

킬러 문항 해결 지침서

평가원 킬러-100제



NOTE

라던뷰

수학 가형

대상	평가원	문항	풀이개수	변형문항수	변형문항 난이도
2019학년도	11월 수능	21번	1	1	☆☆☆☆
		29번	1	1	☆☆☆☆
		30번	1	3	☆☆☆☆☆
	9월 모평	21번	3	1	☆☆☆☆
		29번	1	1	☆☆☆☆
		30번	3	2	☆☆☆☆☆
	6월 모평	21번	2	3	☆☆☆☆☆
		29번	2	1	☆☆☆☆☆
		30번	2	3	☆☆☆☆☆
2018학년도	11월 수능	21번	1	1	☆☆☆☆☆
		29번	1	1	☆☆☆☆☆
		30번	1	1	☆☆☆☆☆
	9월 모평	21번	2	1	☆☆☆☆
		29번	1	1	☆☆☆☆☆
		30번	1	1	☆☆☆☆☆
	6월 모평	21번	4	2	☆☆☆☆☆
		29번	2	2	☆☆☆☆☆
		30번	1	1	☆☆☆☆☆
2017학년도	11월 수능	21번	1	1	☆☆☆☆
		29번	2	1	☆☆☆☆☆
		30번	1	3	☆☆☆☆☆
	9월 모평	21번	1	1	☆☆☆☆☆
		29번	1	1	☆☆☆☆☆
		30번	2	2	☆☆☆☆☆
	6월 모평	21번	2	1	☆☆☆☆
		29번	1	2	☆☆☆☆☆
		30번	1	2	☆☆☆☆☆
2016학년도	11월 수능	21번	1	1	☆☆☆☆☆
		29번	2	1	☆☆☆☆☆
		30번	1	1	☆☆☆☆☆
	9월 모평	21번	1	1	☆☆☆☆☆
		29번	1	1	☆☆☆☆☆
		30번	1	1	☆☆☆☆☆
	6월 모평	21번	1	1	☆☆☆☆☆
		29번	1	1	☆☆☆☆☆
		30번	1	1	☆☆☆☆☆
2015학년도	11월 수능	30번	3	1	☆☆☆☆☆
	9월 모평	30번	1	1	☆☆☆☆☆
2014학년도	11월 수능	29번	1	1	☆☆☆☆☆
		30번	1	1	☆☆☆☆☆
기타	2012년 5월 실시 예비시행 30번,2010학년도 11월 25번,2009학년도 11월 25번,9월				
	총 문항수		기출44문항	변형4문항	
총 100문항					

8. [2019학년도 11월 수능 가형 30번 변형]-3

최고차항의 계수가 π 인 사차함수 $f(x)$ 에 대하여

함수 $g(x) = \frac{3}{4 - \sin(f(x))}$ 이 $x = \alpha$ 에서 극대이고

$\alpha \geq 0$ 인 모든 α 를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \dots$

$x = \beta$ 에서 극소이고 $\beta > 0$ 인 모든 β 를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \dots$ 라 할 때, $g(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\alpha_1 = 0, \beta_9 = 2$ 이고 $g(\alpha_1) = g(\beta_9) = \frac{6}{7}$

(나) $m \neq 1, n \neq 9$ 인 모든 자연수 m, n 에 대하여 $g(\alpha_m) - g(\beta_n) = \frac{2}{5}$ 이 성립한다.

$g'(-1) = a\pi$ 라 할 때, $a^2 = \frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, $0 < f(0) < \frac{\pi}{2}$, p, q 는 서로소인 자연수)

15. [2019학년도 9월 모평 가형 30번 변형]-2

최고차항의 계수가 양수이고 극솟값이 음수가 아닌 삼차함수 $f(x)$ 와 함수 $g(x) = x(x-2)e^x$ 에 대하여 합성함수 $h(x) = (f \circ g)(x)$ 가 다음 조건을 만족하게 하는 $f(x)$ 중 가장 작은 극댓값을 갖는 함수를 $m(x)$ 라 하자.

(가) $h(0) = 0$

(나) 방정식 $h(x) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

(다) 방정식 $h(x) = 4$ 의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

이때, $y = m(g(x))$ 의 $x = 0$ 에서의 접선은

$y = \frac{2}{m(4)}x$ 에 수직이다.

$m'(6)$ 의 값을 구하십시오.

(단, $\sqrt{2} \approx 1.4$, $e^{\sqrt{2}} \approx 4.1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$)

19. [2019학년도 6월 모평 가형 21번 변형]-3

$x \neq 0$ 인 실수에서 정의된 $f(x)$ 가 미분가능하고

$$xf(x) = (\sin^3 \theta + 2)x^3 - \int_1^x f(t) dt$$

을 만족한다. 함수 $f(x)$ 의 최솟값을 $g(\theta)$ 라 하자.

열린 구간 $(0, 2\pi)$ 에서 정의된 $g(\theta)$ 에 대하여 실수 t 에 대한 함수 $\sqrt{|g(\theta) - t|}$ 는 $\theta = k$ 에서 미분가능하지 않는다. 이때, 모든 실수 k 의 개수를 $h(t)$ 라 하자. 함수 $h(t)$ 에 대하여 합성함수 $(s \circ h)(t)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $s(x)$ 가 있다.

$$h\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = a, \quad h(\sqrt{3}) = b, \quad h\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right) = c \text{라 할 때,}$$

$s(a+3) - s(b+2) + c$ 의 값을 구하시오.

24. [2019학년도 6월 모평 가형 30번 변형]-2

실수 전체의 집합에서 미분 가능한 함수 $\{f(x)\}^2$ 에 대하여 곡선 $y = \{f(x)\}^2$ 위의 점 $(t, \{f(t)\}^2)$ 에서의 접선의 y 절편을 $g(t)$ 라 하자. 연속 함수 $g(t)$ 는 $t > 1$ 에서 증가하고 세 점 $(0, 0)$, $(t-1, g(t-1))$, $(t+1, g(t+1))$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이는 t 이고 함수 $f(x)$ 는 다음을 만족한다.

$$\int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1} \frac{\{f(x)\}^2}{x} dx = \frac{3}{5},$$

$$f(\sqrt{2}+1) = \frac{\sqrt{6\ln 3 + 2\ln 35 + 20}}{\sqrt{5}},$$

$$f(\sqrt{2}-1) = \frac{\sqrt{3-\ln 11}}{\sqrt{5}}$$

$y = \{f(x)\}^2$ 의 1에서 11까지의 평균변화율이 $\frac{5}{2}$

일 때, $\int_1^{11} \frac{\{f(x)\}^2}{x} dx$ 의 값을 구하시오.

(단, 구간 $(0, 11)$ 에서 $g(t) < 0$)

32. [2018학년도 9월 모평 가형 21번 변형]

수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1=0$, $a_{n+1}=a_n+2^n$ 이다. $x \geq 0$ 에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 모든 자연수 n 에 대하여

$$f(x) = \frac{1}{3^{n-2}} \sin\left(\frac{\pi(x-a_n)}{2^{n-1}}\right) \quad (a_n \leq x \leq a_{n+1}) \text{이다.}$$

일 때, $0 < \alpha < 2$ 인 실수 α 에 대하여

$$\int_{\alpha}^t f(x) dx = 0$$

을 만족시키는 t ($t > 0$)의 값의 개수가 27

개일 때의 $\ln(1 - \cos(\alpha\pi))$ 의 값은 $p\ln 2 - q\ln 3$ 이다.

자연수 p, q 에 대하여 $p+q$ 의 값을 구하시오.

36. [2018학년도 9월 모평 가형 30번 변형]

$x > 0$ 인 모든 실수에서 정의된 함수

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2+1} + \ln x \text{에 대하여 이차함수 } g(x) \text{와 양수}$$

k 는 다음 조건을 만족시킨다.

함수 $h(x) = \left| g(x) - f\left(\frac{x}{k}\right) \right|$ 는 $x = k$ 에서 최솟

값 $\frac{1}{2}g(k)$ 를 갖고, 닫힌구간 $\left[\frac{3k}{4}, \frac{5k}{4} \right]$ 에서

최댓값 $\frac{7}{25} + \ln(4e)$ 을 갖는다.

$g\left(\frac{k}{2}\right) = p + q \ln 3$ 일 때 $p \times q$ 의 값을 구하시오.

(단, $g(k) > 1, p, q$ 는 유리수이고 $0.51 < \ln \frac{5}{3} < 0.52$)

43. [2018학년도 6월 모평 가형 30번 변형]

실수 a 와 함수 $f(x) = e^{-x^2+3} - c$ ($c > 0$ 인 상수)

에 대하여 함수 $g(x)$ 를 $g(x) = \int_a^x f(t) dt$

라 하자. 함수 $y = g(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 서로 다른 점의 개수가 2가 되도록 하는 모든 a 의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열하면

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ (m 은 자연수)이다.

$a = \alpha_1$ 일 때, 함수 $g(x)$ 와 상수 k 는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$ 는 $x = -1$ 에서 극솟값을 갖는다.

(나) $\int_{\alpha_1}^{\alpha_m} g(x) dx = k\alpha_m \int_0^1 f(x) dx$

$k^m \times \ln c$ 의 값을 구하시오.

50. [2017학년도 11월 수능 가형 30번 변형]-2

실수 a 에 대하여 $f(a) < 0$ 이고, 최고차항의 계수가 -1 인 삼차함수 $f(x)$ 가 있다. 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \frac{f(x)}{x-a} \quad (\text{단, } x > a)$$

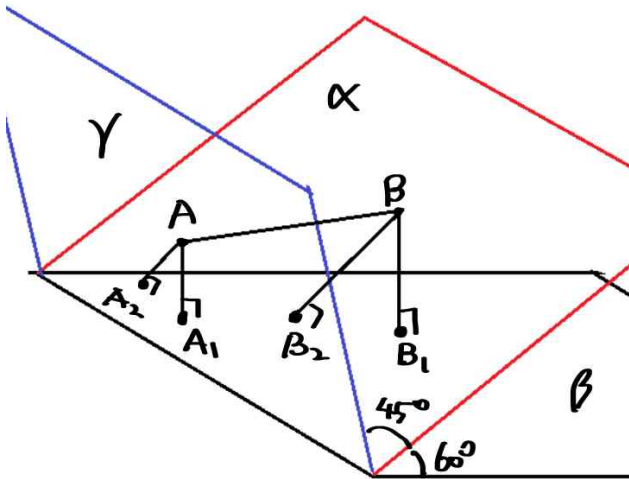
라 할 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{5}{3}$ 에서 극솟값을 갖는다.
- (나) 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$ 에서의 접선과 점 $(5, f(5))$ 에서의 접선은 점 $(a, 0)$ 을 지난다.
- (다) 방정식 $|g(x)| + g(t) = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 갖게 하는 실수 t 의 값은 오직 한 개다.

$f(1) < 0$ 일 때, $f(a) - f'(a)$ 의 값을 구하시오.

55. [2017학년도 9월 모평 가형 29번 변형]

그림과 같이 두 점 A, B 를 포함하는 평면을 α 라 하고 평면 α 와 이루는 예각이 60° 인 평면을 β , β 와 반대편 쪽으로 α 와 45° 의 각을 이루는 평면을 γ 라 하자. 두 점 A, B 에서 평면 β 에 내린 수선의 발을 각각 A_1, B_1 라 하고 평면 γ 에 내린 수선의 발을 각각 A_2, B_2 라 할 때 다음이 성립한다.



$$\overline{AB}=6, \overline{AA_1}=3\sqrt{3}, \overline{BB_1}=5\sqrt{3},$$

$$\overline{AA_2}=3, \overline{BB_2}=6$$

이때, 두 평면 AA_1B_1B 와 AA_2B_2B 가 이루는 각을 θ 라 할 때 $\cos\theta$ 의 값은 자연수 p, q 에 대하여

$\frac{\sqrt{p}-q}{12}$ 꼴로 나타난다. 이때 $p+q$ 의 값을 구하시오.

58. [2017학년도 9월 모평 가형 30번 변형]-2

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$ 와 다음 조건을 만족시키는 함수 $A(x)$ 가 있다.

$$(가) \ A(x) = \begin{cases} 3x^2 + 6x + 2 & (-2 \leq x \leq 0) \\ 2\cos\pi x & (0 \leq x \leq 2) \end{cases}$$

$$(나) \ A(x) = A(x+4)$$

$g(x) = |A(x)| + 2$ 에 대하여 함수 $h(x) = f(g(x))$ 는 실수 전체의 집합에서 이계도함수 $h''(x)$ 를 갖고, $h''(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다. 이 때, $f'(6)$ 의 값을 구하시오.

66. [2017학년도 6월 모평 가형 30번 변형]-2

실수 전체의 집합에서 미분 가능한 함수 $f(x)$ 가 상수 $a(0 < a < 2\pi)$ 와 모든 실수 x 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \quad f(x) = -f(-x)$$

$$(나) \quad \int_{x-a}^{x+2a} f(t)dt = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$(다) \quad f\left(-\frac{17\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

닫힌구간 $\left[0, \frac{3}{2}a\right]$ 에서 두 실수 b, c 에 대하여

$f(x) = b\sin(3x) + c\sin(7x)$ 일 때, $abc = -\frac{q}{p}\pi$ 이다.

$p^2 + q^2$ 의 값을 구하시오.

(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

84. [2016학년도 6월 모평 가형 30번 변형]

$x \geq 1$ 에서 정의된 연속함수 $f(x)$ 는 다음 조건을

만족시킨다. 이 때, $\int_1^{25} f(x) dx$ 의 최댓값은

$p + \frac{q \ln 3 - r}{\ln 2}$ 이다. $p + q + r$ 의 값을 구하시오.

(단, p, q, r 는 자연수이고, $\ln 2, \ln 3$ 는 무리수이다.)

(가) $f(1) = 1$ 이고 $f(25) \leq 5$ 이다.

(나) $1 \leq k \leq 24$ 인 각각의 정수 k 에 대하여

$f(kt) = f(k) \left(1 < t \leq 1 + \frac{1}{k} \right)$ 또는

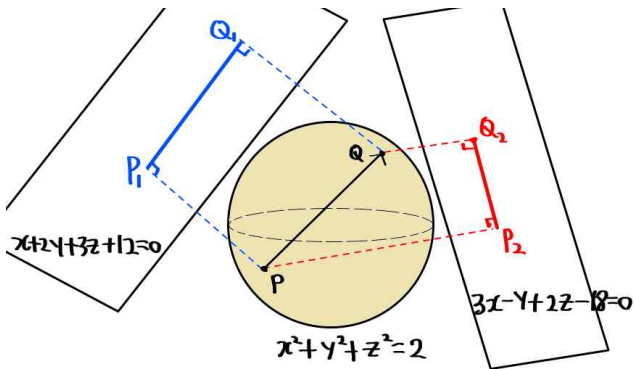
$f(kt) = \log_2 t + f(k) \left(1 < t \leq 1 + \frac{1}{k} \right)$ 이다.

(다) 열린구간 $(1, 25)$ 에서 함수 $f(x)$ 가

미분가능하지 않은 점의 개수는 2 이다.

90. [2014학년도 11월 수능 가형 29번 변형]

좌표공간에서 구 $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ 위를 움직이는 두 점 P, Q 가 있다. 두 점 P, Q 에서 평면 $x + 2y + 3z + 12 = 0$ 에 내린 수선의 발을 각각 P_1, Q_1 이라 하고, 평면 $3x - y + 2z - 18 = 0$ 에 내린 수선의 발을 각각 P_2, Q_2 라 하자.
 $2|\overrightarrow{PQ}|^2 - |\overrightarrow{P_1Q_1}|^2 - |\overrightarrow{P_2Q_2}|^2$ 의 최댓값을 구하시오.



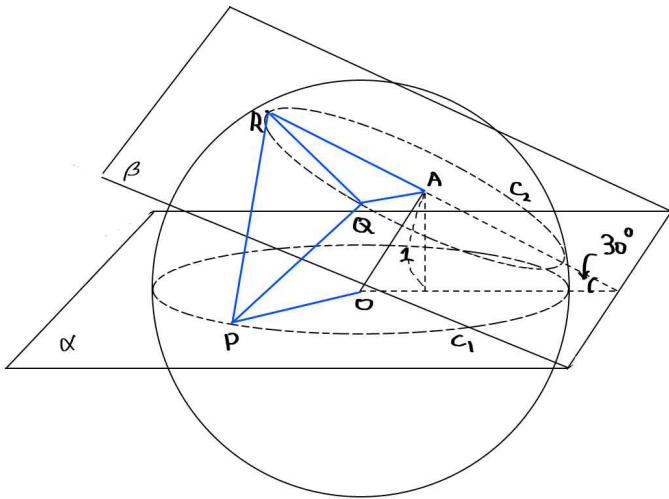
94. [2012년 5월 실시 예비시험 30번 변형]

반지름의 길이가 $\frac{4}{3}$ 인 구의 중심 O 를 지나는 평면을 α 라 하고, 평면 α 와 이루는 각이 30° 인 평면을 β 라 하자. 평면 α 와 구가 만나서 생기는 원을 C_1 , 평면 β 와 구가 만나서 생기는 원을 C_2 라 하자. 원 C_2 의 중심 A 와 평면 α 사이의 거리가 1일 때, 그림과 같이 다음 조건을 만족하도록 원 C_1 위에 점 P , 원 C_2 위에 두 점 Q, R 를 잡는다.

(가) $\angle QAR = 90^\circ$

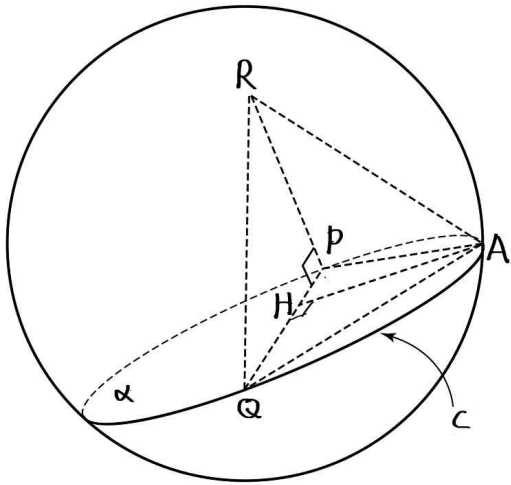
(나) 직선 OP 과 직선 AQ 는 서로 평행이다.

평면 PQR 과 평면 $AQPO$ 가 이루는 각을 θ 라 할 때, $\cos^2 \theta = \frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.
(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

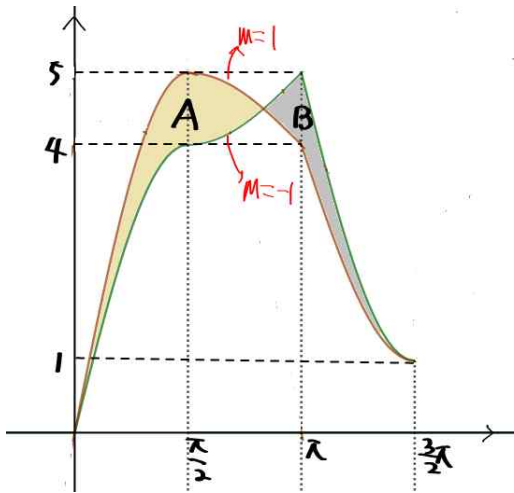


98. [2009학년도 11월 수능 가형 25번 변형]

좌표공간에서 구 $S : x^2 + y^2 + z^2 = 9$ 와 평면 $\alpha : x + 2y - 2z - 6 = 0$ 가 만나서 생기는 원을 C 라 하자. 원 C 위의 점 $A(0, 3, 0)$ 에 대하여 원 C 의 지름의 양 끝점 P, Q 를 점 A 에서 지름 $\overline{PQ}$ 에 내린 수선의 발을 H 라 할 때, $\overline{AH} = \frac{2\sqrt{30}}{5}$ 가 되도록 잡고, 점 P 를 지나고 평면 α 에 수직인 직선이 구 S 와 만나는 또 다른 점을 R 라 하자. 삼각형 ARQ 의 넓이를 s 라 할 때, s^2 의 값을 구하시오. (단, $\overline{AP} < \overline{AQ}$)



㉠, ㉡의 그래프를 다음과 같이 그려보면 영역 A가 영역 B보다 크므로 ㉡이 더 큰을 직관적으로 알 수 있다.



$$l + 2m + 3n = 5 + 2 + 9 = 16$$

[랑데뷰팁]

㉠의 값은 $5\pi - 1$, ㉡의 값은 $4\pi + 3$ 이다.

[다른 풀이]-1

$$f(x) = \begin{cases} (m+n+1)\sin x & (0 \leq x < \frac{\pi}{2}) \\ m\sin x + n+1 & (\frac{\pi}{2} \leq x < \pi) \\ n\sin x + n+1 & (\pi \leq x \leq \frac{3}{2}\pi) \end{cases} \text{에서}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{3}{2}\pi} f(x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((m+n+1)\sin x) dx \\ &+ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (m\sin x + n+1) dx + \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} (n\sin x + n+1) dx \\ &= 2m + (n+1)\pi + 1 \\ &= 2m + n\pi + \pi + 1 \end{aligned}$$

이므로 $m > 0, n > 0$ 이고 $2 < \pi$ 이므로 n 이 클수록 값이 커진다.

따라서 $n=3, m=1, l=5$ 일 때 최대가 된다.

$$l + 2m + 3n = 5 + 2 + 9 = 16$$

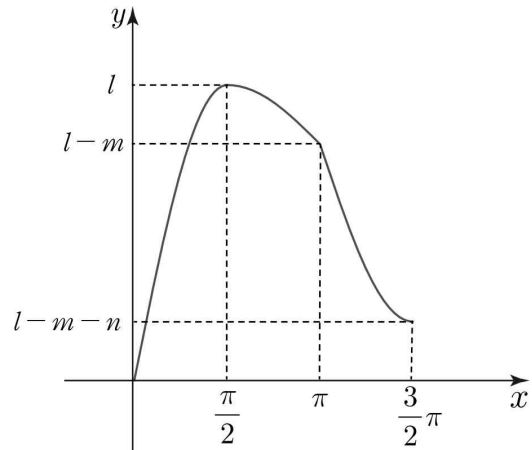
[다른 풀이]-2

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x) dx = f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} l \cos x dx = l$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f'(x) dx = f(\pi) - f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} m \cos x dx = -m$$

$$\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} f'(x) dx = f\left(\frac{3}{2}\pi\right) - f(\pi) = \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} n \cos x dx = -n$$

$f(0) = 0, f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 1$ 이므로 $y = f(x)$ 의 그래프는 아래와 같다.



$f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 1$ 에서 $l - m - n = 1$ ($l, m, n \geq 0$)이므로

$l + m + n \leq 10$ 에서 $2l \leq 11$ 이다.

따라서 정수 l 의 최댓값은 5이고 $m+n=4$ 이다.

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{3}{2}\pi} f(x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} l \sin x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (m \sin x + l - m) dx \\ &+ \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} (n \sin x + l - m - n) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= l + \left\{(-m) + \frac{\pi}{2}(l-m)\right\} + \left\{(-n) + \frac{\pi}{2}(l-m-n)\right\} \\ &= (l-m-n)\left(1 + \frac{\pi}{2}\right) + (l-m)\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$l - m - n = 1$ 이므로

$$= \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) + (l-m)\frac{\pi}{2}$$

$l - m$ 이 최대가 되어야 하므로

$m=1$ 이고 $m+n=4$ 이므로 $n=3$ 이다.

따라서 $l + 2m + 3n = 5 + 2 + 9 = 16$ 이다.

38) 정답 ▶ 31

[역방향 로피탈 정리를 이용한 풀이]

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)F'(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F'(x)}{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x) + C_1}{\ln|x-1| + C_2}$$

$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴 이므로 C_1, C_2 는 무시할 수 있는 상수

$$\text{따라서 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x)}{\ln|x-1|} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln|f(x)|}{\ln|x-1|} = 2 \text{ 이고}$$

$f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 사차함수 이므로

$f(x) = (x-1)^2 Q(x)$ 이다. 또한

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln|(x-1)^2 Q(x)|}{\ln|g(x)\tan x|}$$

$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴 이므로 $Q(0) = 0 \therefore f(x) = x(x-1)^2(x+k)$

또한 $f(-1) = 4$ 에서 $k = 0$

$x \rightarrow 0$ 일 때 $\tan x \approx x$ 이므로 $\therefore f(x) = (x-1)^2 x^2$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\ln|x-1| + 2\ln|x|}{\ln|g(x) \times x|}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\ln|x|}{\ln|x| + \ln|g(x)|} = \frac{1}{2} \text{ 이다.}$$

$$\text{한편 } \frac{1}{2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln|x^2|}{\ln|x^4|} \text{에서 } k=0, g(x) = x^3$$

$$\therefore f(x) = (x-1)^2 x^2, g(x) = x^3$$

$$\therefore f(2) + g(3) = 31$$

[다른 풀이]

$$F(x) = \ln|f(x)| \text{를 미분하면 } F'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)F'(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)f'(x)}{f(x)} = 2 \dots \dots \textcircled{1} \text{에서}$$

$f(1) = 0$ 이다. 따라서 $f(x)$ 는 $(x-1)$ 을 인수로 갖는다.

$$\textcircled{1} f(x) = (x-1)Q(x)$$

라 하면 $f'(x) = Q(x) + (x-1)Q'(x)$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\{Q(x) + (x-1)Q'(x)\}}{(x-1)Q(x)} = 1 \neq 2$$

$$\textcircled{2} f(x) = (x-1)^k h(x) \quad (k \geq 2 \text{인 자연수}) \text{라 하면}$$

$f'(x) = k(x-1)^{k-1}h(x) + (x-1)^k h'(x)$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\{k(x-1)^{k-1}h(x) + (x-1)^k h'(x)\}}{(x-1)^k h(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{k(x-1)^k h(x) + (x-1)^{k+1} h'(x)}{(x-1)^k h(x)} = k \therefore k=2$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $f(x) = (x-1)^2 Q(x)$ 의 꼴이 된다.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) \times g(x) \tan x}{f(x) \{g'(x) \tan x + g(x) \sec^2 x\}}$$

$$= \frac{1}{2} \dots \dots \textcircled{2} \text{에서 } x \rightarrow 0 \text{일 때 (분자)} \rightarrow 0 \text{이므로}$$

(분모) $\rightarrow 0$ 이어야 한다. 따라서 $f(0) = 0$ 이다.

$$\therefore f(x) = (x-1)^2 x(x+l)$$

또한 $f(-1) = 4$ 이므로

$$f(-1) = 4 \times (-1) \times (-1+l) = 4 \text{에서 } l=0$$

$$\therefore f(x) = (x-1)^2 x^2$$

$$\text{따라서 } \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{4x-2}{x(x-1)}$$

위의 식을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(4x-2)g(x)\tan x}{x(x-1)\{g'(x)\tan x + g(x)\sec^2 x\}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x-1}{x-1} \cdot \frac{\tan x}{x} \cdot \frac{g(x)}{g'(x)\tan x + g(x)\sec^2 x}$$

$$= \frac{1}{2} \therefore g(0) = 0$$

$g(x) = xk(x)$ 라 하면 $g'(x) = k(x) + xk'(x)$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x-2}{x-1} \cdot \frac{\tan x}{x}$$

$$\cdot \frac{xk(x)}{\{k(x) + xk'(x)\}\tan x + xk(x)\sec^2 x}$$

$$= \frac{1}{2} \therefore k(0) = 0$$

따라서 $g(x) = x^m p(x)$ ($m \geq 2$ 인 자연수)라 하면

$g'(x) = mx^{m-1}p(x) + x^m p'(x)$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x-2}{x-1} \cdot \frac{\tan x}{x}$$

$$\cdot \frac{x^m p(x)}{\{mx^{m-1}p(x) + x^m p'(x)\}\tan x + x^m p(x)\sec^2 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x-2}{x-1} \cdot \frac{\sin x}{x}$$

$$\cdot \frac{x^{m-1}p(x)}{\{mx^{m-1}p(x) + x^m p'(x)\} \frac{\tan x}{x} + x^{m-1}p(x)\sec^2 x}$$

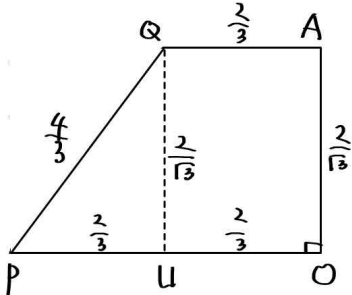
$$= 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{m+1} = \frac{2}{m+1} = \frac{1}{2} \text{ 이므로 } m=3$$

$$\therefore f(x) = (x-1)^2 x^2, g(x) = x^3$$

$$\therefore f(2) + g(3) = 31$$

한편 $\overline{AR} = \overline{AQ} = \frac{2}{3}$ ($\because$ 원의 반지름)이므로

직각이등변삼각형 ARQ 에서 $\overline{QR} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$



직각삼각형 PQU 에서 $\overline{PU} = \frac{2}{3}$, $\overline{QU} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ 이므로

$$\overline{PQ} = \frac{4}{3}$$

$\overline{OP} \perp \triangle OAR$ 이므로 $\overline{OP} \perp \overline{OR}$

직각삼각형 OPR 에서 $\overline{PR} = \frac{4}{3}\sqrt{2}$ 이므로

$\triangle PQR$ 에서 세변의 길이가 $\frac{2}{3}\sqrt{2}$, $\frac{4}{3}\sqrt{2}$, $\frac{4}{3}$ 이므로

로 헤론의 공식에서

둘레의 길이가 $2\sqrt{2} + \frac{4}{3}$ 이므로

$$\begin{aligned} \triangle PQR &= \sqrt{\left(\sqrt{2} + \frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{\sqrt{2}+2}{3}\right) \times \left(\frac{-\sqrt{2}+2}{3}\right) \times \left(\sqrt{2} - \frac{2}{3}\right)} \\ &= \sqrt{\left(2 - \frac{4}{9}\right) \left(\frac{4-2}{9}\right)} = \frac{2\sqrt{7}}{9} \dots \textcircled{\ominus} \end{aligned}$$

㉠, ㉡에서

$$\cos \theta = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{9}}{\frac{2\sqrt{7}}{9}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$

$$\therefore \cos^2 \theta = \frac{3}{7}$$

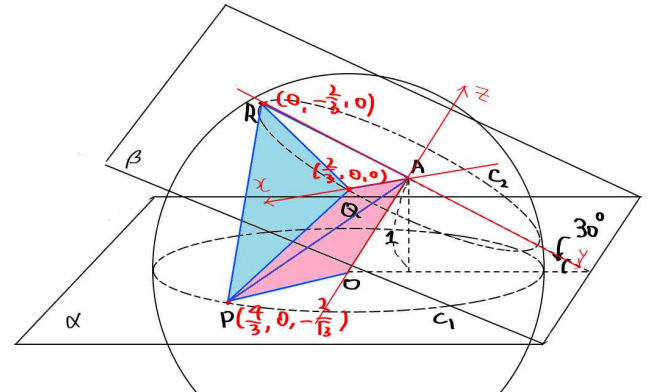
$$\therefore p+q=10$$

[다른 풀이]

$\overline{AR} \perp \overline{AQ} \perp \overline{AO}$ 이고

$\overline{AR} = \overline{AQ} = \frac{2}{3}$, $\overline{AO} = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $\overline{OP} = \frac{4}{3}$ 이므로 문제

의 상황을 다음 그림과 같이 공간 좌표로 설정할 수 있다.



평면 $AQPO$ 는 xz 평면의 일부이므로 법선벡터가 $\vec{a} = (0, 1, 0) \dots \textcircled{\ominus}$ 이다.

평면 PQR 는 세 점 $P\left(\frac{4}{3}, 0, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$, $Q\left(\frac{2}{3}, 0, 0\right)$,

$R\left(0, -\frac{2}{3}, 0\right)$ 을 지나므로

평면 PQR 의 법선벡터는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\overrightarrow{PR} = \left(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right), \overrightarrow{PQ} = \left(-\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

에서

$$\overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{PQ} = \left(-\frac{4}{3\sqrt{3}}, \frac{4}{3\sqrt{3}}, -\frac{4}{9}\right)$$

(by 벡터의 외적) 이므로

평면 PQR 의 법선벡터는 $\vec{b} = (\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 1) \dots \textcircled{\ominus}$ 따라서

㉢, ㉣에서

$$\cos \theta = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{|-\sqrt{3}|}{1 \times \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$

$$\therefore \cos^2 \theta = \frac{3}{7}$$

$$\therefore p+q=10$$