

하루 중 90%는 점 손하게 10%는 자신있게...

월 별 모의고사	주관	문항	풀이개수	변형문항수	변형문항 난이도
3월	교육청	20	1	1	☆☆☆☆
		21	2	1	☆☆☆☆☆
		28	2	1	☆☆☆☆
		29	1	1	☆☆☆☆
		30	2	1	☆☆☆☆☆
4월	교육청	20	2	1	☆☆☆☆
		21	1	1	☆☆☆☆☆
		28	1	1	☆☆☆☆
		29	1	1	☆☆☆☆☆
		30	1	1	☆☆☆☆☆
6월	평가원	21	3	1	☆☆☆☆☆
		29	1	1	☆☆☆☆
		30	1	1	☆☆☆☆☆
7월	교육청	21	1	1	☆☆☆☆☆
		29	1	1	☆☆☆☆
		30	1	1	☆☆☆☆☆
7월	사관학교	21	1	1	☆☆☆☆☆
		30	2	2	☆☆☆☆☆
9월	평가원	21	2	1	☆☆☆☆☆
		29	1	1	☆☆☆☆
		30	2	4	☆☆☆☆☆
10월	교육청	21	1	1	☆☆☆☆☆
		29	1	1	☆☆☆☆
		30	1	1	☆☆☆☆☆
11월 수능	평가원	21	1	1	☆☆☆☆☆
		29	1	1	☆☆☆☆
		30	1	1	☆☆☆☆☆
문항수		총 27문항		총 31문항	
기출+변형 문제 합계 58문항 + 2018 나형 제작 킬러문항 42문항 ⇨ 총 100문항					
량데뷰 실전 모의고사 가형					
회차		1등급컷	2등급컷	21,29,30외 주요 문항	난이도
1회		68점	60점	4점 짜리 모두	☆☆☆☆☆
2회		68점	60점	4점 짜리 모두	☆☆☆☆☆
3회		68점	60점	4점 짜리 모두	☆☆☆☆☆
4회		68점	60점	4점 짜리 모두	☆☆☆☆☆
5회		68점	60점	4점 짜리 모두	☆☆☆☆☆

상위권 수학 왕채규 세바사(4)

합성함수의 연속성에 관하여

① 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 모두 $x=a$ 에서 연속일 때, 합성함수 $g(f(x))$ 가 $x=a$ 에서 연속이다 : 거짓

설명 예를 들어 $f(x)=x-1$, $g(x)=\frac{1}{x+1}$ 이면 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 모두 $x=0$ 에서 연속이지만

$$g(f(x)) = \frac{1}{x} \text{ 은 } x=0 \text{에서 불연속이다.}$$

⇒ 합성함수 $g(f(x))$ 가 $x=a$ 에서 연속하려면 $f(a)=b$ 라 할 때, $g(x)$ 가 $x=b$ 에서 연속이어야 한다.

② $y=(g \circ f)(x)$ 의 불연속인 점은 다음 두 가지 경우의 x 좌표에서 확인하면 된다.

㉠ $y=f(x)$ 가 불연속인 점의 x 좌표

㉡ $y=g(x)$ 가 불연속인 점의 x 좌표를 함수값으로 갖는 $f(x)$ 의 x 좌표

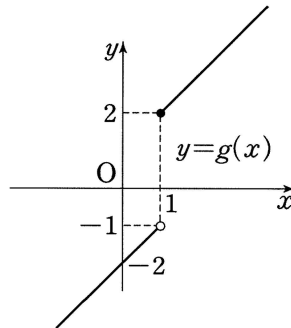
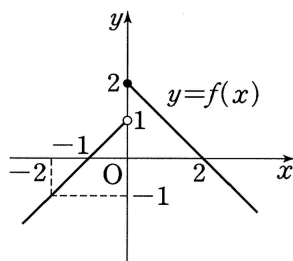
⇒ **$y=g(x)$ 가 불연속인 점의 x 좌표는 확인할 필요가 없다.**

예를 들어 위 설명에서 $g(x)=\frac{1}{x+1}$ 는 $x=-1$ 에만 불연속인데 $y=g(f(x))$ 의 $x=-1$ 에서의 연속성은

$f(x)=x-1$ 이 $x=-1$ 에서 연속이고 $f(-1)=\lim_{x \rightarrow -1} f(x)=-2$ 이므로 $g(x)=\frac{1}{x+1}$ 의 $x=-2$ 에서

연속성을 따지는 문제가 된다. 따라서 굳이 따질 필요가 없다.

[관련 문제] 두 함수 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 다음 합성함수의 연속성을 확인하기 위해 조사해야 할 x 좌표를 말하여라.



(1) $g(f(x))$

(2) $f(g(x))$

(3) $f(f(x))$

(4) $g(g(x))$

왕채규 풀이

(1) $y=f(x)$ 는 $x=0$ 에서 불연속이고
 $y=g(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이므로
 $y=g(f(x))$ 는 $x=0$ 과 $f(x)=1$ 인 점에서 연속성을 조사하면 된다. $f(x)=1$ 인 점은 $x=1$ 이다.
 따라서 $x=0, x=1$

(2) $y=f(x)$ 는 $x=0$ 에서 불연속이고
 $y=g(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이므로
 $y=f(g(x))$ 에서 $x=1$ 과 $g(x)=0$ 인 점에서 연속성을 조사하면 되는데 $g(x)=0$ 인 점은 없으므로

$x=1$ 에서만 조사하면 된다.

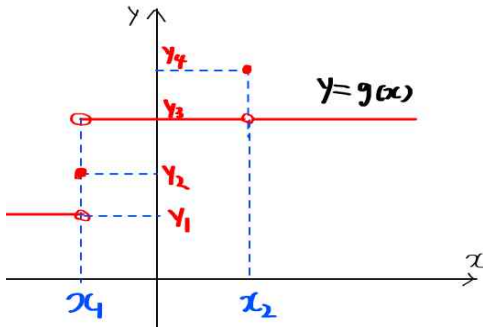
(3) $y=f(x)$ 는 $x=0$ 에서 불연속이므로
 $y=f(f(x))$ 는 $x=0$ 과 $f(x)=0$ 인 점에서 연속성을 조사하면 된다. $f(x)=0$ 인 점은 $x=-1, x=2$ 이다. 따라서 $x=0, x=-1, x=2$

(4) $y=g(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이므로
 $y=g(g(x))$ 는 $x=1$ 과 $g(x)=1$ 인 점에서 연속성을 조사하면 되는데 $g(x)=1$ 인 점은 없으므로
 $x=1$ 에서만 조사하면 된다.

상위권 수학 왕세북 세바사(5)

곱함수와 합성함수 연속과 미분가능

$y=g(x)$ 가 다음과 같이 $x=x_1$
 $x=x_2$ 에서 불연속이며 극한값과
함숫값이 y_1, y_2, y_3, y_4 일 때



(1) $f(x)g(x)$ 가 실수 전체에서 연속 $\Rightarrow$

$$f(x) = (x-x_1)(x-x_2)Q(x) \text{ 꼴}$$

(2) $f(x)g(x)$ 가 실수 전체에서 미분가능 $\Rightarrow$

$$f(x) = (x-x_1)^2(x-x_2)Q(x) \text{ 꼴}$$

(3) $f(g(x))$ 가 실수 전체에서 연속 $\Rightarrow$

$$f(x) = (x-y_1)(x-y_2)(x-y_3)(x-y_4)Q(x) + k$$

설명

(1)

$g(x)$ 가 $x=x_1$ 과 $x=x_2$ 에서 좌극한 우극한 값이 존재하면서 불연속이므로 연속함수 $f(x)$ 가 $f(x_1)=0, f(x_2)=0$ 이면 $f(x)g(x)$ 가 실수전체에서 연속이다.

(2)

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \text{ 에서 } \{f(x_1)g(x_1)\}' = f'(x_1)\lim_{x \rightarrow x_1} g(x) + f(x_1)g'(x_1)$$

이때 함수 $g(x)$ 는 $\lim_{x \rightarrow x_1} g(x)$ 와 $g'(x_1)$ 가 모두 존재하지 않으므로 $f'(x_1)=0, f(x_1)=0$ 이면 $f(x)g(x)$ 는

$x=x_1$ 에서 미분가능하다. 따라서 $f(x)$ 는 적어도 $(x-x_1)^2$ 항을 인수로 가져야 한다.

$$\{f(x_2)g(x_2)\}' = f'(x_2)\lim_{x \rightarrow x_2} g(x) + f(x_2)g'(x_2)$$

$g(x)$ 는 $\lim_{x \rightarrow x_2} g(x)$ 은 존재하고 $g'(x_2)$ 가 존재하지 않으므로 $f(x_2)=0$ 이면 $f(x)g(x)$ 는 $x=x_2$ 에서 미분가

능하다. 따라서 $f(x)$ 는 적어도 $(x-x_2)$ 항을 인수로 가져야 한다.

따라서 곱함수 $f(x)g(x)$ 가 실수 전체에서 미분가능하려면 $f(x)$ 는 $f(x) = (x-x_1)^2(x-x_2)Q(x)$ 꼴이다.

(3)

$x=x_1$ 일 때 $f(g(x))$ 가 연속이기 위해서는 $g(x)$ 의 좌극한 y_1 , 함숫값 y_2 , 우극한 y_3 이 모두 같아야 하므로 $x=x_1$ 에서 연속일 조건은 $f(y_1)=f(y_2)=f(y_3)$ 이다.

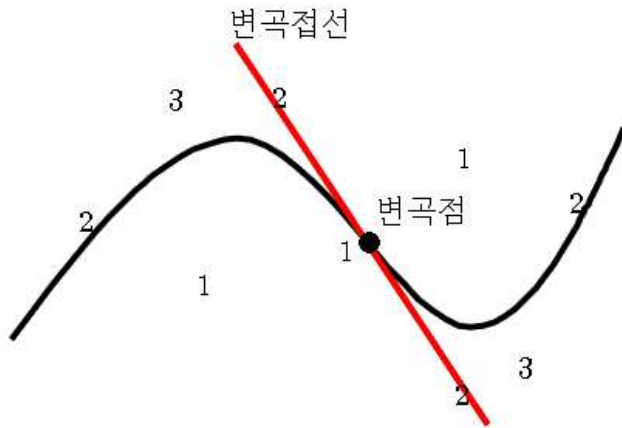
$x=x_2$ 일 때 $f(g(x))$ 가 연속이기 위해서는 $g(x)$ 의 극한 y_3 과 함숫값 y_4 가 같아야 하므로 $x=x_2$ 에서 연속일 조건은 $f(y_3)=f(y_4)$ 이다.

따라서 합성함수 $f(g(x))$ 가 실수 전체에서 연속이기 위해서는 $f(x)$ 는

$f(y_1)=f(y_2)=f(y_3)=f(y_4)$ 이므로 $f(x) = (x-y_1)(x-y_2)(x-y_3)(x-y_4)Q(x) + k$ 꼴이면 된다.

상위권 수학 왕데뷰 세바사(7)

삼차함수에서



- ① 변곡점에서는 1개의 접선을 그을 수 있다.
- ② 변곡점을 제외한 변곡접선 위의 점과 곡선 위의 점에서는 2개의 접선을 그을 수 있다.
- ③ 변곡접선과 곡선의 볼록한 부분을 경계로 하는 영역에서는 3개의 접선을 그을 수 있다.
- ④ 변곡접선과 곡선의 오목한 부분을 경계로 하는 영역에서는 1개의 접선을 그을 수 있다.

[관련 문제] 좌표평면 위의 점 $(1, k)$ 에서 곡선 $y = x^3 + x + 1$ 에 서로 다른 세 개의 접선을 그을 수 있을 때, 실수 k 의 값의 범위를 구하여라.

일반 풀이

점의 좌표를 $(a, a^3 + a + 1)$ 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(a) = 3a^2 + 1$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - (a^3 + a + 1) = (3a^2 + 1)(x - a)$$

$$\therefore y = (3a^2 + 1)x - 2a^3 + 1$$

위의 직선이 점 $(1, k)$ 를 지나므로

$$-2a^3 + 3a^2 + 2 = k \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

점 $(1, k)$ 에서 곡선 $y = x^3 + x + 1$ 에 서로 다른 세 개의 접선을 그을 수 있으므로 삼차방정식 $\textcircled{1}$ 은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

$g(a) = -2a^3 + 3a^2 + 2$ 라 하면

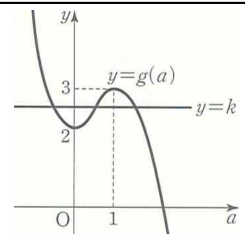
$$g'(a) = -6a^2 + 6a = -6a(a - 1)$$

$g'(a) = 0$ 에서 $a = 0$ 또는 $a = 1$

함수 $g(a)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	$\dots$	0	$\dots$	1	$\dots$
$g'(a)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(a)$	$\searrow$	2	$\nearrow$	3	$\searrow$

삼차방정식 $\textcircled{1}$ 이 서로 다른 세 실근을 가지려면 오른쪽 그림과 같이 함수 $y = g(a)$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로



$$2 < k < 3$$

왕데뷰 풀이

$$y = x^3 + x + 1$$

$$y' = 3x^2 + 1$$

$$y'' = 6x \text{ 에서 변곡점은 } (0, 1) \text{ 이고}$$

변곡접선 방정식은 $y = x + 1$

$x = 1$ 일 때의 변곡접선 위의 점은 $(1, 2)$

곡선 위의 점은 $(1, 3)$ 이므로 서로 다른

3개의 접선을 그을 수 있는 영역중

x 좌표가 1인 $(1, k)$ 가 속하는 부분은

$2 < k < 3$ 이다.

상위권 수학 왕벚꽃 세미나(11-1)

f(f(x))=x의 고찰

$f(f(x))=x$ 을 만족하는 실수 a 가 존재하면 $f(f(a))=a$ 가 성립한다.

이때 $f(a)$ 가 될 수 있는 값은 a 이거나 a 가 아닌 어떤 수 b 로 생각할 수 있다.

(i) $f(a)=a$ 이면 $f(f(a))=f(a)=a$ 이므로 항상 성립한다. $\Rightarrow (a, a)$ 는 $y=x$ 위의 점이다.

(ii) $f(a)=b$ 이면 $f(f(a))=f(b)=a$ 에서 $f(b)=a$ 가 성립해야 한다.

$\Rightarrow (a, b)$ 와 (b, a) 는 $y=x$ 에 대칭인 점이다. (단, $a \neq b$)

(i), (ii)에서 $f(f(x))=x$ 을 만족하는 실수 a 는 $y=f(x)$ 와 $y=x$ 의 교점 또는 그것의 $y=x$ 에 대칭인 함수 $x=f(y)$ 의 교점의 x 좌표임을 알 수 있다.

$\Downarrow$ 아래 그림은 차례로 예)로 든 식의 함수

$f(x)$ 가 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수인 경우에 대해 생각해보자.

$(f \circ f)(x)=x$ 을 만족하는 실근은 $y=f(x)$ 와 $y=x$ 의 교점 또는 $y=f(x)$ 와 $x=f(y)$ 의 교점의 x 좌표이다. $y=f(x)$ 와 $y=x$ 의 교점의 x 좌표를 크기순으로 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$ 이라 하고

$y=f(x)$ 와 $x=f(y)$ 의 교점 중 $y \neq x$ 인 x 좌표를 크기순으로 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{m-1}, \beta_m$ 이라 하자.

삼차함수 $y=f(x)$ 와 $y=x$ 의 교점의 최대 개수는 3이므로 $n=1, 2, 3$ 이다.

$\Rightarrow \alpha$ 근은 반드시 1개이상 존재하며 3개까지 존재할 수 있다.

또한 삼차함수 개형을 생각해 보면 $(f \circ f)(x)=x$ 의 가장 작은 실근과 가장 큰 실근은 $y=f(x)$ 와 $y=x$ 의 교점의 x 좌표이므로 $\alpha_1 < \beta_1, \beta_m < \alpha_3$ 이다.

그런데 $y \neq x$ 인 $y=f(x)$ 와 $x=f(y)$ 의 교점은 $y=x$ 에 대칭으로 $f(\beta_p)=\beta_q$ 이면 $f(\beta_q)=\beta_p$ 을 만족하므로 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{m-1}, \beta_m$ 의 m 은 짝수다. $\Rightarrow \beta$ 근은 존재하지 않거나 짝수개 존재한다.

따라서 다음을 만족한다.

(i) $n=1$ 일 때 $(f \circ f)(x)=x$ 의 해는 1개로 유일하다.

예) $f(x)=x^3+1 \Rightarrow \alpha$ 근이 1개이고 β 근은 0개다.

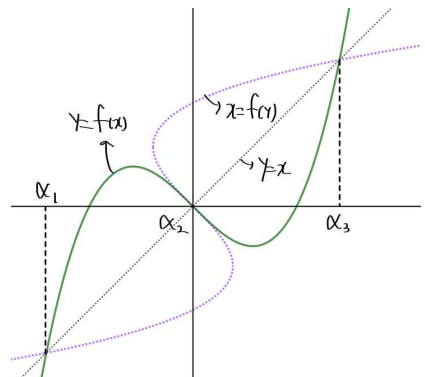
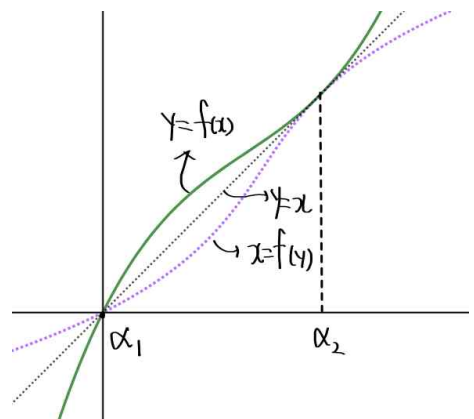
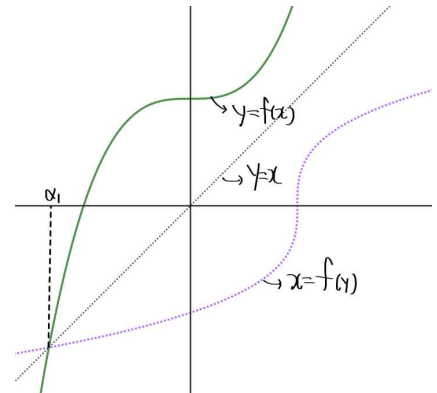
(ii) $n=2$ 일 때 $(f \circ f)(x)=x$ 의 해는 2개로 모두 $y=x$ 위에 있다.

즉 삼차함수 $f(x)$ 가 $y=x$ 에 접하는 경우이다.

예) $f(x)=x(x-1)^2+x \Rightarrow \alpha$ 근이 2개이고 β 근은 0개다.

(iii) $n=3$ 일 때

㉠ β 근이 0개일 때 $(f \circ f)(x)=x$ 의 해는 3개이고 모두 $y=x$ 위에 있다. 예) $y=x^3-x$



상위권 수학 왕새부 세미나(14)

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^m (x-\beta)^n dx = (-1)^n \frac{m!n!}{(m+n+1)!} (\beta-\alpha)^{m+n+1} \quad (\text{단, } \alpha < \beta)$$

[관련 공식]

$$\textcircled{1} \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta) dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

$$\textcircled{2} \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^2(x-\beta) dx = -\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4$$

$$\textcircled{3} \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta)^2 dx = \frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4$$

$\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^m (x-\beta)^n dx$ 을 x 축으로 $-\alpha$ 만큼 옮기면

$\int_0^{\beta-\alpha} x^m \{x-(\beta-\alpha)\}^n dx$ 이고 $\beta-\alpha=k$ 라 두면

$$\int_0^k x^m (x-k)^n dx = \left[\frac{1}{m+1} x^{m+1} \times (x-k)^n \right]_0^k - \int_0^k \frac{1}{m+1} x^{m+1} \times n(x-k)^{n-1} dx \quad \leftarrow \text{부분적분}$$

$$= -\frac{n}{m+1} \int_0^k x^{m+1} (x-k)^{n-1} dx$$

$$= -\frac{n}{m+1} \left\{ \left[\frac{1}{m+2} x^{m+2} \times (x-k)^{n-1} \right]_0^k - \int_0^k \frac{1}{m+2} x^{m+2} \times (n-1)(x-k)^{n-2} dx \right\}$$

$$= \frac{n(n-1)}{(m+2)(m+1)} \int_0^k x^{m+2} (x-k)^{n-2} dx$$

$$= \frac{n(n-1)}{(m+2)(m+1)} \left\{ \left[\frac{1}{m+3} x^{m+3} \times (x-k)^{n-2} \right]_0^k - \int_0^k \frac{1}{m+3} x^{m+3} \times (n-2)(x-k)^{n-3} dx \right\}$$

$$= -\frac{n(n-1)(n-2)}{(m+3)(m+2)(m+1)} \int_0^k x^{m+3} (x-k)^{n-3} dx$$

=

$$= (-1)^n \frac{n(n-1)(n-2) \cdots \{n-(n-1)\}}{(m+n)(m+n-1)(m+n-2) \cdots (m+1)} \int_0^k x^{m+n} dx$$

$$= (-1)^n \frac{n(n-1)(n-2) \cdots \{n-(n-1)\}}{(m+n)(m+n-1)(m+n-2) \cdots (m+1)} \left[\frac{1}{m+n+1} x^{m+n+1} \right]_0^{\beta-\alpha}$$

$$= (-1)^n \frac{m!n!}{(m+n+1)!} (\beta-\alpha)^{m+n+1} : (-1)^n \text{의 의미} \Rightarrow y = (x-\alpha)^m (x-\beta)^n \quad (\alpha < \beta) \text{는 } n \text{이 짝수이면}$$

x 축 윗부분에서 n 이 홀수 이면 x 축 아랫부분에서 정적분값이 나타난다. $\rightarrow$ 최고차항의 계수가 양인 다항함수의 그래프는 항상 오른쪽 끝이 위로 향하는 모양이므로, 그래프를 그릴 때는 오른쪽에서 왼쪽으로 그려나가는 것이 편리하다. $y = (x-k)^n$ 꼴의 그래프는 n 이 짝수일 때 $x=k$ 의 좌우에서 부호가 변하지 않으므로 그래프는 x 축을 통과하지 못하고 반사되고 n 이 홀수일 때는 $x=k$ 의 좌우에서 부호가 변하므로 그래프는 x 축을 통과하게 된다.

상위권 수학 왕세부 세미나(16)

표본분산 S^2 을

$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 이 아니라 $\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 으로 정의하는 이유는?

설명1

모집단에서 추출한 크기 n 인 표본 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 에 대하여 $S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 라 하고 S_n^2 의 기댓값 $E(S_n^2)$ 을 구해 보자.

$$\begin{aligned} E(S_n^2) &= E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right) \\ &= \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^n \{(X_i - m) - (\bar{X} - m)\}^2\right) \\ &= \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^n \{(X_i - m)^2 - 2(X_i - m)(\bar{X} - m) + (\bar{X} - m)^2\}\right) \\ &= \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^n (X_i - m)^2 - 2(\bar{X} - m) \sum_{i=1}^n (X_i - m) + n(\bar{X} - m)^2\right) \\ &= \frac{1}{n} \left[E\left(\sum_{i=1}^n (X_i - m)^2\right) - 2E\left((\bar{X} - m) \sum_{i=1}^n (X_i - m)\right) + nE\{(\bar{X} - m)^2\} \right] \\ &= \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^n E\{(X_i - m)^2\} - nE\{(\bar{X} - m)^2\} \right\} \\ &= \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^n V(X_i) - nV(\bar{X}) \right\} \\ &= \frac{1}{n} \left\{ n\sigma^2 - n\frac{\sigma^2}{n} \right\} = \frac{n-1}{n} \sigma^2 \end{aligned}$$

따라서 $E(S_n^2) = \frac{n-1}{n} \sigma^2$ 이므로 S_n^2 은 모집단의

분산 σ^2 보다 작아지는 경향이 있다.

S_n^2 에 $\frac{n}{n-1}$ 을 곱한 S^2 의 기댓값은

$$E(S^2) = E\left(\frac{n}{n-1} S_n^2\right) = \frac{n}{n-1} E(S_n^2) = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} \sigma^2 = \sigma^2$$

이므로, S^2 이 S_n^2 보다 모분산을 대신하기에 더 적절하다. 이와 같은 이유로 표본분산을 S^2

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \text{으로 정의한다.}$$

설명2

모평균 $E(X_i) = m$, 모분산 $V(X_i) = \sigma^2$ 라 할 때

$$\begin{aligned} E\left\{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right\} &= E\left\{\sum_{i=1}^n (X_i^2 - 2X_i \bar{X} + \bar{X}^2)\right\} \\ &= E\left(\sum_{i=1}^n X_i^2 - 2\bar{X} \sum_{i=1}^n X_i + \sum_{i=1}^n \bar{X}^2\right) \\ &= E\left(\sum_{i=1}^n X_i^2 - 2\bar{X} (n\bar{X}) + n(\bar{X}^2)\right) \quad \because \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \\ &= E\left(\sum_{i=1}^n X_i^2 - n(\bar{X}^2)\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i^2) - E(n\bar{X}^2) \\ &= \sum_{i=1}^n E(X_i^2) - nE(\bar{X}^2) \\ &= \sum_{i=1}^n (\sigma^2 + m^2) - n\left(\frac{\sigma^2}{n} + m^2\right) \end{aligned}$$

$$\therefore E(X_i^2) = V(X_i) + m^2, \quad E(\bar{X}^2) = V(\bar{X}) + m^2$$

$$= n\sigma^2 + nm^2 - \sigma^2 - nm^2 = (n-1)\sigma^2$$

따라서

$$E\left\{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right\} = (n-1)\sigma^2 \text{이고}$$

한편, 표본분산 S^2 의 평균을 구해보면

$$E(S^2) = E\left\{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}\right\}$$

$$= \frac{1}{n-1} E\left\{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right\}$$

$$= \frac{1}{n-1} (n-1)\sigma^2 = \sigma^2$$

에서 표본분산의 평균이 모분산임을 알 수 있다.

$\therefore$ 표본분산 $\Rightarrow$ 표본 각각의 분산

$\therefore$ 표본분산의 평균 $\Rightarrow$ 모분산

10.

n 이 자연수일 때, 함수 $f(x) = \frac{x+2n}{-3x+p}$ 이

$$f(4) < f(6) < f(2)$$

을 만족시키도록 하는 자연수 p 의 최댓값을 M 이라 하자.

자연수 n 에 대하여 $p=M$ 일 때의 함수 $f(x)$ 와 함수

$$g(x) = \frac{x+n}{x+q}$$

$$g(f(6)) < g(f(2)) < g(f(4))$$

을 만족시키도록 하는 자연수 q 의 개수를 a_n 이라

하자. $\sum_{k=1}^{30} a_k$ 의 값을 구하시오.

[2019학년도 3월 교육청 나형 30번]-변형

20.

두 실수 a, b 에 대하여 정의역이 $\{x \mid x \geq 0\}$ 인 함수

$$f(x) = \frac{1-2ax-2b}{ax+b} \quad (ab > 0)$$

이 있다. 실수 k 에 대하여 정의역이 $\{x \mid x \geq 0\}$ 인 함수

$$g(x) = \begin{cases} 2k-f(x) & (f(x) < k) \\ f(x) & (f(x) \geq k) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x \rightarrow \infty} |g(x)| = 1$

(나) $|g(0)| = 2$

(다) 함수 $y = |g(x)|$ 의 그래프와 직선 $y = -k$

는 두 점 $\left(\frac{1}{14}, -k\right), (\alpha, -k)$ 에서만 만난다.

(단, $\alpha > \frac{1}{14}$)

직선 $y = m(x-2\alpha) + \frac{3}{2}$ 이 함수 $y = |g(x)|$ 의 그래프와 만나는 서로 다른 점의 개수를 $h(m)$ 이라 할 때, 함수 $h(m)$ 이 불연속이 되는 모든 실수 m 의 값의 합은 M 이다. $182M$ 의 값을 구하시오.

[2019학년도 4월 교육청 나형 30번]-변형

28.

실수 k 에 대하여 함수 $f(x)$ 가

$$f(x) = x^2 |x - k|$$

이다. 함수 $g(x) = x^2 - 5x + 4$ 에 대하여 합성함수 $y = (g \circ f)(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 개수를 $h(k)$ 라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

— | 보 기 | —

㉠. $h(2) = 6$

㉡. $h(k) = 8$ 를 만족시키는 자연수 k 의 최솟값은 3이다.

㉢. $h(k) = 5$ 을 만족시키는 모든 실수 k 의 값의 곱은 $-\frac{9}{\sqrt[3]{16}}$ 이다.

- ① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉠, ㉢
 ④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

[2019학년도 사관학교 나형 21번]-변형

58.

최고차항의 계수가 -1 인 삼차함수 $f(x)$ 와 최고차항의 계수가 -5 인 이차함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, 0)$ 에서의 접선과 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2, 0)$ 에서의 접선은 모두 x 축이다.
 (나) 점 $(2, 0)$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 에 그은 접선의 개수는 2이다.
 (다) 방정식 $f(x)=g(x)$ 는 오직 하나의 실근 $x=p$ ($p>2$)을 가진다.

$0 \leq x \leq 12$ 인 모든 실수 x 에 대하여

$$g(x) \leq kx - 16 \leq f(x)$$

를 만족시키는 실수 k 의 최댓값과 최솟값을 각각 α, β 라 할 때, $\alpha - \beta = a + b\sqrt{5}$ 이다.

$a+b$ 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 유리수이다.)

[2019학년도 11월 수능 나형 30번]-변형

72.

삼차함수 $f(x)$ 와 실수 t 에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 와 곡선 $y=x^2+t$ 의 교점의 개수를 $g(t)$ 라 하자. 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

— | 보 기 | —

ㄱ. $f(x)=x^3+x$ 이면 함수 $g(t)$ 는 상수 함수이다.

ㄴ. 함수 $g(t)$ 가 상수함수이면, 삼차함수 $f(x)$ 의 극값은 존재하지 않는다.

ㄷ. $f(x)=x^3+ax^2+ax$ 이고 함수 $g(t)$ 가 $t=-2, t=2$ 에서 불연속이게 하는 가능한 a 값의 합은 5이다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

87.

실수전체에서 정의된 함수

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - px - 8q & (x \geq 4) \\ x - 4 & (x < 4) \end{cases} \text{의 역함수가 존재하도록}$$

하는 실수 p, q 에 대하여 $p^2 + q^2$ 의 최솟값은 m 이라

할 때 $m = \frac{b}{a}$ 이다. $a+b$ 의 값을 구하시오.

(단, a, b 는 서로소인 자연수)

99.

다음은 서로 다른 종류의 케이크 3개와 같은 종류의 마들렌 n ($n \geq 3$)개를 같은 종류의 선물상자 3개에 나누어 넣으려고 한다. 각 상자에 케이크가 각각 1개 이상씩 들어가도록 나누어 넣을 확률을 구하는 과정이다. (단, 마들렌은 들어가지 않는 상자가 있을 수 있다.)

상자 3개에 케이크가 들어간 개수를 순서쌍으로 나타내면 $(3, 0, 0)$, $(2, 1, 1)$, $(1, 1, 1)$ 이다. 이 세 가지 경우에서 각 상자에 케이크가 각각 1개 이상씩 들어가는 경우는 $(1, 1, 1)$ 인 경우이다.

(i) 각 상자에 케이크가 각각 1개 씩 들어가는 경우 비어 있던 같은 상자가 모두 다른 상자가 되었으므로 같은 종류의 마들렌이 세 상자에 들어가는 경우의 수는 $\frac{f(n)}{2}$ 이다.

(ii) 두 상자에 케이크 2개, 1개 들어가는 경우 비어 있던 같은 상자가 모두 다른 상자가 되었으므로 같은 종류의 마들렌이 세 상자에 들어가는 경우의 수는 $\frac{g(n)}{2}$ 이다.

(iii) 한 상자에 케이크 3개가 모두 들어간 경우 케이크 3개가 들어간 상자에 마들렌이 k 개 들어간다면 남은 서로 같은 두 상자에 남은 마들렌을 넣는 방법의 수는

$$\sum_{k=0}^{n-2} (\overline{h(n, k)}) + (n+1) \text{이다.}$$

(i), (ii), (iii)에서 각 상자에 케이크가 각각 1개 이상씩 들어가도록 나누어 넣을 확률을 P_n 라 하면

$$P_n = \frac{\frac{f(n)}{2}}{\frac{f(n)}{2} + \frac{g(n)}{2} + \sum_{k=0}^{n-2} (\overline{h(n, k)}) + (n+1)} \text{이다.}$$

$f(4) + \frac{g(5)}{h(8, 3)}$ 의 값은?

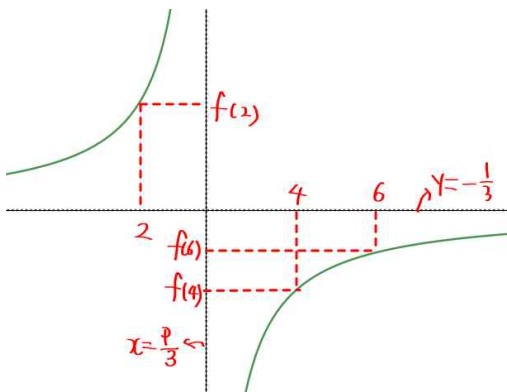
- ① 90 ② 93 ③ 96 ④ 99 ⑤ 100

10) 정답 555

$$f(x) = \frac{x+2n}{-3x+p}$$

$$= \frac{\left(x - \frac{p}{3}\right) + 2n + \frac{p}{3}}{-3\left(x - \frac{p}{3}\right)} = \frac{-\frac{1}{3}\left(2n + \frac{p}{3}\right)}{x - \frac{p}{3}} - \frac{1}{3}$$

에서 분자가 음수이므로 그래프 개형은 다음과 같다.



따라서 $2 < \frac{p}{3} < 4$ 에서 $6 < p < 12$ 이고 자연수 p 의
최댓값 $M=11$ 이다.

$M=11$ 이므로 $f(x) = \frac{x+2n}{-3x+11}$ 이다.

한편,

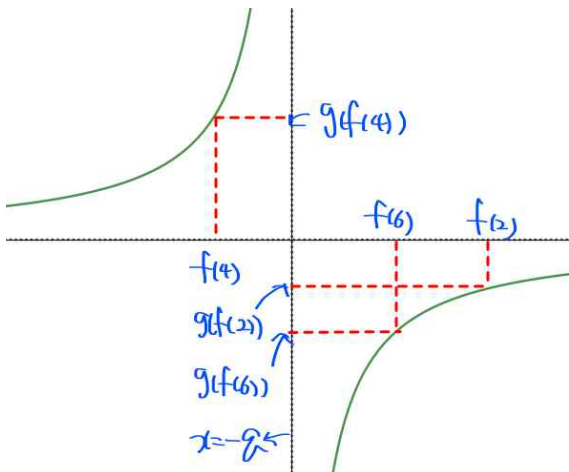
$$g(x) = \frac{x+n}{x+q} = \frac{x+q+n-q}{x+q}$$

$$= \frac{n-q}{x+q} + 1$$

$f(4) < f(6) < f(2)$ 에서 $g(f(6)) < g(f(2)) < g(f(4))$

이기 위해서는 분자 $n-q < 0$ 이고

즉 $x=-q$ 이 $f(4)$ 와 $f(6)$ 사이에 위치해야 한다.



따라서 $n-q < 0 \Rightarrow q > n \cdots \textcircled{7}$

$f(4) < -q < f(6)$ 에서

$$-2n-4 < -q < -\frac{6+2n}{7} \Rightarrow \frac{6+2n}{7} < q < 2n+4 \cdots \textcircled{8}$$

따라서 $\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ 에서

$$n=1 \text{ 일 때는 } \frac{8}{7} < q < 6 \text{ 에서 } a_1 = 4$$

$$n=2 \text{ 부터는 } \frac{6+2n}{7} < n \text{ 이므로}$$

$n=k(k \geq 2)$ 일 때 $k < q < 2k+4$ 이므로 $k+1$ 부터
 $2k+3$ 까지 자연수 개수이므로
 $(2k+3) - (k+1) + 1 = k+3$ 개다.

따라서

$$\sum_{k=1}^{30} a_k = 4 + \sum_{k=2}^{30} (k+3)$$

$$= 4 + \frac{29(5+33)}{2} = 4 + 551$$

$$= 555$$

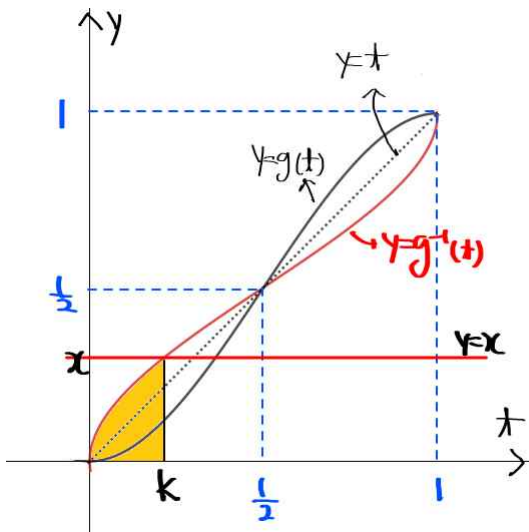
[랑대뷰팁]

$$\sum_{k=1}^{30} a_k = \sum_{k=1}^{30} (k+3) = \frac{30(4+33)}{2} = 555$$

로 계산해도 무방하다.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int_0^k \{x - g^{-1}(t)\} dt + \int_k^1 \{g^{-1}(t) - x\} dt \\
 &= \int_0^k (x) dt + \int_k^1 (-x) dt + \int_0^k (-g^{-1}(t)) dt + \int_k^1 (g^{-1}(t)) dt \\
 &= [xt]_0^k + [-xt]_k^1 + \int_0^k (-g^{-1}(t)) dt - 2 \int_0^k (g^{-1}(t)) dt \\
 &= (2k-1)x + \frac{1}{2} - 2 \int_0^k (g^{-1}(t)) dt \cdots \textcircled{7}
 \end{aligned}$$

한편, $S = \int_0^k (g^{-1}(t)) dt$ 라 두면 다음 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로

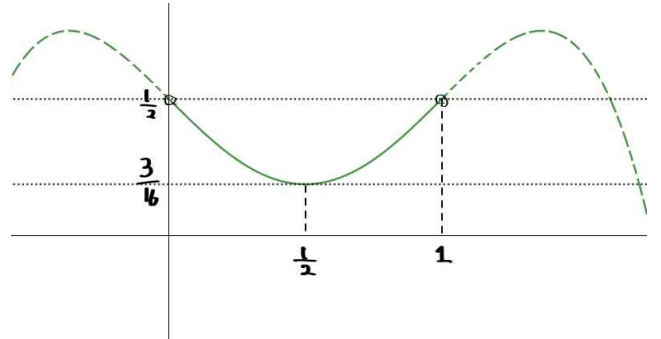


$$\begin{aligned}
 S &= kx - \int_0^x (g(t)) dt \\
 &= kx - \left[-\frac{1}{2}t^4 + t^3 \right]_0^x \\
 &= kx + \frac{1}{2}x^4 - x^3
 \end{aligned}$$

을 ⑦에 대입하면

$$\begin{aligned}
 f(x) &= (2k-1)x + \frac{1}{2} - 2 \left(kx + \frac{1}{2}x^4 - x^3 \right) \\
 &= -x^4 + 2x^3 - x + \frac{1}{2} \quad (0 \leq x \leq 1) \\
 f'(x) &= -4x^3 + 6x^2 - 1 = (2x-1)(-2x^2 + 2x + 1)
 \end{aligned}$$

이므로 열린구간 $(0, 1)$ 에서 함수 $f(x)$ 는 다음 그림과 같은 개형이며 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{16}$ 인 극솟값을 갖고



$x = \frac{1}{2}$ 에 대칭인 함수이다.

(i) 최솟값 $m(t)$ 에 대해 알아보자.

- ① $0 \leq t < \frac{1}{2}$ 일 때, $m(t) = \frac{3}{16}$
- ② $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ 일 때, $m(t) = f(t)$

따라서

$$\begin{aligned}
 &\int_0^1 m(t) dt \\
 &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{3}{16} dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t) dt \\
 &= \frac{3}{32} + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx \cdots \textcircled{8}
 \end{aligned}$$

(ii) 최댓값 $M(t)$ 에 대해 알아보자.

$y = f(x)$ 가 $x = \frac{1}{2}$ 에 대칭이므로 $f\left(\frac{1}{4}\right) = f\left(\frac{3}{4}\right)$ 이다.

따라서

- ③ $0 \leq t < \frac{1}{4}$ 일 때, $M(t) = f(t)$
- ④ $\frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2}$ 일 때, $M(t) = f\left(t + \frac{1}{2}\right)$
- ⑤ $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ 일 때, $M(t) = \frac{1}{2}$

따라서

$$\begin{aligned}
 &\int_0^1 M(t) dt \\
 &= \int_0^{\frac{1}{4}} f(t) dt + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} f\left(t + \frac{1}{2}\right) dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{2} dt
 \end{aligned}$$