)$가 증가 또는 감소하는 구간에서 $f'(x)=0$인 점이 나타날 수 있다.




함수 $f(x)=x^3$에 대하여
▷ 구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가한다.
▷ $x \neq 0$일 때 $f'(x)=3x^2>0$,
$x=0$일 때 $f'(x)=0$이다.

함수 $g(x)=-x^3$에 대하여
▷ 구간 $(-\infty, \infty)$에서 감소한다.
▷ $x \neq 0$일 때 $g'(x)=-3x^2<0$,
$x=0$일 때 $g'(x)=0$이다.

따라서 명제 ①, ②의 가정과 결론을 바꾸면 다음과 같이 도함수의 부호에 등호가 붙어야 한다.

• 함수의 증가, 감소와 도함수의 부호

함수 $f(x)$가 구간 $(a, b)$에서 미분가능할 때

①−1. 함수 $f(x)$가 구간 $(a, b)$에서 증가하면 이 구간에서 $f'(x) \geq 0$이다.

②−1. 함수 $f(x)$가 구간 $(a, b)$에서 감소하면 이 구간에서 $f'(x) \leq 0$이다.

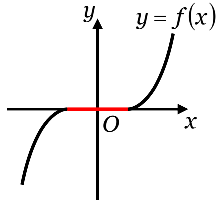
★ 마찬가지로 명제 ①, ②의 가정에 등호를 넣으면 그 명제는 참이 될까? 거짓이 될까?

거짓

함수 $f(x)$가 구간 $(a, b)$에서 미분가능할 때
▷ 구간 $(a, b)$에서 $f'(x) \geq 0$가 항상 성립하면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.
▷ 구간 $(a, b)$에서 $f'(x) \leq 0$가 항상 성립하면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다.

정말 헷갈리겠지만, 앞 페이지의 명제는 둘 다 거짓이다. 왜냐하면 아래의 [예]와 같이 $f'(x)=0$을 만족하는 점이 연속적으로 나타날 수 있기 때문이다. (즉, 함수 $f(x)$가 상수함수가 되는 구간이 생기기 때문)

[예] $f(x)=\begin{cases}(x+1)^3 & (x<-1)\\ 0 & (-1\le x\le 1)\\ (x-1)^3 & (x>1)\end{cases} \Longrightarrow f'(x)=\begin{cases}3(x+1)^2 & (x<-1)\\ 0 & (-1\le x\le 1)\\ 3(x-1)^2 & (x>1)\end{cases}$



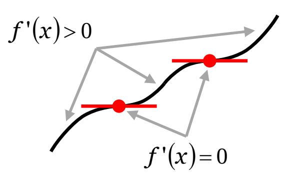

함수 $f(x)$는
구간 $[-1,1]$에서 상수함수이기 때문에
구간 $(-\infty,\infty)$에서 항상 $f'(x)\ge 0$이 성립
하더라도 증가함수가 아니다.

그런데 함수 $f(x)$가 특정 조건을 만족하면 $f'(x)\ge 0$이 항상 성립하더라도 증가함수일 수 있고, $f'(x)\le 0$이 항상 성립하더라도 감소함수일 수 있다.
그 조건은 바로 $f'(x)=0$인 점이 연속적이지 않을 것, 다시 말하면 $f(x)$의 값이 일정한 구간이 존재하지 않을 것이다.

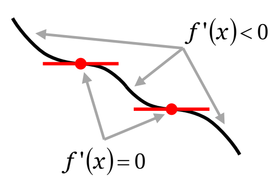
• 도함수의 부호와 함수의 증가, 감소 – Ⅱ

함수 $f(x)$가 구간 $(a,b)$에서 미분가능할 때

①–2. 구간 $(a,b)$에서 $f'(x)\ge 0$이고,
$f'(x)=0$인 점이 연속적이지 않으면
함수 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.



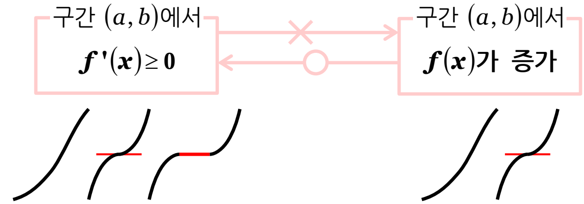

②–2. 구간 $(a,b)$에서 $f'(x)\le 0$이고,
$f'(x)=0$인 점이 연속적이지 않으면
함수 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다.

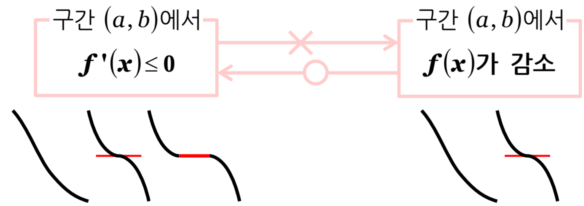



★ $f'(x)=0$인 점이 연속적이지 않은 함수 $f(x)$에는 여러 가지가 있는데, 가장 대표적인 것이 바로 다항함수다. (단, 상수함수 제외)

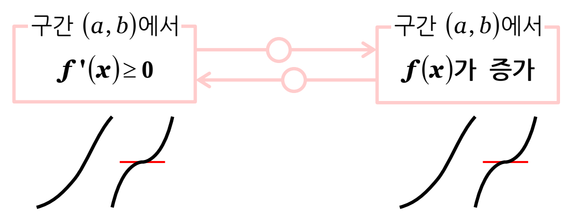
★ 지금까지 살펴봤듯이 도함수의 부호 – 함수의 증가·감소 사이의 관계는 등호 유무 때문에 헷갈리기 쉽다. 따라서 $f'(x)=0$인 점이 연속적으로 나타날 수 있는 함수와 그렇지 않은 함수를 구분하고, 도함수의 부호에 따라 나타날 수 있는 그래프 개형을 기억해두도록 하자.

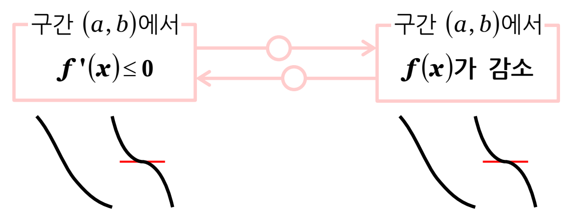
▹ 미분가능한 함수 $f(x)$의 경우




▹ 상수함수 아닌 다항함수 $f(x)$의 경우



예제1 다음은 구간 $(a, b)$에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대한 명제들이다. 옳은 것을 모두 고르시오.

ㄱ. 구간 $(a, b)$에서 $f'(x) \geq 0$이면, 함수 $f(x)$는 그 구간에서 증가한다.
ㄴ. 구간 $(a, b)$에서 $f'(x) < 0$이면, 함수 $f(x)$는 그 구간에서 감소한다.
ㄷ. 구간 $(a, b)$에서 $f'(x) \geq 0$이고 방정식 $f'(x) = 0$의 근이 유한 개이면, 함수 $f(x)$는 그 구간에서 증가한다.
ㄹ. 구간 $(a, b)$에서 $f'(x) \leq 0$이고 방정식 $f'(x) = 0$의 근이 무한 개이면, 함수 $f(x)$는 그 구간에서 감소한다.
ㅁ. $f(x)$가 삼차함수이고 구간 $(a, b)$에서 $f'(x) \leq 0$를 만족하면, 함수 $f(x)$는 그 구간에서 감소한다.
ㅂ. 함수 $f(x)$가 구간 $(a, b)$에서 증가하면 그 구간에서 $f'(x) > 0$이 성립한다.

풀이 ㄱ. 구간 $(a, b)$에서 $f'(x) \geq 0$이면 $f'(x) = 0$인 점이 연속적으로 나타날 수 있다. 그러면 함수 $f(x)$의 그래프에 함숫값이 일정한 구간이 생기기 때문에 함수 $f(x)$는 증가한다고 할 수 없다. (거짓)

ㄴ. (참)

ㄷ. 구간 $(a, b)$에서 $f'(x) = 0$인 점이 유한 개라는 것은 $f'(x) = 0$인 점이 불연속적이라는 의미다. 따라서 함수 $f(x)$의 그래프에 함숫값이 일정한 구간이 나타나지 않으며, 함수 $f(x)$는 증가한다. (참)

ㄹ. 구간 $(a, b)$에서 $f'(x) = 0$인 점이 무한 개이면 $f'(x) = 0$인 점이 불연속적으로 나타날 수도 있지만, 연속적으로 나타날 수도 있다. 따라서 함수 $f(x)$가 감소한다고 할 수 없다. (거짓)

ㅁ. 상수함수를 제외한 다항함수에서는 $f'(x) = 0$인 점이 불연속적으로 나타난다. 그러므로 구간 $(a, b)$에서 $f'(x) \leq 0$이면 삼차함수 $f(x)$는 감소한다. (참)

ㅂ. 구간 $(a, b)$에서 함수 $f(x)$가 증가하면 $f'(x) > 0$이 항상 성립하는 경우도 있지만, $f'(x) = 0$인 점이 불연속적으로 끼는 경우도 있다. 이를 모두 포함하려면 $f'(x) \geq 0$이 성립해야 한다. (거짓)

예제2 다음은 구간 $(0, 1)$에서 두 함수 $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 4$와 $g(x) = x^2 - 2x - 3$의 그래프가 오직 한 점에서 만남을 증명한 것이다.

$h(x) = f(x) - g(x)$라 하면 $h(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 1$은 모든 실수 $x$에 대하여 연속이다.
$h(0) \cdot h(1)$ (가) 0이므로, 사이값의 정리에 의해 방정식 $h(x) = 0$은 0과 1 사이에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.
모든 실수 $x$에 대하여 $h'(x)$ (나) 0이므로 $h(x)$는 (다)이다.
따라서 $h(x) = 0$은 0과 1 사이에서 오직 하나의 실근을 갖게 된다.
즉, 구간 $(0, 1)$에서 $f(x)$, $g(x)$의 그래프는 오직 한 점에서 만난다.

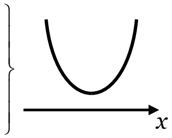
위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?

| | (가) | (나) | (다) | | (가) | (나) | (다) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ① | $<$ | $>$ | 증가함수 | ② | $<$ | $>$ | 감소함수 |
| ③ | $<$ | $<$ | 감소함수 | ④ | $>$ | $<$ | 감소함수 |
| ⑤ | $<$ | $>$ | 증가함수 | | | | |

풀이 $h(0) \cdot h(1) = (-1) \times 3 = -3 < 0$이므로 (가)에는 '$<$'가 들어간다.
또한 $h'(x) = 3x^2 - 6x + 6 = 3(x-1)^2 + 3 > 0$이므로 $h(x)$는 증가함수가 된다.
따라서 (나)에는 '$>$', (다)에는 '증가함수'가 들어가야 한다.

☆ 완전제곱꼴 대신 이차함수 $h'(x) = 3x^2 - 6x + 6$이

$(x^2 \text{계수}) > 0$ → 그래프가 아래로 볼록
$D/4 < 0$ → 그래프가 $x$축과 만나지 않음



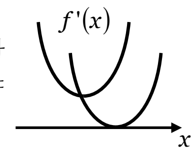

을 만족한다는 사실로부터 $h'(x) = 3x^2 - 6x + 6 > 0$임을 알 수도 있다. (p.226 참고)

예제3 삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+2ax$ 가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가하도록 하는 실수 $a$의 최댓값을 $M$, 최솟값을 $m$이라 할 때, $M-m$의 값을 구하여라.

풀이 삼차함수 $f(x)$의 그래프에서는 $f'(x)=0$인 점이 불연속적으로 나타난다. 따라서 삼차함수 $f(x)$가 증가함수이기 위한 필요충분조건은 모든 실수 $x$에 대해

$f'(x)=3x^2+2ax+2a\ge 0$

가 성립하는 것이며, 이를 위해서는 $f'(x)$의 그래프가 오른쪽 그림처럼 $x$축과 만나지 않거나 $x$축에 접해야 한다. 그러므로




$D/4=a^2-6a=a(a-6)\le 0 \Rightarrow 0\le a\le 6$

이며, $M=6$, $m=0$, $M-m=6$이다.

예제4 함수 $f(x)=x^3+3x^2+ax+2$가 다음을 만족한다.

$\boxed{\text{임의의 실수 } x_1,\ x_2 \text{에 대하여 } f(x_1)=f(x_2) \text{이면 } x_1=x_2 \text{이다.}}$

이때, 실수 $a$값의 범위를 구하여라.

풀이 문제에 주어진 조건부터 파악하면 다음과 같다.

① 임의의 실수 $x_1$, $x_2$에 대한 명제 「$f(x_1)=f(x_2)$이면 $x_1=x_2$이다」의 대우는 「$x_1\ne x_2$이면 $f(x_1)\ne f(x_2)$이다」이며, 함수 $f(x)$가 일대일함수임을 의미한다.

② 다항함수 $f(x)$는 모든 실수에서 연속이므로 이 함수가 일대일함수이려면 증가함수 또는 감수함수가 되어야 한다.

③ 삼차함수 $f(x)$의 삼차항 계수가 양수이므로 그래프는 좌표평면 왼쪽 아래에서 오른쪽 위로 향한다.

①~③으로부터 함수 $f(x)$는 증가함수이므로 모든 실수 $x$에 대해

$f'(x)=3x^2+6x+a\ge 0$

가 성립해야 한다. 그러므로

$D/4=9-3a\le 0 \Rightarrow a\ge 3$

★ 문제의 올바른 이해를 위해 수학Ⅱ에서 배웠던 관련 개념을 정리하고 넘어가도록 하자.

▹ 일대일함수

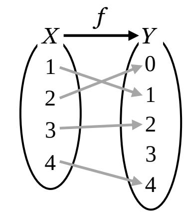
– 정의역의 각 원소들에 대응되는 함숫값이 중복되지 않는 함수를 말한다.

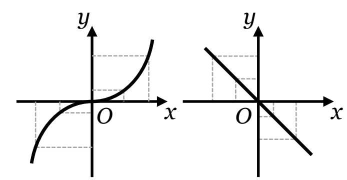
– 함수 $f: X\to Y$와 정의역 $X$의 임의의 원소 $x_1$, $x_2$에 대하여

$x_1\ne x_2$이면 $f(x_1)\ne f(x_2)$

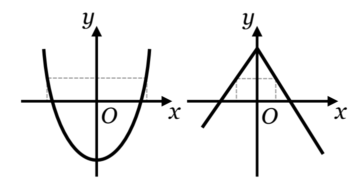
가 항상 성립하면 함수 $f$는 일대일함수다.

– 구간 $I$에서 연속인 함수가 일대일함수이려면 증가함수 또는 감소함수여야 한다.




증가함수(좌)와 감소함수(우)는 정의역의 각 원소들에 대응되는 함숫값이 중복되지 않으므로 일대일함수




정의역의 서로 다른 원소가 같은 함숫값을 가질 수 있으므로 일대일함수 아님

▹ 일대일대응

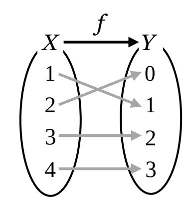
– 일대일함수 가운데 공역과 치역이 일치하는 함수를 말한다.

– 함수 $f: X\to Y$와 정의역 $X$의 임의의 원소 $x_1$, $x_2$에 대하여

① $x_1\ne x_2$이면 $f(x_1)\ne f(x_2)$　② $f(X)=Y$

가 동시에 성립하면 함수 $f$는 일대일대응이다.

$f(X)$는 함수 $f: X\to Y$의 치역을 의미한다.



앞에서 함수의 증가·감소가 어떻게 정의되는지, 그리고 도함수의 부호와 어떤 관계에 있는지를 공부했다. 그런데 함수의 그래프 개형을 그리려면 함수가 특정 구간에서 증가하는지, 감소하는지의 여부가 아니라 증가하는 구간이 어디서부터 어디까지인지, 감소하는 구간이 어디서부터 어디까지인지를 파악해야 한다.

여기서는 함수의 증가·감소의 경계인 극대·극소가 무엇인지, 그리고 도함수를 이용해서 극대·극소의 위치를 어떻게 찾아내는지 공부할 것이다.

**함수의 최대·최소와 극대·극소**

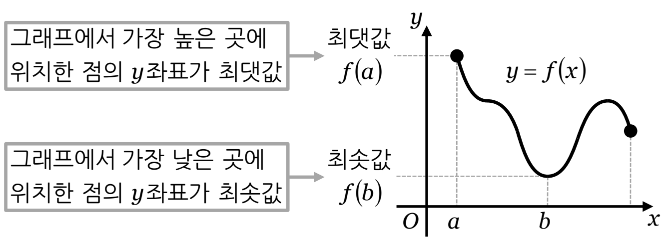
• 함수의 최대·최소

▹ 함수 $f(x)$의 정의역에 속하는 모든 $x$에 대하여 $f(a) \geq f(x)$가 항상 성립하면(즉, 모든 함숫값들 가운데 $f(a)$가 가장 크면) 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 최대라 하며, 이때의 함숫값 $f(a)$를 함수 $f(x)$의 최댓값이라 한다.

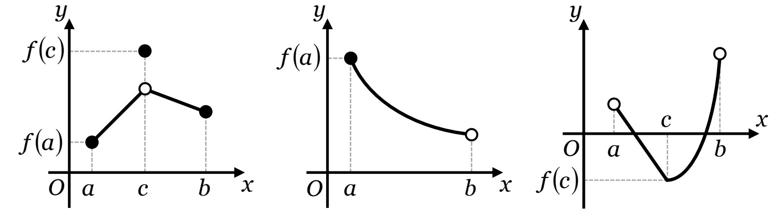
▹ 함수 $f(x)$의 정의역에 속하는 모든 $x$에 대하여 $f(a) \leq f(x)$가 항상 성립하면(즉, 모든 함숫값들 가운데 $f(a)$가 가장 작으면) 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 최소라 하며, 이때의 함숫값 $f(a)$를 함수 $f(x)$의 최솟값이라 한다.

★ 함수 $f(x)$가 닫힌 구간에서 연속이면 최대·최소 정리(p.98 참고)에 따라 그 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

[예1] 다음과 같은 그래프를 갖는 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 최대이며, 최댓값은 $f(a)$, $x=b$에서 최소이며 최솟값은 $f(b)$이다.




★ 함수 $f(x)$가 열린 구간에서 정의되거나, 닫힌 구간에서 정의되더라도 불연속점을 가지면 그 구간에서 최댓값 또는 최솟값을 가질 수도 있고, 갖지 않을 수도 있다.




최댓값 $f(c)$
최솟값 $f(a)$

최댓값 $f(a)$
최솟값 없음

최댓값 없음
최솟값 $f(c)$

$f(x)$의 최솟값은 $f(b)$보다 크면서 $f(b)$에 한없이 가깝지만 특정할 수 없기 때문에 최솟값이 없다고 한다.

$f(x)$의 최댓값은 $f(b)$보다 작으면서 $f(b)$에 한없이 가깝지만 특정할 수 없기 때문에 최댓값이 없다고 한다.

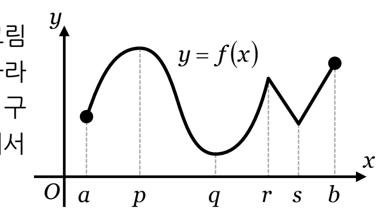
• 함수의 극대·극소 – I

▹ 어떤 열린 구간 $I$에 속하는 모든 $x$에 대하여 $f(a) \geq f(x)$가 항상 성립하면(즉, 열린 구간 $I$에서 나타나는 모든 함숫값들 가운데 $f(a)$가 가장 크면) 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대라 하며, 이때의 함숫값 $f(a)$를 극댓값, 점 $(a, f(a))$를 극대점이라 한다. (단, $a \in I$)

▹ 어떤 열린 구간 $I$에 속하는 모든 $x$에 대하여 $f(a) \leq f(x)$가 항상 성립하면(즉, 열린 구간 $I$에서 나타나는 모든 함숫값들 가운데 $f(a)$가 가장 작으면) 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극소라 하며, 이때의 함숫값 $f(a)$를 극솟값, 점 $(a, f(a))$를 극소점이라 한다. (단, $a \in I$)

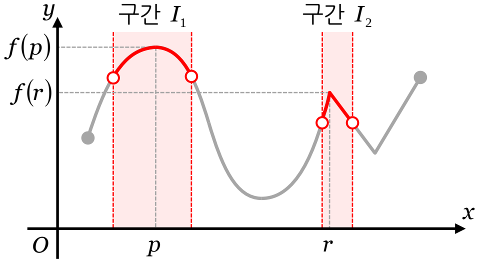
▹ 함수의 극댓값과 극솟값을 통틀어 극값, 극대점과 극소점을 통틀어 극점이라 한다.

[예2] 함수 $f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 극대·극소를 정의에 따라 찾으려면 다음 페이지와 같이 열린 구간 $I_1 \sim I_7$을 잡고, 각각의 구간 안에서 최대·최소를 따지면 된다.



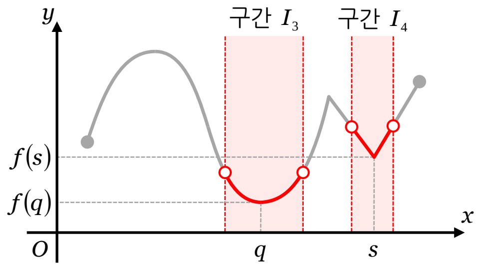
$\boxed{\text{구간 } I_1}$ $x=p$에서 최대이므로 함수 $f(x)$는 $x=p$에서 극대, $f(p)$가 극댓값

$\boxed{\text{구간 } I_2}$ $x=r$에서 최대이므로 함수 $f(x)$는 $x=r$에서 극대, $f(r)$이 극댓값



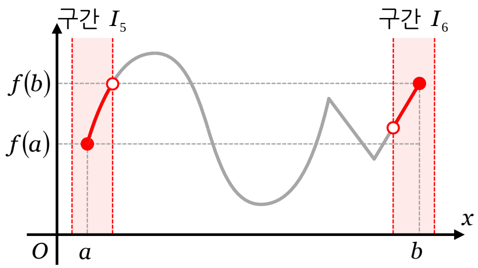

$\boxed{\text{구간 } I_3}$ $x=q$에서 최소이므로 함수 $f(x)$는 $x=q$에서 극소, $f(q)$가 극솟값

$\boxed{\text{구간 } I_4}$ $x=s$에서 최소이므로 함수 $f(x)$는 $x=s$에서 극소, $f(s)$가 극솟값

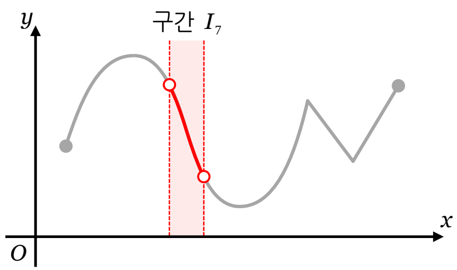



$\boxed{\text{구간 } I_5}$ $x=a$에서 최소이므로 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극소, $f(a)$가 극솟값

$\boxed{\text{구간 } I_6}$ $x=b$에서 최대이므로 함수 $f(x)$는 $x=b$에서 극대, $f(b)$이 극댓값

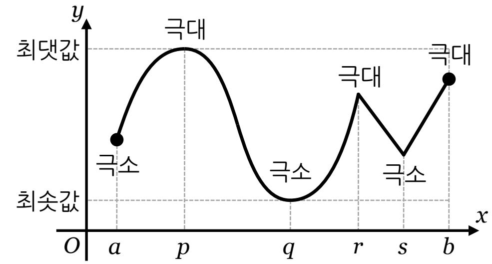



$\boxed{\text{구간 } I_7}$ 이 구간에서 최대·최소가 존재하지 않으므로 극대·극소도 존재하지 않음




따라서 함수 $f(x)$는 $x=p,\ r,\ b$에서 극대, $x=a,\ q,\ s$에서 극소다. 또한

극댓값 $f(p)$, $f(r)$, $f(b)$ 가운데 최대인 $f(p)$는 함수 $f(x)$의 최댓값과 같고 극솟값 $f(a)$, $f(q)$, $f(s)$ 가운데 최소인 $f(q)$는 함수 $f(x)$의 최솟값과 같음을 알 수 있다.



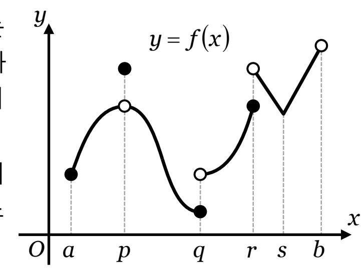

★ 간단히 말하면 함수의 최댓값과 최솟값은 모든 함숫값 가운데 가장 큰 것과 가장 작은 것을 의미하고, 극댓값과 극솟값은 특정 열린 구간에 속하는 함숫값 가운데 가장 큰 것과 가장 작은 것을 가리킨다.

최댓값을 global maximum, 최솟값을 global minimum, 극댓값을 local maximum, 극솟값을 local minimum이라고 하는 것도 같은 맥락이다.

★ 극대·극소는 연속함수 뿐만 아니라 불연속점을 갖는 함수에도 존재한다.

[예3] 반닫힌 구간 $[a,b)$에서 정의되는 함수 $f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 이 함수는 $x=p,\ q,\ r$에서 불연속이다.

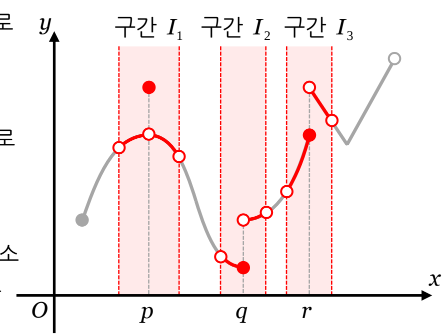
각각의 불연속점을 포함하는 세 개의 열린 구간 $I_1 \sim I_3$을 잡으면 극대·극소를 정의에 따라 찾을 수 있다.




$\boxed{\text{구간 } I_1}$ $x=p$에서 최대이므로 함수 $f(x)$는 $x=p$에서 극대, $f(p)$가 극댓값

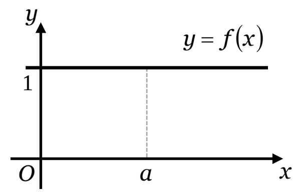
$\boxed{\text{구간 } I_2}$ $x=q$에서 최소이므로 함수 $f(x)$는 $x=q$에서 극소, $f(q)$가 극솟값

$\boxed{\text{구간 } I_3}$ 이 구간에서 최대·최소가 존재하지 않으므로 극대·극소도 존재하지 않음



따라서 함수 $f(x)$는 $x=p$에서 극대, $x=a,\ q,\ s$에서 극소다. 또한 극솟값 $f(a),\ f(q),\ f(s)$ 가운데 최소인 $f(q)$는 함수 $f(x)$의 최솟값과 같지만, 최댓값이 존재하지 않기 때문에 극댓값 $f(p)$는 최댓값이 아니다.

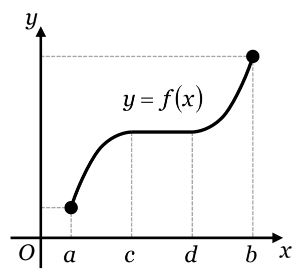
★ 함숫값이 일정한 상수함수에서도 최대·최소 및 극대·극소가 존재한다. 예를 들어 함수 $f(x)=1$은 최댓값, 최솟값이 모두 1이고, 임의의 실수 $a$에 대하여 부등식 $f(a)\ge f(x)$와 $f(a)\le f(x)$를 동시에 만족하므로 $x=a$에서 극대면서 극소가 된다. 따라서 그래프 위의 임의의 점이 극대점이면서 극소점이다.




마찬가지로 함숫값이 일정한 구간을 갖는 함수에 대해서도 극대·극소를 생각할 수 있다.

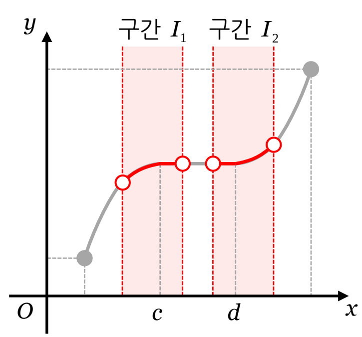
[예4] 닫힌 구간 $[a,b]$에서 정의되는 함수 $f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 이 함수는 닫힌 구간 $[c,d]$에서 함숫값이 일정하며, 열린 구간 $(c,d)$ 위의 모든 점이 극대점이면서 극소점이다.

그리고 $c$를 포함하는 열린 구간 $I_1$, $d$를 포함하는 열린 구간 $I_2$를 잡으면 $x=c$에서 극대, $x=d$에서 극소임을 알 수 있다.




구간 $I_1$ $x=c$에서 최대이므로 함수 $f(x)$는 $x=c$에서 극대이고, $f(c)$가 극댓값

구간 $I_2$ $x=d$에서 최소이므로 함수 $f(x)$는 $x=d$에서 극소이고, $f(d)$가 극솟값




따라서 함수 $f(x)$는 반닫힌 구간 $[c,d)$에 속하는 임의의 점에서 극대, 반닫힌 구간 $(c,d]$에 속하는 임의의 점에서 극소다.

지금까지 살펴봤듯이 함수의 극대·극소는 연속함수인지 아닌지, 함숫값이 일정한 구간이 있는지 없는지에 따라 복잡하게 나타난다. 때문에 교육 과정에서 다루는 대부분의 극대·극소 문제는 $p.159$ [예2]처럼 연속함수면서 함숫값이 일정한 구간이 없는 함수를 대상으로 하고 있다.

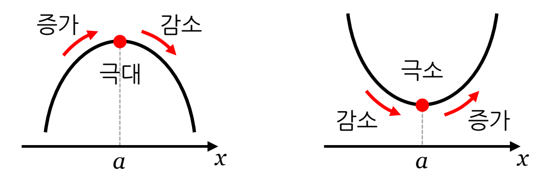
이런 함수에 맞춰서 함수의 극대·극소를 보다 쉽게 정의하면 다음과 같다.

• 함수의 극대·극소 – II

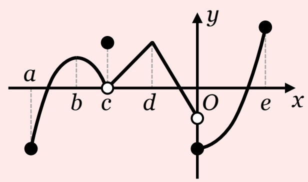
연속함수 $f(x)$가 함숫값이 일정한 구간을 갖지 않을 때

▹ $x=a$를 경계로 증가에서 감소로 바뀌면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대다.

▹ $x=a$를 경계로 감소에서 증가로 바뀌면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극소다.




예제5 오른쪽 그림은 닫힌 구간 $[a,e]$에서 정의된 함수 $f(x)$의 그래프를 나타낸 것이다. 극대점과 극소점의 개수를 각각 구하여라.




★ $p.159$에서 설명했던 극대·극소의 일반적인 정의(함수의 극대·극소 – I)에 따라 다음과 같이 풀 수 있다.

풀이 ▹ $a$를 포함하는 열린 구간에서 $f(a)\le f(x)$이므로 $x=a$일 때 극소

▹ $b$를 포함하는 열린 구간에서 $f(b)\ge f(x)$이므로 $x=b$일 때 극대

▹ $c$를 포함하는 열린 구간에서 $f(c)\ge f(x)$이므로 $x=c$일 때 극대

▹ $d$를 포함하는 열린 구간에서 $f(d)\ge f(x)$이므로 $x=d$일 때 극대

▹ 0을 포함하는 열린 구간에서 $f(0)\le f(x)$이므로 $x=0$일 때 극소

▹ $e$를 포함하는 열린 구간에서 $f(e)\ge f(x)$이므로 $x=e$일 때 극대

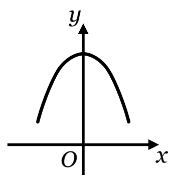
따라서 극대점은 4개, 극소점은 2개다.

**예제6** $x=0$에서 극댓값을 갖는 모든 다항함수 $f(x)$에 대하여 옳은 것만을 아래에서 모두 고르시오.

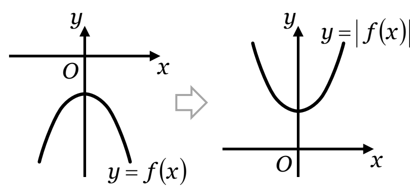
ㄱ. 함수 $|f(x)|$는 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.
ㄴ. 함수 $f(|x|)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.
ㄷ. 함수 $f(x)-x^2|x|$는 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

★ 다항함수의 그래프에는 불연속점도 없고, 함숫값이 일정한 구간도 없기 때문에(상수함수 제외) $p.161$에서 설명했던 극대·극소의 제한적인 정의를 적용할 수 있다. 물론 상수함수일 때도 따로 고려해야 한다.

**풀이** ㄱ.



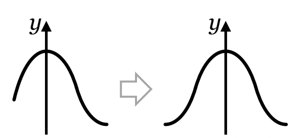

$f(0)>0$이면 $x=0$ 근처에서 $f(x)$, $|f(x)|$의 그래프가 같으므로 $|f(x)|$는 $x=0$에서 극대다.




$f(0)\le 0$이면 $x=0$ 근처에서 $|f(x)|$의 그래프는 함수 $f(x)$의 그래프를 $x$축에 대해 대칭이동시킨 것과 같다.

따라서 함수 $|f(x)|$는 $x=0$에서 극솟값을 갖는다. (거짓)

ㄴ. $f(|x|)$의 그래프는 $f(x)$의 그래프에서 $y$축 오른쪽 부분만 남기고, 그것을 다시 $y$축에 대해 대칭이동시킨 것과 같다. 따라서 함수 $f(|x|)$도 $x=0$에서 극대다.

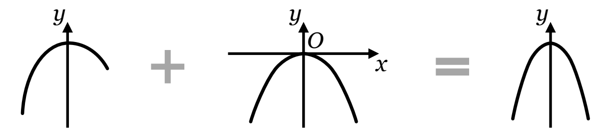



$y=f(x)$ $\qquad$ $y=f(|x|)$

또한 $f(x)$가 상수함수라면 $x=0$에서 극대이며, $f(|x|)=f(x)$이므로 함수 $f(|x|)$도 $x=0$에서 극대다. (참)

ㄷ. 다음과 같이 두 함수 $y=f(x)$, $y=-x^2|x|$가 $x=0$에서 극대이기 때문에 두 함수를 더해서 얻은 함수 $y=f(x)-x^2|x|$도 $x=0$에서 극대다. 이점은 함수 $y=f(x)$가 상수함수일 때도 마찬가지다. (참)

$x=0$에서 극대 $\qquad$ $x=0$에서 극대 $\qquad$ $x=0$에서 극대




$y=f(x)$ $\qquad$ $y=-x^2|x|$ $\qquad$ $y=f(x)-x^2|x|$

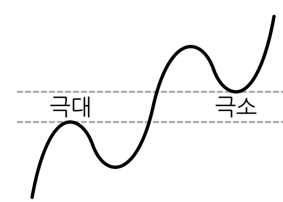
$$=\begin{cases} x^3 & (x<0) \\ -x^3 & (x\ge 0) \end{cases}$$

**예제7** 다음은 함수의 최대·최소, 극대·극소에 대한 설명이다. 옳은 것을 모두 고르시오.

ㄱ. 함수의 극댓값 가운데 가장 큰 것이 최댓값, 극솟값 가운데 가장 작은 것이 최솟값이다.
ㄴ. 극댓값은 항상 극솟값보다 크다.
ㄷ. 닫힌 구간에서 연속인 함수는 항상 극댓값, 극솟값을 갖는다.
ㄹ. 열린 구간에서 연속인 함수는 항상 극댓값, 극솟값을 갖는다.

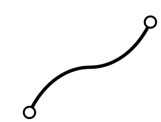
**풀이** ㄱ. 오른쪽 그림과 같은 함수의 그래프에서 극댓값, 극솟값은 존재하지만 최댓값, 최솟값은 존재하지 않는다. 그러므로 극댓값, 극솟값에서 항상 최댓값, 최솟값이 나타나는 것은 아니다. (거짓)


ㄴ. 오른쪽 그림과 같은 함수의 그래프에서는 극댓값이 극솟값보다 작은 경우가 나타난다. (거짓)




ㄷ. 닫힌 구간에서 연속인 함수는 최대·최소의 정리에 의해 항상 최댓값과 최솟값을 가지며 최댓값은 극댓값 가운데 하나, 최솟값은 극솟값 가운데 하나다. (참)

ㄹ. 오른쪽 그림과 같은 함수의 그래프에서 극댓값, 극솟값은 나타나지 않는다. (거짓)



함수의 극대·극소에 대한 정의를 배웠으니 이제 극대·극소를 어떻게 찾는지 알아볼 차례다. $p.161$ 함수의 극대·극소 $-$ II에서 설명했듯이 극대·극소를 경계로 함수의 증가·감소가 변하므로 도함수의 부호를 이용해서 찾아낼 수 있으며, 다음의 명제가 이용된다.

**극대·극소와 도함수**

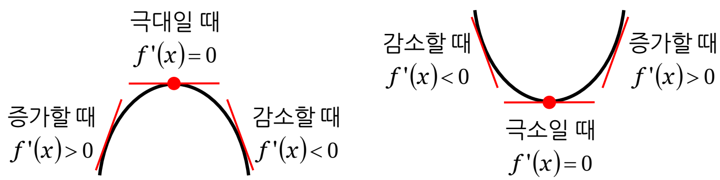
• 극점에서의 미분계수

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때

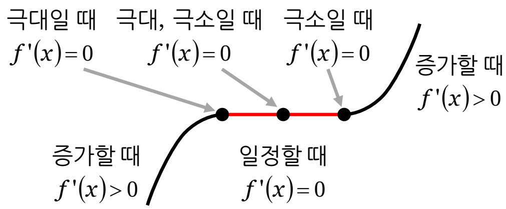
$x=a$에서 극대 또는 극소이면 $f'(a)=0$이다.

[증명1] 직관적으로 이해하기

미분가능한 함수 $f(x)$는 증가할 때 $f'(x)>0$, 감소할 때 $f'(x)<0$를 만족한다. 따라서 증가·감소의 경계인 극점에서는 $f'(x)=0$이 되어야 한다.




$p.161$의 [예4]와 같이 함숫값이 일정한 구간에 극점이 위치하더라도 미분가능하기만 하면 극점에서의 미분계수가 0이다.




[증명2] 미분계수의 정의로 증명하기

$i$) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극대일 때

$x$가 $a$에 충분히 가까운 실수라면 극대·극소의 정의($p.159$ 참고)에 따라 다음이 성립한다.

$$f(a)\ge f(x) \Rightarrow f(x)-f(a)\le 0$$

이를 미분계수의 정의 $f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$에 적용하면

$x>a$일 때 $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\le 0$이므로 $\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\le 0$

$x<a$일 때 $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\ge 0$이므로 $\lim_{x\to a-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\ge 0$

이고, 가정에 따라 $f'(a)$의 값이 존재하기 때문에 다음이 성립한다.

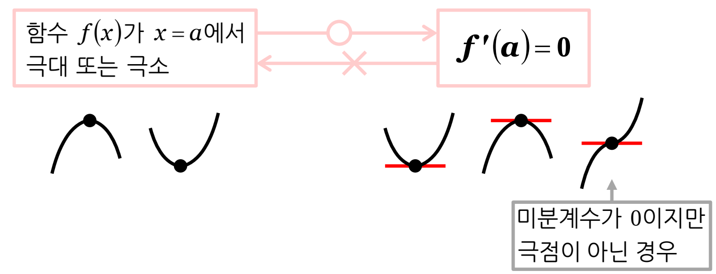
$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=0$$

$ii$) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극소일 때

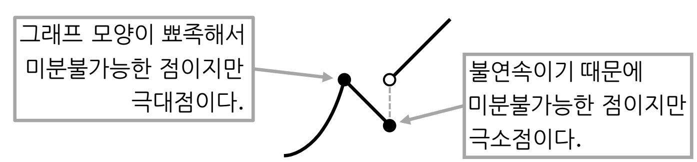
$i$)과 같은 방법으로 $f'(a)=0$임을 보일 수 있다.

$i$), $ii$)로부터 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극대 또는 극소이면 $f'(a)=0$이다.

★ 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극대 또는 극소인 것과 $f'(a)=0$인 것은 서로 필요충분조건이 아님에 주의한다.




★ 함수의 극대·극소와 도함수를 연결시키다 보면 미분불가능한 점에서 극점이 존재하지 않는 것으로 착각할 수 있기 때문에 주의가 필요하다.

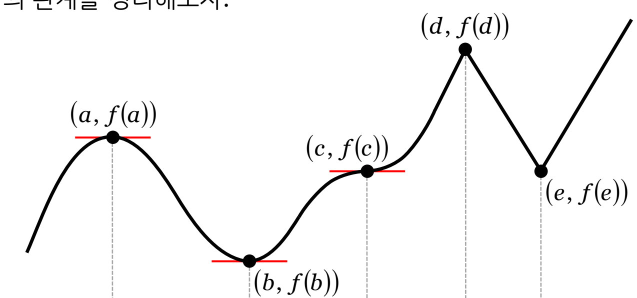


이처럼 함수의 극대·극소는 미분계수가 0이거나 미분불가능한 점에서만 나타날 수 있으며, 그 점에서 극대인지 극소인지는 도함수의 부호 변화로 판단할 수 있다.

• 도함수의 부호와 극대·극소
연속함수 $f(x)$에 대하여
$f'(a)=0$이거나 $f'(a)$의 값이 존재하지 않을 때

$$f'(x)\text{의 부호가 } x=a\text{에서 } \begin{cases} (+)\text{에서 } (-)\text{로 변하면 } f(x)\text{는 } x=a\text{에서 극대} \\ (-)\text{에서 } (+)\text{로 변하면 } f(x)\text{는 } x=a\text{에서 극소} \end{cases}$$

★ 연속함수 $f(x)$의 그래프가 다음과 같을 때, $f'(x)=0$이거나 $f'(x)$의 값이 존재하지 않는 점에서 도함수 $f'(x)$의 부호 변화와 함수 $f(x)$의 극대, 극소 사이의 관계를 정리해보자.




| $f'(x)$ | + | **0** | − | **0** | + | **0** | + | **X** | − | **X** | + |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 증가 | | 감소 | | 증가 | | 증가 | | 감소 | | 증가 |
| | | **극대** | | **극소** | | **극점X** | | **극대** | | **극소** | |

▷ $x=a$에서 극대
$f'(a)=0$이고, $f'(x)$의 부호가 $(+)$에서 $(-)$로 변하므로 $f(x)$는 증가에서 감소로 바뀐다.

▷ $x=b$에서 극소
$f'(b)=0$이고, $f'(x)$의 부호가 $(-)$에서 $(+)$로 변하므로 $f(x)$는 감소에서 증가로 바뀐다.

▷ $x=c$에서 극점 아님
$f'(c)=0$이지만, $f'(x)$의 부호가 $(+)$에서 $(+)$로 변함이 없기 때문에 $f(x)$는 계속 증가한다.

▷ $x=d$에서 극대
$f'(d)$의 값이 존재하지 않지만, $f'(x)$의 부호가 $(+)$에서 $(-)$로 변하므로 $f(x)$는 증가에서 감소로 바뀐다.

▷ $x=e$에서 극소
$f'(e)$의 값이 존재하지 않지만, $f'(x)$의 부호가 $(-)$에서 $(+)$로 변하므로 $f(x)$는 감소에서 증가로 바뀐다.

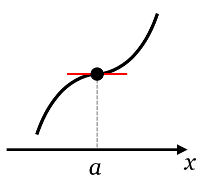
★ 미분계수가 0이지만 극점이 아닌 점이 있듯이, 미분불가능하면서 도함수의 부호가 변하지만 극점이 아닌 경우도 있다. ($p$.160 [예3]의 함수 $f(x)$는 $x=r$에서 미분불가능하면서 $f'(x)$의 부호가 변하지만 $x=r$에서 극값을 갖지 않음) 때문에 도함수의 부호를 이용한 극대·극소 판정은 연속함수만 대상으로 한다.

예제8 다음은 모든 실수에서 연속인 함수 $f(x)$의 극대·극소에 대한 설명이다. 옳은 것을 모두 고르시오. (단, $f'(x)$는 함수 $f(x)$의 도함수다.)

ㄱ. $f'(a)=0$이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극값을 갖는다.
ㄴ. 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$이다.
ㄷ. 함수 $f(x)$가 다항함수면서 $x=a$에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$이다.

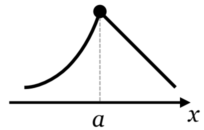
풀이 함수 $f(x)$가 연속함수임에 주의하면서 참, 거짓을 판단해보자.

ㄱ. $f'(a)=0$이더라도 $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 모두 $(+)$라면 오른쪽 그림과 같이 함수 $f(x)$가 $a$를 포함하는 구간에서 증가하므로 극값을 가질 수 없다.




마찬가지로 $f'(a)=0$이더라도 $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 모두 $(-)$라면 함수 $f(x)$가 $a$를 포함하는 구간에서 감소하므로 극값을 가질 수 없다. (거짓)

ㄴ. 함수 $f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, $x=a$에서 극대지만 그래프 모양이 뾰족하기 때문에 $f'(a)$의 값은 존재하지 않는다. (거짓)




ㄷ. 함수 $f(x)$가 다항함수면 모든 점에서 미분가능하므로 극점에서의 미분계수가 항상 0이다. (참)

예제9 삼차함수 $f(x)$의 그래프가 원점에 대해 대칭이고 $x=1$에서 극값을 가질 때, 그래프와 $x$축 교점의 $x$좌표 중에서 양수인 것을 구하여라.

풀이 그래프가 원점에 대해 대칭인 함수는 기함수이므로 삼차함수 $f(x)$는 홀수 차수 항만 갖는다. ($p.262$ 참고) 따라서 함수식과 도함수는

$$f(x)=ax^3+bx \Rightarrow f'(x)=3ax^2+b$$

로 나타낼 수 있다. 또한 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극값을 가지므로 여기서의 미분계수가 0이다. 따라서

$$f'(1)=3a+b=0 \Rightarrow b=-3a$$

로부터 $f(x)=ax^3-3ax$가 되며, 그래프와 $x$축 교점의 $x$좌표는 방정식 $f(x)=0$의 실근이므로 다음과 같이 계산된다.

$$ax^3-3ax=0 \Rightarrow ax(x^2-3)=0 \Rightarrow x=0 \text{ 또는 } x=\pm\sqrt{3}$$

이 중에서 양수인 것은 $\sqrt{3}$

예제10 함수 $f(x)=x^3+ax^2+9x+b$가 $x=1$에서 극댓값 0을 가질 때, 상수 $a$, $b$의 곱 $ab$의 값을 구하여라.

풀이 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극댓값 0을 가지면 $f(1)=0$, $f'(1)=0$이 동시에 성립한다. 따라서

$$f(1)=a+b+10=0 \quad \cdots\cdots①$$

이고, 도함수 $f'(x)=3x^2+2ax+9$로부터

$$f'(1)=2a+12=0 \quad \cdots\cdots②$$

이다. ①, ②를 연립해서 풀면

$$a=-6,\ b=-4 \Rightarrow ab=24$$

예제11 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프는 $x=a$와 $x=b$에서 만나고, $a<c<b$인 $x=c$에서 두 함숫값의 차가 최대가 된다. 다음 중 항상 옳은 것은?

① $f'(c)=-g'(c)$ ② $f'(c)=g'(c)$ ③ $f'(a)=g'(b)$
④ $f'(b)=g'(b)$ ⑤ $f'(a)=g'(a)$

★ 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 함숫값 차의 변화를 조사하려면 $h(x)=f(x)-g(x)$로 정의되는 새로운 함수 $h(x)$를 이용하는 것이 좋다.

풀이1 새로운 함수 $h(x)$를 $h(x)=f(x)-g(x)$로 정의하면 이 함수는 다음을 만족한다.

① 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능하므로 함수 $h(x)$도 미분가능하다.
② $x=c$에서 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 차가 최대이므로 함수 $h(x)$는 $x=c$에서 최대 또는 최소가 된다.

최댓값은 극댓값 가운데 하나, 최솟값은 극솟값 가운데 하나이므로 함수 $h(x)$는 $x=c$에서 극대 또는 극소가 되고, $x=c$에서 미분가능하기 때문에 $h'(c)=0$을 만족한다. 따라서

$$h'(c)=f'(c)-g'(c)=0 \Rightarrow f'(c)=g'(c)$$

로부터 답은 ②가 된다.

풀이2 $p.142$에서 배웠던 롤의 정리와 그 증명을 이용한다.

새로운 함수 $h(x)$를 $h(x)=f(x)-g(x)$로 정의하면 이 함수는 다음을 만만족한다.

①두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능하므로 함수 $h(x)$도 미분가능하다.

② 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 만나므로

$$f(a)=g(a)$$
$$f(a)-g(a)=h(a)=0$$

③ 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=b$에서 만나므로

$$f(b)=g(b)$$
$$f(b)-g(b)=h(b)=0$$

④ $x=c$에서 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 차가 최대이므로 함수 $h(x)$는 $x=c$에서 최대 또는 최소가 된다.

따라서 함수 $h(x)$는 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속이고, 열린 구간 $(a,b)$에

서 미분가능하며, $h(a)=h(b)$가 성립하므로 롤의 정리에 의해 $h'(\alpha)=0$을 만족하는 $\alpha$가 열린 구간 $(a, b)$에 존재한다.

또한 롤의 정리의 증명 과정에 따라 함수 $h(x)$는 $x=\alpha$에서 최대 또는 최소이므로 $\alpha=c$가 되어야 한다. 그러므로

$$h'(\alpha)=h'(c)=f'(c)-g'(c)=0 \Rightarrow f'(c)=g'(c)$$

모평 예제12 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)-x=0$이 서로 다른 세 실근 $\alpha$, $\beta$, $\gamma$를 갖는다.
(나) $x=3$일 때 극값 7을 갖는다.
(다) $f(f(3))=5$

$f(f(x))$를 $f(x)-x$로 나눈 몫을 $g(x)$, 나머지를 $h(x)$라 할 때 옳은 것만을 아래에서 모두 고르시오.

ㄱ. $\alpha$, $\beta$, $\gamma$는 방정식 $f(f(x))-x=0$의 근이다.
ㄴ. $h(x)=x$
ㄷ. $g'(3)=1$

풀이 ㄱ. 조건 (가)로부터

$$f(\alpha)-\alpha=0 \qquad f(\beta)-\beta=0 \qquad f(\gamma)-\gamma=0$$
$$f(\alpha)=\alpha \qquad f(\beta)=\beta \qquad f(\gamma)=\gamma$$

이므로 $f(f(x))-x$에 $x=\alpha$, $\beta$, $\gamma$를 각각 대입하면

$$f(f(\alpha))-\alpha=f(\alpha)-\alpha=\alpha-\alpha=0$$
$$f(f(\beta))-\beta=f(\beta)-\beta=\beta-\beta=0$$
$$f(f(\gamma))-\gamma=f(\gamma)-\gamma=\gamma-\gamma=0$$

이 성립한다. 따라서 $\alpha$, $\beta$, $\gamma$는 방정식 $f(f(x))-x=0$의 근이다. (참)

ㄴ. $f(f(x))\div\{f(x)-x\}$의 몫이 $g(x)$, 나머지가 $h(x)$이므로 다항식의 나눗셈에 대한 항등식

$$f(f(x))=\{f(x)-x\}g(x)+h(x) \quad \cdots\cdots ①$$

가 성립한다. 이때, 나누는 식 $f(x)-x$가 3차식이므로 나머지 $h(x)$는 2차 이하의 식이다. 또한 ①에 $x=\alpha$를 대입하면

$$f(f(\alpha))=\{f(\alpha)-\alpha\}g(\alpha)+h(\alpha)$$
$$\alpha=h(\alpha)$$

이며, 같은 방법으로 ①에 $x=\beta$, $x=\gamma$를 대입하면 $\beta=h(\beta)$, $\gamma=h(\gamma)$를 얻을 수 있다.

따라서 2차 이하의 다항함수 $h(x)$의 그래프는 서로 다른 세 점 $(\alpha, \alpha)$, $(\beta, \beta)$, $(\gamma, \gamma)$를 지나며, 모두 직선 $y=x$ 위의 점이기 때문에 $h(x)=x$가 된다. (참)

ㄷ. 합성함수의 미분법(p.129 참고)으로 ①의 양변을 $x$에 대해 미분하면

$$f'(f(x))f'(x)=\{f'(x)-1\}g(x)+\{f(x)-x\}g'(x)+h'(x)$$

이며, 여기에 $x=3$을 대입하면 다음과 같다.

$$f'(f(3))f'(3)=\{f'(3)-1\}g(3)+\{f(3)-3\}g'(3)+h'(3)$$

(나)로부터

$$f(3)=7, \ f'(3)=0$$

ㄴ으로부터

$$h(x)=x, \ h'(x)=1$$

이며, ①에 $x=3$을 대입하면

$$f(f(3))=\{f(3)-3\}g(3)+h(3)$$
$$5=4g(3)+3$$
$$g(3)=\frac{1}{2}$$

$$0=-\frac{1}{2}+4g'(3)+1$$

$$g'(3)=-\frac{1}{8} \text{ (거짓)}$$

지금까지 도함수 $f'(x)$를 이용해서 함수 $f(x)$의 증감과 극점을 파악하는 방법을 배웠다. 여기에 함수의 증감표를 도입하면 함수의 증감과 극점을 체계적으로 정리할 수 있으며, 함수의 그래프를 그리는데 활용할 수 있다.

## 함수의 증감표

• 함수의 증감표는 말 그대로 함숫값이 증가, 감소하는 경향을 표로 정리한 것이며, 다음과 같이 작성한다.

① 주어진 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$를 구하고, 방정식 $f'(x)=0$을 푼다.

② 아래와 같이 세 개의 행으로 이루어진 표를 그리고 각 행의 첫 번째 칸에 차례로 $x$, $f'(x)$, $f(x)$를 쓴다.

| $x$ | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | | | | | | |
| $f(x)$ | | | | | | | |

③ 첫 번째 행에 정의역의 양 끝값, ①에서 얻은 실근, 미분불가능할 때의 $x$값을 작은 것부터 순서대로 나열한다. 또한 각 값 사이의 빈 칸은 $\cdots$ 으로 채워서 무수히 많은 실수가 있음을 표시한다.

$f'(x)=0$의 근　　정의역의 양끝값

| $x$ | $-\infty$ | $\cdots$ | $\alpha$ | $\cdots$ | $\beta$ | $\cdots$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | | | | | | |
| $f(x)$ | | | | | | | |

④ 첫 번째 행에 맞춰 두 번째 행에 $f'(x)$의 값 또는 부호를 넣는다.

| $x$ | $-\infty$ | $\cdots$ | $\alpha$ | $\cdots$ | $\beta$ | $\cdots$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | | | | | | |

구간 $(-\infty, \alpha)$의 $f'(x)$ 부호　$x=\alpha$에서 $f'(x)$ 값　구간 $(\alpha, \beta)$의 $f'(x)$ 부호　$x=\beta$에서 $f'(x)$ 값　구간 $(\beta, \infty)$의 $f'(x)$ 부호

⑤ 첫 번째, 두 번째 행에 맞춰 세 번째 행에 함수 $f(x)$의 함숫값, 극한 및 증가·감소 기호를 넣는다. 이때, 증가 기호는 오른쪽 위로 향하는 화살표 ↗, 감소 기호는 오른쪽 아래로 향하는 화살표 ↘를 사용한다.

| $x$ | $-\infty$ | $\cdots$ | $\alpha$ | $\cdots$ | $\beta$ | $\cdots$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $f(\alpha)$ | ↘ | $f(\beta)$ | ↗ | $+\infty$ |

$x\to-\infty$일 때의 극한　$x\to\infty$일 때의 극한

구간 $(-\infty, \alpha)$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$ 증가　$x=\alpha$에서의 극댓값　구간 $(\alpha, \beta)$에서 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$ 감소　$x=\beta$에서의 극솟값　구간 $(\beta, \infty)$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$ 증가

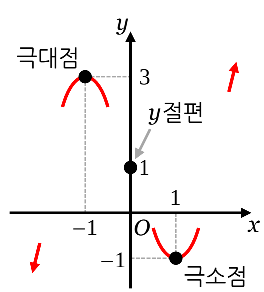
예제13 함수 $f(x)=x^3-3x+1$에 대한 함수의 증감표를 작성하고, 그래프 개형을 그리시오.

풀이 함수 $f(x)$의 정의역이 모든 실수의 집합이고, 도함수를 0으로 둬서 만든 방정식 $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)=0$의 실근이 $-1$, $1$이므로 다음과 같은 함수의 증감표를 만들 수 있다.

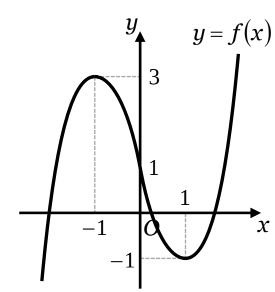
| $x$ | $-\infty$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $3$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $\infty$ |

☆ $f'(x)$의 부호는 구간에 속하는 실수를 대입해서 파악한다.
① 구간 $(-\infty, -1)$: $x=-2$ 대입
$f'(-2)=3\cdot(-1)\cdot(-3)>0$
② 구간 $(-1, 1)$: $x=0$ 대입
$f'(0)=3\cdot1\cdot(-1)<0$
③ 구간 $(1, \infty)$: $x=2$ 대입
$f'(2)=3\cdot3\cdot1>0$

여기서 얻은 극대점 $(-1, 3)$, 극소점 $(1, -1)$을 좌표평면 위에 표시하고 극대점에는 ∩를, 극소점에는 ∪를 그린다. 또한 $x\to\pm\infty$일 때의 극한을 화살표로 나타낸다.




각 점을 부드러운 곡선으로 이어주면 오른쪽과 같은 함수 $f(x)$의 그래프 개형이 된다.

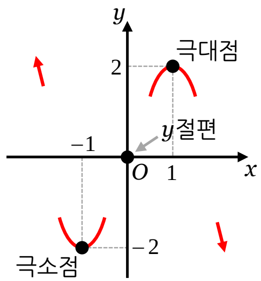


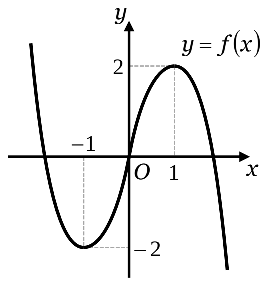
예제14 다음 함수의 그래프 개형을 그려라.

(1) $f(x)=-x^3+3x$ (2) $g(x)=x^3-3x^2+3x$

풀이 (1) 방정식 $f'(x)=-3x^2+3=-3(x+1)(x-1)=0$의 근이 $-1$, $1$이므로 함수의 증감표는 오른쪽과 같고 극소점은 $(-1,-2)$, 극대점은 $(1,2)$이다. 따라서 그래프 개형은 다음과 같이 그려진다.

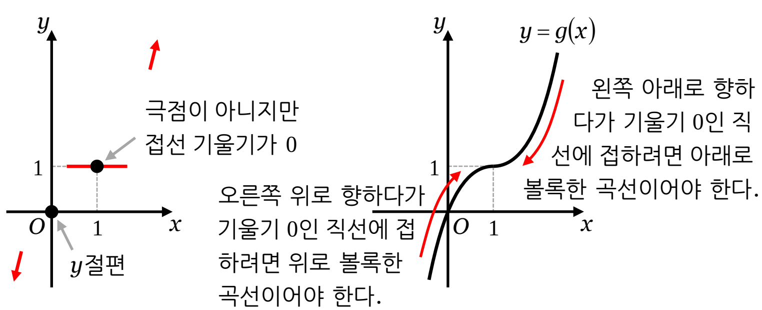
| $x$ | $-\infty$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $\infty$ | $\searrow$ | $-2$ | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ | $-\infty$ |




(2) 방정식 $g'(x)=3x^2-6x+3=3(x-1)^2=0$의 근이 $1$ 뿐이므로 함수의 증감표는 오른쪽과 같고 극점은 없다. 또한 점 $(1,1)$에서의 접선 기울기가 $0$임에 유의하면 그래프 개형은 다음과 같이 그려진다.

| $x$ | $-\infty$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $\infty$ |

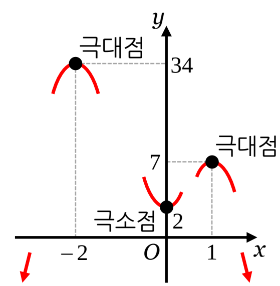


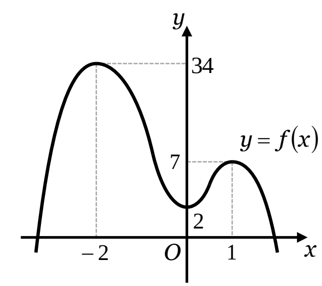

예제15 다음 함수의 그래프 개형을 그려라.

(1) $f(x)=-3x^4-4x^3+12x^2+2$ (2) $g(x)=x^4-4x^3$

풀이 (1) 방정식 $f'(x)=-12x^3-12x^2+24x=-12x(x-1)(x+2)=0$의 근이 $-2$, $0$, $1$이므로 함수의 증감표는 오른쪽과 같고 극대점은 $(-2,34)$, $(1,7)$, 극소점은 $(0,2)$이다. 따라서 그래프 개형은 다음과 같다.

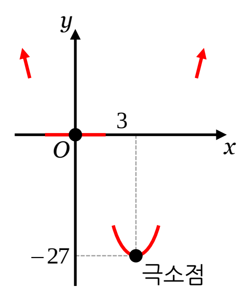
| $x$ | $-\infty$ | $\cdots$ | $-2$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $1$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $34$ | $\searrow$ | $2$ | $\nearrow$ | $7$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

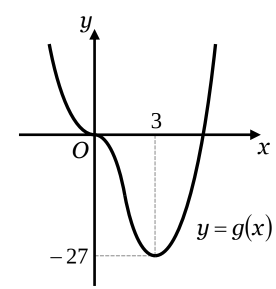



(2) 방정식 $g'(x)=4x^3-12x^2=4x^2(x-3)=0$의 근이 $0$, $3$이므로 함수의 증감표는 오른쪽과 같고 극소점은 $(3,-27)$, 극대점은 없다. 또한 점 $(0,0)$에서의 접선 기울기가 $0$임에 유의하면 그래프 개형은 다음과 같이 그려진다.

| $x$ | $-\infty$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $3$ | $\cdots$ | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-27$ | $\nearrow$ | $\infty$ |



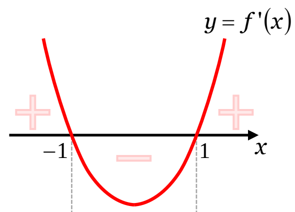



**• 함수의 증가·감소와 극대·극소 – 유형①**
**$f'(x)$의 그래프를 알면 증감표가 없이 $f(x)$의 그래프를 그릴 수 있다.**

★ 문제에 도함수 $f'(x)$의 그래프 개형이 주어지거나 쉽게 그릴 수 있다면 방정식 $f'(x)=0$의 실근과 $f'(x)$의 부호를 빠르게 파악할 수 있다. 그러므로 함수의 증감표를 작성할 필요 없이, 함수 $f(x)$의 그래프 개형을 바로 그릴 수 있다.

★ $p.167$ 예제13에 주어진 함수 $f(x)=x^3-3x+1$의 그래프 개형을 도함수 $f'(x)$의 그래프 개형으로 그리면 다음과 같다.

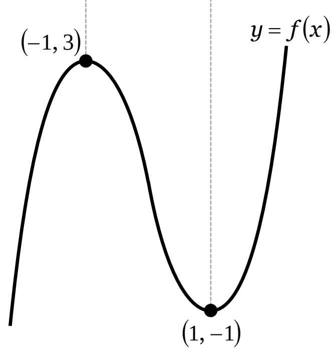
① 도함수
$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$
의 그래프 개형을 그린다. 정확하게 그릴 필요는 없으며, $x$절편과 함숫값 부호만 맞으면 된다.




| 구간 $(-\infty,-1)$ | 구간 $(-1,1)$ | 구간 $(1,\infty)$ |
|---|---|---|
| $f'(x)>0$ | $f'(x)<0$ | $f'(x)>0$ |
| $f(x)$ 증가 | $f(x)$ 감소 | $f(x)$ 증가 |

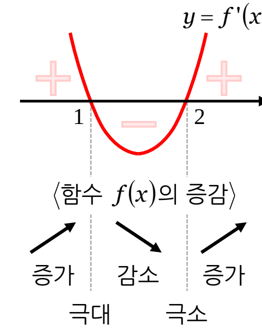
② $f'(x)$의 부호가 $(+)\to(-)\to(+)$의 순서로 변하므로 함수 $f(x)$는 (증가)→(감소)→(증가)한다. 또한 $x=-1$일 때 극댓값이 3이므로 극대점은 $(-1,3)$, $x=1$일 때 극솟값이 $-1$이므로 극소점은 $(1,-1)$이다.

이를 이용해서 함수 $f(x)$의 그래프 개형을 그리면 오른쪽과 같다.




예제16 함수 $f(x)=2x^3-9x^2+12x+2$의 극댓값을 $M$, 극솟값을 $m$이라 할 때, $Mm$의 값을 구하여라.

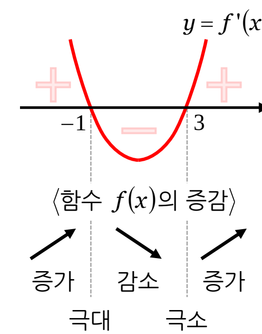
풀이 도함수
$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$
의 그래프를 이용해서 함수 $f(x)$의 증감을 조사하면 오른쪽과 같다.




여기서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대, $x=2$에서 극소이므로
$$\begin{pmatrix}\text{극댓값 } f(1)=2-9+12+2=7=M\\ \text{극솟값 } f(2)=16-36+24+2=6=m\end{pmatrix}$$
이며, $Mm=42$이다.

예제17 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x$는 $x=a$에서 극솟값 $b$를 가진다. 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(2, f(2))$에서 접하는 직선을 $l$이라 할 때, 점 $(a,b)$에서 직선 $l$까지의 거리가 $d$이다. $90d^2$의 값을 구하여라.

풀이 도함수 $f'(x)=x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$의 그래프로 함수 $f(x)$의 증감을 조사하면 오른쪽과 같다.




여기서 함수 $f(x)$의 극솟값이 $f(3)=-9$이므로 $a=3$, $b=-9$이다. 또한 $f(2)=-\frac{22}{3}$, $f'(2)=-3$으로부터 접선 $l$의 방정식은 다음과 같다.
$$y-\left(-\frac{22}{3}\right)=-3(x-2)$$
$$9x+3y+4=0$$
따라서
$$d=\begin{pmatrix}\text{점 }(3,-9)\text{와}\\ \text{접선 } l \text{ 사이 거리}\end{pmatrix}=\frac{|27-27+4|}{\sqrt{81+9}}=\frac{4}{\sqrt{90}} \Rightarrow 90d^2=90\times\frac{16}{90}=16$$

**예제18** 모든 계수가 정수인 삼차함수 $y=f(x)$는 다음 조건을 만족한다.

> (가) 모든 실수 $x$에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이다.
> (나) $f(1)=5$ (다) $1<f'(1)<7$

함수 $y=f(x)$의 극댓값이 $m$일 때, $m^2$의 값을 구하여라.

**풀이** (가) 삼차함수 $f(x)$는 기함수이므로 홀수차수 항만 갖는다. 그러므로

$f(x)=ax^3+bx$, $f'(x)=3ax^2+b$로 둘 수 있다. (단, $a\neq 0$)

(나) $f(1)=a+b=5$로부터 $b=5-a$이다.

(다) $1<f'(1)<7$로부터

$1<3a+b<7 \Rightarrow 1<3a+(5-a)<7 \Rightarrow -2<a<1$

이며, 여기에 속하는 정수는 $-1$과 $0$이다. 그런데 $f(x)$가 삼차함수이려면 $a\neq 0$이므로 $a=-1$, $b=6$이다.

(가) ~ (다)로부터

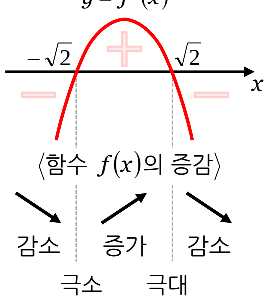
$f(x)=-x^3+6x$

$f'(x)=-3x^2+6=-3(x+\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$

이며, 함수 $f(x)$의 증감을 조사하면 오른쪽과 같다. 따라서 함수 $f(x)$의 극댓값은

$f(\sqrt{2})=4\sqrt{2}=m$

$\therefore m^2=32$




**예제19** 실수의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 두 조건을 만족한다.

> (가) 임의의 실수 $x$, $y$에 대하여 $f(x-y)=f(x)-f(y)+xy(x-y)$
> (나) $f'(0)=8$

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극댓값을 갖고 $x=b$에서 극솟값을 가질 때, $a^2+b^2$의 값을 구하여라.

★ 함수 $f(x)$가 $f(x+y)=\cdots$ 꼴의 함수방정식으로 정의되면 도함수의 정의 $f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$로 $f'(x)$를 구할 수 있다. (p.117 참고)

**풀이** 조건 (가)와 도함수의 정의에 의해

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

조건 (가)의 함수방정식에 $y$ 대신 $-\Delta x$를 대입하면

$f(x+\Delta x)=f(x)-f(-\Delta x)+x(-\Delta x)(x+\Delta x)$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{f(x)-f(-\Delta x)+x(-\Delta x)(x+\Delta x)\}-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left\{\frac{f(-\Delta x)}{-\Delta x}-x(x+\Delta x)\right\}$$

$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x)}{\Delta x}=8$

로부터 $\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(-\Delta x)}{-\Delta x}=8$이다.

$$=8-x^2$$

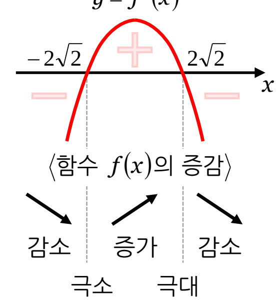
이므로 방정식

$f'(x)=-(x+2\sqrt{2})(x-2\sqrt{2})=0$

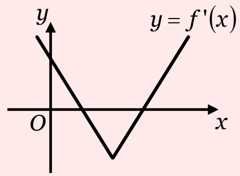
의 근은 $x=\pm 2\sqrt{2}$이고, 함수 $f(x)$의 증감은 오른쪽과 같다.

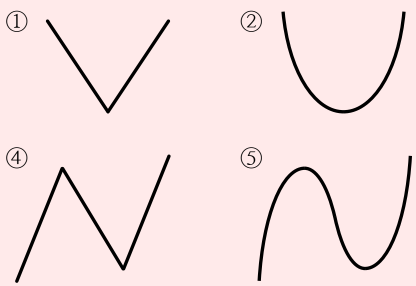
따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2\sqrt{2}$에서 극소, $x=2\sqrt{2}$에서 극대이며 각각 $b$, $a$의 값이 된다.

$\therefore a^2+b^2=(2\sqrt{2})^2+(-2\sqrt{2})^2=16$



예제20 다항함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같다. 다음에서 함수 $f(x)$의 그래프의 개형으로 알맞은 것은?

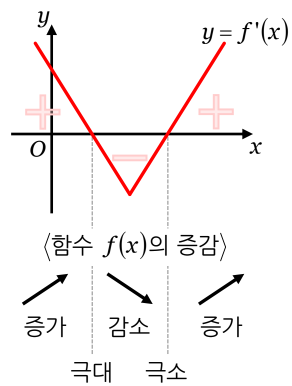


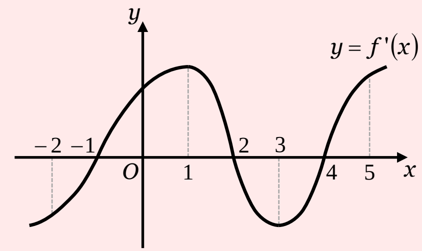

풀이 도함수 $f'(x)$의 그래프를 이용해서 함수 $f(x)$의 증감을 조사하면 오른쪽과 같다. 따라서 (증가)→(감소)→(증가)의 형태인 ④와 ⑤ 가운데 하나가 함수 $f(x)$의 그래프 개형이 될 수 있다.

그런데 도함수 $f'(x)$의 그래프가 두 개의 직선으로 이루어져 있기 때문에 $f'(x)$의 함수식은 두 개의 일차식을 포함하며, $f(x)$의 식은 두 개의 이차식으로 구성된다.

따라서 $f(x)$의 그래프 개형은 곡선으로 이루어진 ⑤가 더 가깝다고 할 수 있다.



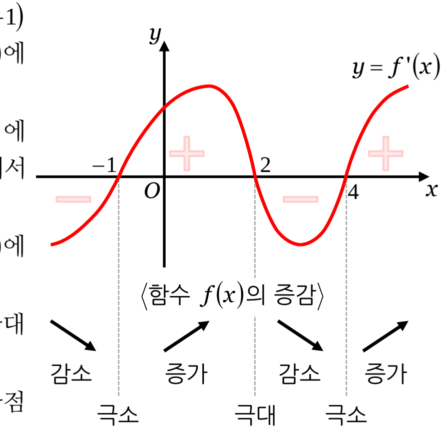

예제21 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 함수 $f(x)$에 대한 설명으로 옳은 것은?



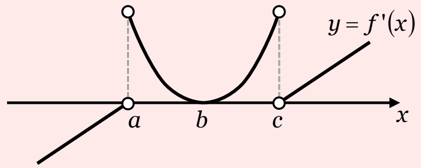

① 함수 $f(x)$는 구간 $(-2,1)$에서 증가한다.
② 함수 $f(x)$는 구간 $(1,3)$에서 감소한다.
③ 함수 $f(x)$는 구간 $(4,5)$에서 증가한다.
④ 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극소다.
⑤ 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극소다.

풀이 도함수 $f'(x)$의 그래프 개형으로 함수 $f(x)$의 증감을 조사하면 아래 오른쪽과 같다. 이를 이용해서 ①~⑤의 참, 거짓을 판단하면

① 함수 $f(x)$는 구간 $(-2,-1)$에서 감소하고, 구간 $(-1,1)$에서 증가한다. (거짓)
② 함수 $f(x)$는 구간 $(1,2)$에서 증가하고, 구간 $(2,3)$에서 감소한다. (거짓)
③ 함수 $f(x)$는 구간 $(4,5)$에서 증가한다. (참)
④ 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극대다. (거짓)
⑤ 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극점을 갖지 않는다. (거짓)



예제22 연속함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$의 그래프가 다음 그림과 같다.

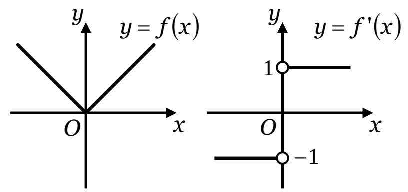



아래의 설명 가운데 옳은 것을 모두 고르시오.

ㄱ. $x<a$일 때 함수 $f(x)$는 증가한다.
ㄴ. $x=a$에서 함수 $f(x)$는 극솟값을 갖는다.
ㄷ. $b<x<c$일 때 함수 $f(x)$는 증가한다.
ㄹ. $x=c$에서는 함수 $f(x)$의 극값이 존재하지 않는다.

★ 함수 $f(x)$가 연속함수더라도 미분불가능한 점을 가질 수 있다. 예를 들어 함수 $f(x)=|x|$는 모든 실수에서 연속이지만, 도함수 $f'(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

따라서 예제22 에서처럼 도함수 $f'(x)$가 불연속점을 갖는다고 해서 함수 $f(x)$도 불연속점을 가질거라 생각하면 안된다.




풀이 도함수 $f'(x)$의 그래프를 이용해서 함수 $f(x)$의 증감을 조사하면 오른쪽과 같다.

ㄱ. $x<a$일 때 함수 $f(x)$는 감소한다. (거짓)
ㄴ. $x=a$에서 함수 $f(x)$는 극소다. (참)
ㄷ. $b<x<c$일 때 함수 $f(x)$는 증가한다. (참)
ㄹ. $x=c$와 그 주변에서 함수 $f(x)$는 증가한다. (참)