

준킬러! 해결 지침서!



NOTE

랑데뷰

수학 가형

하루 중 90%는 점 손하게 10%는 자신있게...

평가원	주관	문항	기출 문항	변형문항수	
2019학년도	평가원	6월	18,19,20,27,28	각 1문항	총 10문항
		9월	18,19,20,27,28	각 1문항	총 10문항
		11월 수능	18,19,20,27,28	각 1문항	총 10문항
2018학년도	평가원	6월	18,19,20,27,28	각 1문항	총 10문항
		9월	18,19,20,27,28	각 1문항	총 10문항
		11월 수능	18,19,20,27,28	각 1문항	총 10문항
2017학년도	평가원	6월	18,19,20,27,28	각 1문항	총 10문항
		9월	18,19,20,27,28	각 1문항	총 10문항
		11월 수능	18,19,20,27,28	각 1문항	총 10문항
					합계 90문항
문항수			총 45제	총 45제	
기출+변형 문제 합계 90문항 + 2018 가형 제작 준킬러문항 60문항 ⇨ 총 150문항					
랑데뷰 실전 모의고사 가형					
회차	1등급컷	2등급컷	21,29,30외 주요 문항	난이도	
1회	72점	60점	4점짜리 모두	☆☆☆☆	
2회	68점	60점	4점짜리 모두	☆☆☆☆☆	
3회	68점	60점	4점짜리 모두	☆☆☆☆☆	
4회	68점	60점	4점짜리 모두	☆☆☆☆☆	
5회	68점	60점	4점짜리 모두	☆☆☆☆☆☆	

상위권 수학 왕대부 세바사(8)

$x \rightarrow 0$ 일 때 $\sin f(x) \doteq f(x)$, $\tan f(x) \doteq f(x)$, $1 - \cos f(x) \doteq \frac{1}{2} \{f(x)\}^2$

[관련 문제] $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos\left(1 - \cos \frac{x}{2}\right)}{2^k x^n} = 4$ 를 만족시키는 정수 k, n 의 값을 구하여라.

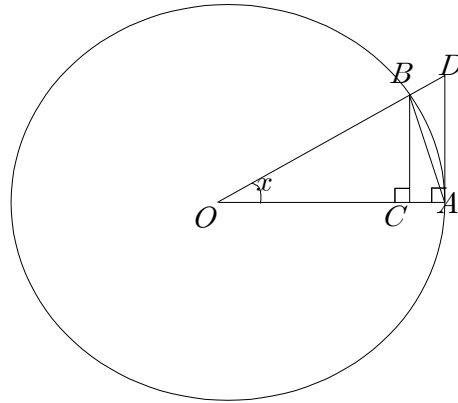
일반 풀이

$$\begin{aligned} 1 - \cos\left(1 - \cos \frac{x}{2}\right) &= 1 - \cos\left(2\sin^2 \frac{x}{4}\right) \\ &= 2\sin^2\left(\sin^2 \frac{x}{4}\right) \\ \therefore (\text{주어진 식}) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2\left(\sin^2 \frac{x}{4}\right)}{2^k x^n} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2\left(\sin^2 \frac{x}{4}\right)}{\left(\sin^2 \frac{x}{4}\right)^2} \cdot \frac{\left(\sin^2 \frac{x}{4}\right)^2}{\left(\frac{x}{4}\right)^2} \cdot \frac{2 \cdot \left(\frac{x}{4}\right)^4}{2^k x^n} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin\left(\sin^2 \frac{x}{4}\right)}{\sin^2 x} \right\}^2 \cdot \left(\frac{\sin \frac{x}{4}}{\frac{x}{4}} \right)^4 \cdot \frac{x^{4-n}}{2^{k+7}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{4-n}}{2^{k+7}} = 4 \\ \text{따라서 } k+7 &= -2, \quad 4-n=0 \text{ 이므로} \\ k &= -9, \quad n=4 \end{aligned}$$

왕대부 풀이

$$\begin{aligned} 1 - \cos \frac{x}{2} &\doteq \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{8} \text{ 이므로} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos\left(1 - \cos \frac{x}{2}\right)}{2^k x^n} &\doteq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos\left(\frac{x^2}{8}\right)}{2^k x^n} \\ \text{또한 } 1 - \cos\left(\frac{x^2}{8}\right) &\doteq \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{8}\right)^2 = \frac{x^4}{2^7} \text{ 이므로} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{4-n}}{2^{k+7}} = 4 \\ \text{따라서 } k+7 &= -2, \quad 4-n=0 \text{ 이므로} \\ k &= -9, \quad n=4 \end{aligned}$$

설명1



삼각형 BOC 에서 $\overline{BC} = \sin x$
 삼각형 AOB 에서 $\overline{AB} = \sqrt{2-2\cos x}$ ← 코사인법칙
 부채꼴 AOB 에서 호 $\overline{AB} = x$
 삼각형 AOD 에서 $\overline{AD} = \tan x$
 그림에서 각 x 의 크기가 점점 작아질수록 위의 네 개의 길이는 점점 짧아지면서 서로 비슷하게 된다.
 $x \rightarrow +0$ 일 때 $\sin x \doteq \sqrt{2-2\cos x} \doteq x \doteq \tan x$
 이 결과는 x 대신 $-x$ 를 대입해도 똑같이 성립하므로

$x \rightarrow -0$ 일 때 $\sin x \doteq \sqrt{2-2\cos x} \doteq x \doteq \tan x$
 따라서 $\sin x \doteq \sqrt{2-2\cos x} \doteq x \doteq \tan x$
 즉, $x \rightarrow 0$ 일 때 $\sin x \doteq x$, $\tan x \doteq x$,

$$1 - \cos x \doteq \frac{1}{2} x^2$$

설명2

매클로린 급수에서

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \dots$$

$$1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{720}x^6 - \dots$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \dots$$

상위권 수학 왕세부 세미나(12)

$\theta \rightarrow 0$ 일 때 $\theta = 0$ 인 상황을 상상하자! (2)

관련문제-3

그림과 같이

$\overline{AB} = 2$ 이고

$\angle ABC = 2\angle BAC$

를 만족하는 삼각

형 ABC 가 있다.

선분 AC 를 지름

으로 하는 원과

직선 AB 가 만나

는 점 중 A 가 아닌 점을 P , 점 P 를 지나고 선분

BC 에 평행한 직선이 선분 AC 와 만나는 점을 Q

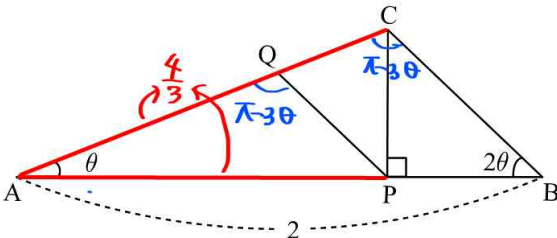
라 하자. $\angle BAC = \theta$ 라 할 때, 삼각형 APQ 의 넓

이를 $S(\theta)$ 라 하자.

$\lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{S(\theta)}{\theta}$ 의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$)

[2018학년도 7월 교육청 21번]

풀이



$\angle ACB = \pi - 3\theta$ 이므로

$\frac{\overline{AC}}{\sin 2\theta} = \frac{2}{\sin(\pi - 3\theta)}$ 에서 $\overline{AC} = \frac{2\sin 2\theta}{\sin 3\theta}$ 이므로

$\theta \rightarrow 0+$ 일 때 $\overline{AC} = \frac{4}{3}$ $\therefore \overline{AP} = \frac{4}{3}$

$\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ 이므로 $\triangle APQ \sim \triangle ABC$

닮음비가 $2 : \frac{4}{3} = 3 : 2$ 이므로 $\triangle APQ = \frac{4}{9} \triangle ABC$

$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{4}{3} \times \sin \theta = \frac{4}{3} \sin \theta$

$\therefore \triangle APQ = \frac{16}{27} \sin \theta$ 따라서 $\lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{S(\theta)}{\theta} = \frac{16}{27}$

관련문제-4

그림과 같이 길

이가 4인 선분

AB 를 지름으로

하는 반원 위에

두 점 P, Q 를

$\angle PAB = \theta$,

$\angle QAB = 2\theta$ 가

되도록 잡는다. 선분 AB 의 중점 O 에 대하여 선분

OQ 와 선분 AP 가 만나는 점을 R 라 하자. 호 PQ

와 두 선분 QR, RP 로 둘러싸인 부분의 넓이를

$S(\theta)$ 라 할 때, $\lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{S(\theta)}{\theta}$ 의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$)

[2019학년도 4월 교육청 20번]

풀이

직각삼각형

ABQ 에서

$\overline{AQ} = 4\cos 2\theta$ 이

므로 $\theta \rightarrow 0+$

일 때 $\overline{AQ} = 4$

선분 AR 는 각

QAO 의 이등분선이므로

$\overline{AO} : \overline{AQ} = \overline{OR} : \overline{RQ} = 1 : 2$, $\overline{OQ} = 2$ 이므로

$\overline{RQ} = \frac{4}{3}$ 이므로 $\overline{RQ} = \overline{RP} = \frac{4}{3}$, $\angle QRP = 3\theta$

$\therefore S(\theta) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{3} \times 3\theta$

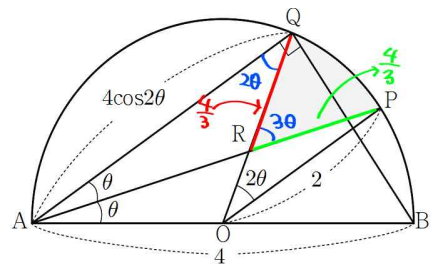
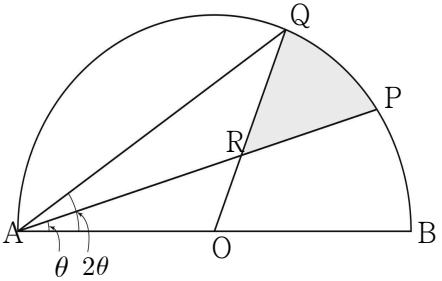
$\therefore \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{S(\theta)}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0+} \left\{ \frac{\frac{8}{3}\theta}{\theta} \right\} = \frac{8}{3}$

보충설명

$\triangle POR$ 에서

$\overline{RP} = \sqrt{\overline{OR}^2 + \overline{OP}^2 - 2\overline{OR}\overline{OP}\cos 2\theta}$

$= \sqrt{\frac{4}{9} + 4 - 2 \times \frac{2}{3} \times 2 \cos 2\theta} = \frac{4}{3} (\because \cos 2\theta = 1)$



상위권 수학 왕새부 세미나(13)

우함수, 기함수, 주기함수의 미분과 적분에 관한 고찰

(1) 기함수의 도함수는 우함수이다.(참)

⇒ $f(x)$ 가 기함수라면 $f(-x) = -f(x)$ 이 성립한다.

$$f'(-x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-f(x-h) + f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{-h} = f'(x)$$

따라서 $f'(-x) = f'(x)$ 이므로 도함수는 우함수이다.

(2) 우함수의 도함수는 기함수이다.(참)

⇒ $f(x)$ 가 우함수라면 $f(-x) = f(x)$ 이 성립한다.

$$f'(-x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{h} = -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{-h} = -f'(x)$$

따라서 $f'(-x) = -f'(x)$ 이므로 도함수는 기함수이다.

(3) 기함수의 부정적분은 우함수이다.(참)

(4) 우함수의 부정적분은 기함수이다.(거짓)

⇒ (1), (2)에서 기함수와 우함수는 서로 도함수 관계이다. 따라서 서로 부정적분 관계이기도 하다. 그런데 함수를 부정적분을 하면 적분상수가 발생하는데 0이 아닌 상수는 y 축 대칭인 우함수이므로 기함수의 부정적분 함수는 적분상수 값에 상관없이 우함수이고 우함수의 부정적분 함수는 적분상수 값이 0일 때만 기함수가 된다.

(5) 기함수의 정적분으로 표현된 함수는 우함수이다.(참)

⇒ 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x) = -f(x)$ 를 만족하는 함수 $f(x)$ 와 임의의 실수 a 에 대하여

$$F(t) = \int_a^t f(x) dx \text{ 이면 } F(-t) = F(t) \text{ 을 만족한다.}$$

$$\Rightarrow F(-t) = \int_a^{-t} f(x) dx = \int_{-a}^s f(-s)(-ds) = \int_{-a}^s f(s) ds = \int_{-a}^a f(s) ds + \int_a^s f(s) ds = \int_a^t f(t) dt = F(t)$$

(6) 우함수의 정적분으로 표현된 함수는 기함수이다.(참)

⇒ 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x) = f(x)$ 를 만족하는 함수 $f(x)$ 에 대하여 $F(t) = \int_0^t f(x) dx$ 이면

$F(-t) = -F(t)$ 을 만족한다.

$$\Rightarrow F(-t) = \int_0^{-t} f(x) dx = \int_0^s f(-s)(-ds) = -\int_0^s f(s) ds = -\int_0^t f(t) dt = -F(t)$$

(7) 주기가 p 인 기함수의 정적분으로 표현된 함수는 같은 주기 p 를 갖는 함수이다.

⇒ 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x) = -f(x)$, $f(x+p) = f(x)$ 을 만족하는 함수 $f(x)$ 와 임의의 실수 a 에

대하여 $F(t) = \int_a^t f(x) dx$ 이면 $F(t+p) = F(t)$ 을 만족한다.

⇒ $y = f(x)$ 가 원점 $(0, 0)$ 을 지나고 주기가 p 이므로 $f(0) = f(p) = f(2p) = \dots = 0$ 이다.

$$\text{따라서 } \int_t^{t+p} f(x) dx = \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} f(x) dx = 0$$

따라서 $F(t+p) - F(t) = 0$ 이므로 $F(t+p) = F(t)$ 을 만족한다.

상위권 수학 왕대부 세미나(23)

준선 및 준원의 성질

이차곡선 밖의 점에서 이차곡선에 그은 두 접선이 항상 직교하도록 하는 점들의 자취를 준선 및 준원이라 한다.

⇒ 포물선만 **준선**을 갖고, 나머지는 **준원**을 갖는다.

원	$x^2 + y^2 = r^2$	⇒ 준원	$x^2 + y^2 = 2r^2$
포물선	$y^2 = 4px, x^2 = 4py$	⇒ 준선	$x = -p, y = -p$
타원	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	⇒ 준원	$x^2 + y^2 = a^2 + b^2$
쌍곡선	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (단, $a > b > 0$)	⇒ 준원	$x^2 + y^2 = a^2 - b^2$

[관련 문제] ① 직선 $x+y=5$ 위의 한 점 $P(a, b)$ 에서 포물선 $x^2=8y$ 에 그은 두 접선이 서로 수직일 때, $a-b$ 의 값을 구하여라.

② 좌표평면 위의 점 $P(a, b)$ 에서 쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{5} = 1$ 에 그은 두 접선이 서로 수직으로 만날 때, 점 P 의 자취의 길이를 구하여라.

일반 풀이

① 점 $P(a, b)$ 를 지나고 기울기가 m 인 직선의 방정식은 $y-b=m(x-a) \quad \therefore y=mx-am+b$

이를 $x^2=8y$ 에 대입하면 $x^2-8mx+8ma-8b=0$

이 이차방정식이 중근을 가지므로 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 16m^2 - 8am + 8b = 0$$

이 이차방정식의 두 실근이 접선의 기울기이고, 두 접선이 서로 수직이면 기울기의 곱이 -1 이므로 근과 계수의

관계에 의하여 $\frac{8b}{16} = -1 \quad \therefore b = -2$

이때 점 P 는 직선 $x+y=5$ 위의 점이므로

$$a+b=5 \quad \therefore a=7 \quad \therefore a-b=7-(-2)=9$$

② 쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{5} = 1$ 에 접하고 기울기가

m 인 직선의 방정식은 $y=mx \pm \sqrt{9m^2-5}$

이 직선이 점 $P(a, b)$ 를 지나므로

$$b=ma \pm \sqrt{9m^2-5}, \quad b-ma = \pm \sqrt{9m^2-5}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$(a^2-9)m^2 - 2abm + b^2 + 5 = 0$$

이 이차방정식의 두 근의 곱이 -1 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{b^2+5}{a^2-9} = -1, \quad b^2+5=9-a^2 \quad \therefore a^2+b^2=4$$

따라서 점 $P(a, b)$ 의 자취는 반지름의 길이가 2인 원이므로 구하는 점 P 의 자취의 길이는 4π 이다.

왕대부 풀이

① 두 접선이 서로 수직이므로 점 P 는 포물선의 **준선** $y=-2$ 위에 있다.

따라서 $b=-2$ 이고 $a+b=5$ 이므로

$$a=7 \quad \therefore a-b=9$$

② 두 접선이 수직이므로 점 P 는 **준원**

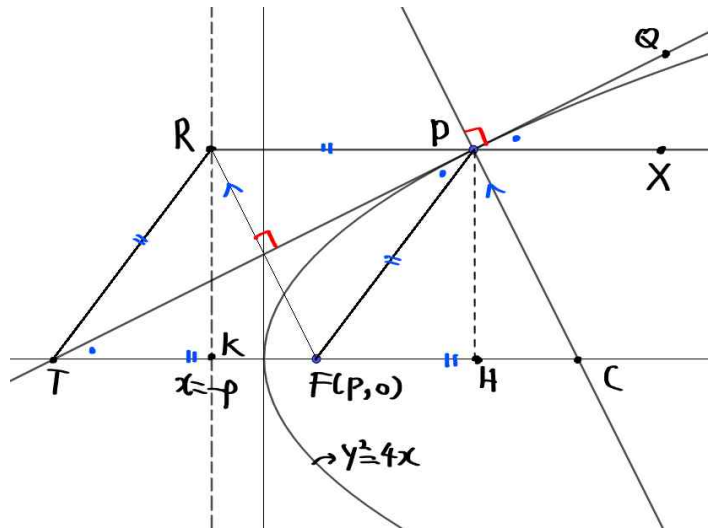
$x^2+y^2=4$ 위의 점이므로 자취의 길이는 원주 4π 이다.

상위권 수학 왕새부 세미나(33)

포물선의 성질

다음 그림과 같이 포물선 위의 점 P 에서
의 접선과 법선의 x 축과의 교점을 각각
 T , C 라 할 때

- ① $\angle QPX = \angle TPF = \angle PTF$
- ② $\overline{PF} = \overline{TF} = \overline{CF}$
- ③ 사각형 $PRTF$ 는 마름모이다.
- ④ 사각형 $PRFC$ 는 평행사변형이다.



설명

포물선 $y^2 = 4px$ ($p > 0$) 위의 점 $P(x_1, y_1)$ 에서 그은 접선의 방정식을 생각하자.

$$y_1 y = 2p(x + x_1) \cdots \textcircled{1}$$

이 직선의 x 절편이 T 라 하면 $y = 0$ 을 대입하면 $p \neq 0$ 이므로 $x = -x_1$

따라서 $T(-x_1, 0)$

한편 초점의 좌표는 $F(p, 0)$ 이므로 $\overline{TF} = p + x_1 \cdots \textcircled{2}$

또, $\overline{PF} = \sqrt{(x_1 - p)^2 + y_1^2}$ 이고 $P(x_1, y_1)$ 이 포물선 $y^2 = 4px$ 위의 점이므로 $y_1^2 = 4px_1$

따라서

$$\overline{PF} = \sqrt{(x_1 - p)^2 + y_1^2} = \sqrt{(x_1 - p)^2 + 4px_1} = \sqrt{(x_1 + p)^2} = x_1 + p \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2}, \textcircled{3} \text{에서 } \overline{TF} = \overline{PF}$$

따라서 $\triangle PTF$ 는 이등변삼각형이다.

이등변삼각형의 두 밑각의 크기는 같으므로 $\angle PTF = \angle TPF$

또, 빛의 성질에서 [입사각=반사각]이므로 $\angle TPF = \angle QPX$

따라서 $\angle PTF = \angle QPX$ (동위각)

동위각의 크기가 같으므로 $PX \parallel x$ 축 $\cdots \textcircled{4}$

한편, 점 P 에서 준선 $x = -p$ 에 내린 수선의 발을 R 이라 하면 $R(-p, y_1)$

따라서 직선 FR 의 기울기는 $-\frac{y_1}{2p}$ 이므로

$\textcircled{1}$ 에서 점 P 에서의 접선의 기울기는 $\frac{2p}{y_1}$ 이므로 $\overline{FR} \perp \overline{PT}$

따라서 사각형 $PRTF$ 는 마름모이다.

또한 접점 P 에서 접선에 수직인 직선의 x 절편을 C 라 하면

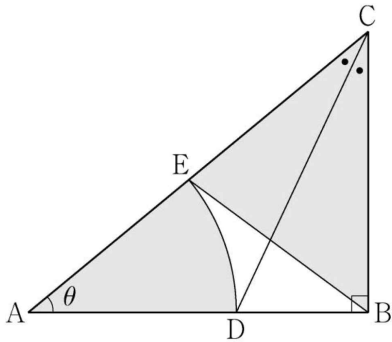
$\textcircled{4}$ 에서 $\overline{PR} \parallel \overline{FC}$, $\overline{RF} \parallel \overline{PC}$ 이므로 사각형 $PRFC$ 는 평행사변형이다.

상위권 수학 왕새부 세미나(35)

집합의 분할	자연수의 분할
① 제2종 스털링수 $S(n, k)$의 성질 $1 < k < n$일 때, $S(n, k) = S(n-1, k-1) + k \cdot S(n-1, k)$ ② $S(n, 1) = 1$ ③ $S(n, 2) = 2^{n-1} - 1$ ④ $S(n, n) = 1$ ⑤ $S(n, n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$ ⑥ $S(n, n-2) = \frac{n(n-1)(n-2)(3n-5)}{24}$ 증명 및 해설은 [상위권수학 확률과통계]에 있습니다.	① 공액(컬레) 분할 $P(n, k)$의 성질 ㉠ $1 < k < n$일 때, $P(n, k) = P(n-k, 1) + P(n-k, 2) + \dots + P(n-k, k)$ ㉡ $n \geq 2k, k \geq 2$일 때, $P(n, k) = P(n-1, k-1) + P(n-k, k)$ ② $P(n, 1) = 1$ ③ $P(n, 2) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ ④ $P(n, 3) = \left\lfloor \frac{n^2+6}{12} \right\rfloor$ ⑤ $P(n, n) = 1$ ⑥ $P(n, n-1) = 1$ ⑦ $P(n, n-2) = 2$ (단, $n \geq 4$) ⑧ $P(n, n-3) = 3$ (단, $n \geq 6$) ⑨ $P(n, n-4) = 5$ (단, $n \geq 8$) 증명 및 해설은 [상위권수학 확률과통계]에 있습니다.
예를 들어 $S(6, 4)$을 구해보자. 방법1. ①-③-⑤ 이용 $S(6, 4) = S(5, 3) + 4S(5, 4)$ $= S(4, 2) + 3S(4, 3) + 4S(5, 4)$ $= (2^3 - 1) + 3\left(\frac{4 \times 3}{2}\right) + 4\left(\frac{5 \times 4}{2}\right) = 65$ 방법2. ⑥ 이용 $S(6, 4) = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 13}{24} = 65$	예를 들어 $P(10, 4)$을 구해보자. 방법1. ①㉠-②-③-④-⑦ 이용 $P(10, 4) = P(6, 1) + P(6, 2) + P(6, 3) + P(6, 4)$ $= 1 + \left\lfloor \frac{6}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{6^2+6}{12} \right\rfloor + 2$ $= 1 + 3 + 3 + 2 = 9$ 방법2. ①㉡-④-⑦ 이용 $P(10, 4) = P(9, 3) + P(6, 4)$ $= \left\lfloor \frac{9^2+6}{12} \right\rfloor + 2 = 7 + 2 = 9$

1.

그림과 같이 $\overline{AB}=1$, $\angle B=\frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형 ABC 에서 $\angle C$ 를 이등분하는 직선과 선분 AB 의 교점을 D , 중심이 A 이고 반지름의 길이가 $\overline{AD}$ 인 원과 선분 AC 의 교점을 E 라 하자. $\angle A=\theta$ 일 때, 부채꼴 ADE 의 넓이를 $S(\theta)$, 삼각형 BCE 의 넓이를 $T(\theta)$ 라 하자. $\lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\{S(\theta)\}^2}{T(\theta)}$ 의 값은?

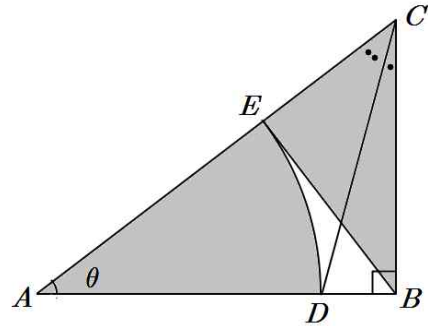


- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$
 ④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

[2019학년도 11월 수능 18번]

2.

그림과 같이 $\overline{AB}=1$, $\angle B=\frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형 ABC 에서 $\angle C$ 를 2:1로 내분하는 직선과 선분 AB 의 교점을 D , 중심이 A 이고 반지름의 길이가 $\overline{AD}$ 인 원과 선분 AC 의 교점을 E 라 하자. $\angle A=\theta$ 일 때, 부채꼴 ADE 의 넓이를 $S(\theta)$, 삼각형 BCE 의 넓이를 $T(\theta)$ 라 하자. $\lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\{S(\theta)\}^2}{T(\theta)}$ 의 값은?

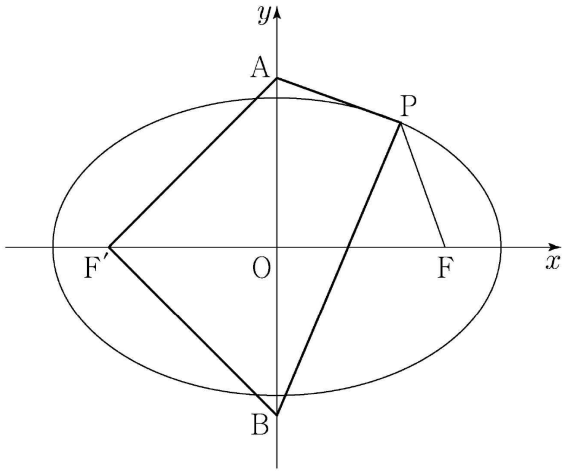


- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$
 ④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{5}}{2}$

[2019학년도 11월 수능 18번]-변형

17.

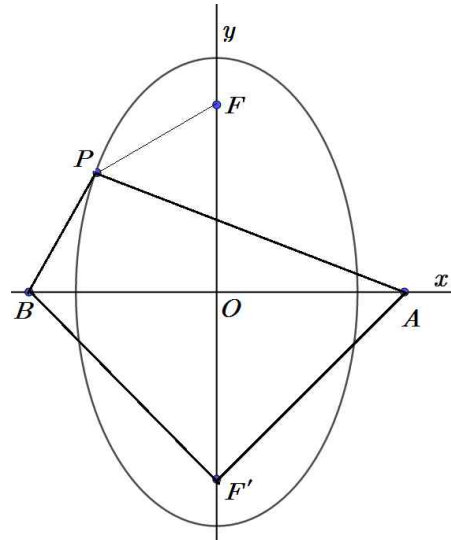
좌표평면에서 두 점 $A(0, 3), B(0, -3)$ 에 대하여,
 두 초점이 F, F' 인 타원 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$ 위의 점 P 가
 $\overline{AP} = \overline{PF}$ 를 만족시킨다. 사각형 $AF'BP$ 의 둘레의
 길이가 $a + b\sqrt{2}$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하시오.
 (단, $\overline{PF} < \overline{PF'}$ 이고, a, b 는 자연수이다.)



[2019학년도 9월 평가원 27번]

18.

좌표평면에서 두 점 $A(4, 0), B(-4, 0)$ 에 대하여,
 두 초점이 F, F' 인 타원 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ 위의 점 P 가
 $\overline{BP} = \overline{PF}$ 를 만족시킨다. 사각형 $PBF'A$ 의 둘레의
 길이가 $a + b\sqrt{2}$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하시오.
 (단, $\overline{PF} < \overline{PF'}$ 이고, a, b 는 자연수이다.)

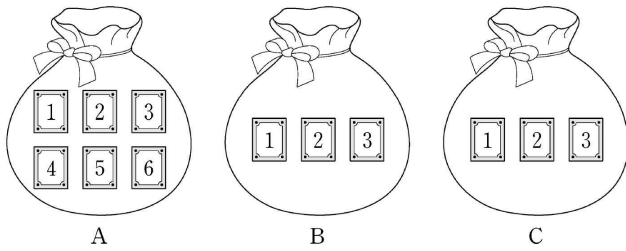


[2019학년도 9월 평가원 27번]-변형

49.

그림과 같이 주머니 A에는 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적힌 6장의 카드가 들어 있고 주머니 B와 C에는 1부터 3까지의 자연수가 하나씩 적힌 3장의 카드가 각각 들어 있다.

같은 주머니 A에서, 을은 주머니 B에서, 병은 주머니 C에서 각자 임의로 1장의 카드를 꺼낸다. 이 시행에서 갑이 꺼낸 카드에 적힌 수가 을이 꺼낸 카드에 적힌 수보다 클 때, 갑이 꺼낸 카드에 적힌 수와 을과 병이 꺼낸 카드에 적힌 수의 합보다 클 확률이 k 이다. $100k$ 의 값을 구하시오.

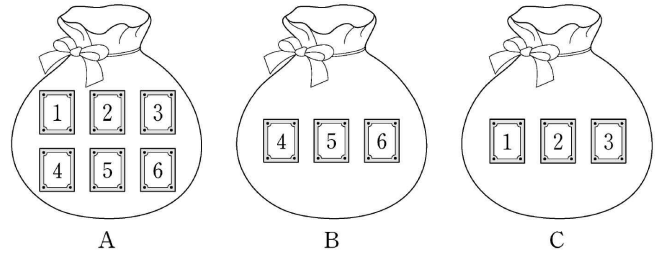


[2018학년도 9월 모평 가형 28번]

50.

그림과 같이 주머니 A에는 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적힌 6장의 카드가 들어 있고 주머니 B에는 4부터 6까지의 자연수가 하나씩 적힌 3장의 카드와 C에는 1부터 3까지의 자연수가 하나씩 적힌 3장의 카드가 각각 들어 있다.

같은 주머니 A에서, 을은 주머니 B에서, 병은 주머니 C에서 각자 임의로 1장의 카드를 꺼낸다. 이 시행에서 갑이 꺼낸 카드에 적힌 수가 을이 꺼낸 카드에 적힌 수보다 작을 때, 갑이 꺼낸 카드에 적힌 수와 병이 꺼낸 카드에 적힌 수의 합이 을이 꺼낸 카드에 적힌 수보다 클 확률이 k 이다. $100k$ 의 값을 구하시오.



[2018학년도 9월 모평 가형 28번]-변형

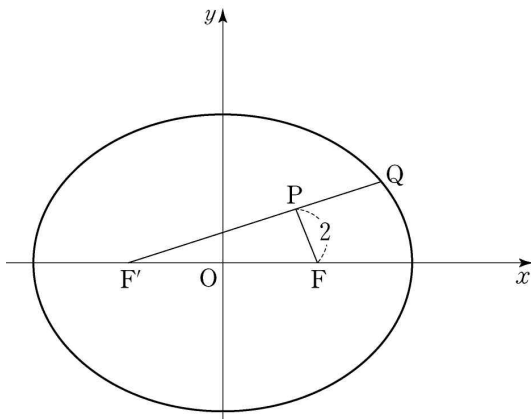
77.

그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$ 의 두 초점은 F, F'이고, 제1사분면에 있는 두 점 P, Q는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{PF} = 2$

(나) 점 Q는 직선 PF'과 타원의 교점이다.

삼각형 PFQ의 둘레의 길이와 삼각형 PF'F의 둘레의 길이의 합을 구하시오.



[2017학년도 9월 모평 가형 27번]

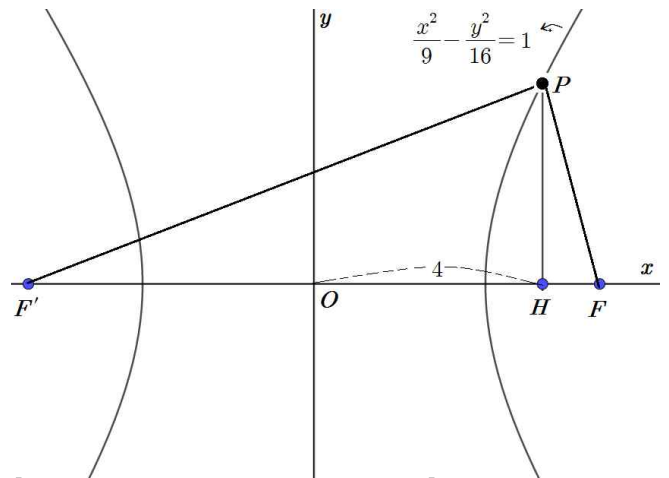
78.

그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 의 두 초점은 F, F'이고, 제1사분면에 있는 점 P, H는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 쌍곡선 위의 점 P에서 x축에 내린 수선의 발이 H이다.

(나) 원점 O에서 H까지 거리는 4이다.

삼각형 PF'H의 둘레의 길이와 삼각형 PFH의 둘레의 길이의 차를 구하시오.

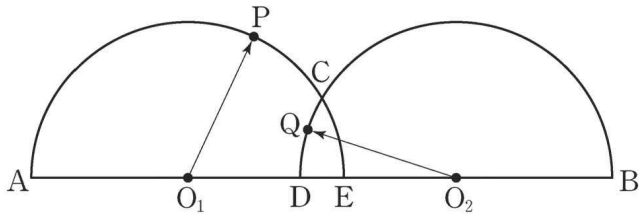


[2017학년도 9월 모평 가형 27번]-변형

89.

그림과 같이 선분 AB 위에 $\overline{AE} = \overline{DB} = 2$ 인 두 점 D, E가 있다. 두 선분 AE, DB를 각각 지름으로 하는 두 반원의 호 AE, DB가 만나는 점을 C라고 하고, 선분 AB 위에 $\overline{O_1A} = \overline{O_2B} = 1$ 인 두 점을 O_1, O_2 라 하자. 호 AC위를 움직이는 점 P와 호 DC위를 움직이는 점 Q에 대하여 $|\overrightarrow{O_1P} + \overrightarrow{O_2Q}|$ 의 최솟값이 $\frac{1}{2}$ 일 때, 선분 AB의 길이는 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, $1 < \overline{O_1O_2} < 2$ 이고, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)



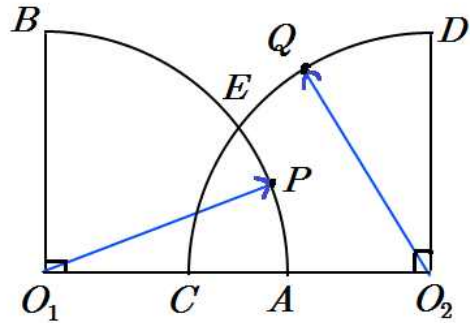
[2017학년도 6월 모평 가형 28번]

90.

그림과 같이 선분 O_1O_2 위에 $\overline{O_1A} = \overline{O_2C} = 1$ 인 두 점 A, C가 있다. 두 선분 O_1A, O_2C 를 각각 반지름으로 하는 두 사분원의 호 AB, CD가 만나는 점을 E라고 하고, 두 사분원의 중심을 각각 O_1, O_2 라 하자. 호 AE위를 움직이는 점 P와 호 DE위를 움직이는 점 Q에 대하여 $|\overrightarrow{O_1P} + \overrightarrow{O_2Q}|$ 의 최댓값이 $\frac{4}{\sqrt{5}}$ 일 때, 선분 O_1O_2 의 길이는 $\frac{q}{p}$ 이다.

$p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, $1 < \overline{O_1O_2} < 2$ 이고, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)



[2017학년도 6월 모평 가형 28번]-변형

104.

삼차함수 $f(x) = x^3 - 6x^2 + ax + b$ 가 일대일 대응일 때, 함수 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 하자.

등식 $\lim_{x \rightarrow 1+} (x-1)^p g'(x) = q$ 를 만족시키는 두 양의

상수 p, q 가 존재할 때, $ab(q-p)$ 의 값을 구하시오.
(단, a, b 는 상수)

105.

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x) = \frac{e^x}{e^2 - 1}$ 의

역함수를 $g(x)$ 라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty} g'\left(\frac{e^n}{e^2 - 1}\right)$ 의 값을 구하면?

- ① e^2 ② $e+1$ ③ $e-1$
④ e^2-2 ⑤ e^2-1

120.

연속함수 $f(x)$ 에 대하여

$$\int_1^x f(t) dt = \int_x^{x^2} f(t) dt \quad (x > 0) \text{이 성립한다.}$$

$f(1)=1$ 일 때, $f\left(\frac{1}{100}\right)$ 의 값을 구하시오.

121.

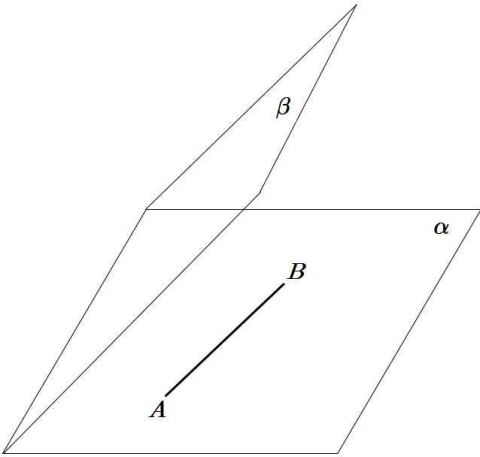
이계도함수가 존재하는 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x) = e^x + \int_0^x f(t) \sin(x-t) dt$$

을 만족할 때, $f''(1)+f'(1)-2f(1)$ 의 값을 구하시오,

136. [칼러]

평면 α 위의 점 A, B 에 대하여 $\overline{AB} = 2\sqrt{3}$ 이다. 점 A, B 에서 평면 β 에 내린 수선의 발을 각각 C, D 라 할 때, 삼각형 ABD 는 정삼각형이다. $\overline{CD}$ 의 평면 α 위로의 정사영의 길이가 $2\sqrt{2}$ 일 때, 삼각형 ABD 의 평면 α 위로의 정사영의 넓이를 S 라 할 때, S^2 의 값을 구하시오.



148.

A, B, C, D 네 학생이 영화를 보러 영화관에 갔다.
이 영화관에서는 총 6편의 영화를 상영하고 있다.
이 때, 4명의 학생은 다음 조건을 만족시키며 영화를 관람한다.

- (가) 각 학생은 3번씩 영화를 관람한다.
(나) 한 편의 영화마다 2명씩 관람한다.
(다) A, B 두 학생이 관람한 영화 중 함께 관람한 영화가 적어도 1개 이상 있다.

다음은 A, B, C, D 네 학생이 조건을 만족시키며 영화를 관람하는 경우의 수를 구하는 과정이다.

우선 학생 A 가 관람하는 경우의 수는 ${}_6C_3 = 20$ 이다.

(i) 학생 B 가 A 와 함께 관람하는 영화의 수가 1개 일 때

B 가 관람하는 경우의 수는 (가)이다.

그럼 C 가 관람하는 경우의 수는 ${}_pC_q$ 이다.

그럼 D 가 관람하는 경우의 수는 1이다.

따라서 (가) $\times {}_pC_q \times 1$

(ii) 학생 B 가 A 와 함께 관람하는 영화의 수가 2개 일 때

B 가 관람하는 경우의 수는 (가)이다.

그럼 C 가 관람하는 경우의 수는 ${}_rC_s$ 이다.

그럼 D 가 관람하는 경우의 수는 1이다.

따라서 (가) $\times {}_rC_s \times 1$

(iii) 학생 B 가 A 와 함께 관람하는 영화의 수가 3개 일 때

B 가 관람하는 경우의 수는 1이다.

그럼 C 가 관람하는 경우의 수는 1이다.

그럼 D 가 관람하는 경우의 수는 1이다.

따라서 $20 \times 1 \times 1 \times 1 = 20$

따라서 (i), (ii), (iii)에서 총 경우의 수는 (나)이다.

(가), (나)에 알맞은 수를 각각 a, b 라 할 때

$\frac{b}{a+1} + p+q+r+s$ 의 값을 구하면?

- ① 153 ② 155 ③ 157 ④ 159 ⑤ 161

1) 정답 ②

$$\overline{AB}=1 \text{이므로 } \overline{BC}=\tan\theta$$

피타고라스 정리로

$$\overline{AC}=\sqrt{1+\tan^2\theta}=\sqrt{\sec^2\theta}=\sec\theta$$

각의 이등분선 성질에 의해

$$\overline{AD}:\overline{BD}=\sec\theta:\tan\theta=1:\sin\theta$$

$$\text{따라서 } \overline{AD}=\frac{1}{1+\sin\theta}$$

$$\text{따라서 } S(\theta)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\sin\theta}\right)^2\theta$$

$$\overline{CE}=\sec\theta-\frac{1}{1+\sin\theta} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} T(\theta) &= \frac{1}{2}(\tan\theta)\left(\sec\theta-\frac{1}{1+\sin\theta}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)\left(\frac{1}{\cos\theta}-\frac{1}{1+\sin\theta}\right)\cos\theta \\ &= \frac{1}{2}\left(\tan\theta-\frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}\right) \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\{S(\theta)\}^2}{T(\theta)} &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\sin\theta}\right)^2\theta\right\}^2}{\frac{1}{2}\left(\tan\theta-\frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{4}\theta^2}{\frac{1}{2}\left(\frac{\theta^2}{1+\theta}\right)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

[다른 풀이]

$$\overline{AB}=1 \text{이므로 } \overline{BC}=\tan\theta$$

피타고라스 정리로

$$\overline{AC}=\sqrt{1+\tan^2\theta}=\sqrt{\sec^2\theta}=\sec\theta$$

각의 이등분선 성질에 의해

$$\overline{AD}:\overline{BD}=\sec\theta:\tan\theta=1:\sin\theta$$

$\theta \rightarrow 0$ 일 때 $\theta \approx \sin\theta \approx \tan\theta$, $\cos\theta \approx 1$ 이므로

$$\overline{AD}=\overline{AE}=1-\theta, \overline{BD}=\theta, \overline{BC}=\theta, \overline{CE}=\theta$$

따라서

$$S(\theta)=\frac{1}{2}(1-\theta)^2\theta, \quad T(\theta)=\frac{1}{2}\theta^2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\{S(\theta)\}^2}{T(\theta)} = \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{4}\theta^2}{\frac{1}{2}\theta^2} = \frac{1}{2}$$

2) 정답 ④

$$\overline{AB}=1 \text{이므로 } \overline{BC}=\tan\theta$$

피타고라스 정리로

$$\overline{AC}=\sqrt{1+\tan^2\theta}=\sqrt{\sec^2\theta}=\sec\theta$$

$$\angle ACB=\frac{\pi}{2}-\theta \text{이므로 } \angle BCD=\frac{\pi}{6}-\frac{\theta}{3}$$

$$\text{따라서 } \overline{BD}=\tan\theta\tan\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\theta}{3}\right)$$

$$\text{따라서 } \overline{AD}=1-\tan\theta\tan\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\theta}{3}\right)$$

$$\text{따라서 } \overline{CE}=\sec\theta-1+\tan\theta\tan\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\theta}{3}\right)$$

$$\begin{aligned} \therefore S(\theta) &= \frac{1}{2}\left(1-\tan\theta\tan\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\theta}{3}\right)\right)^2\theta \\ &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\theta\right)^2\theta \end{aligned}$$

$\therefore$

$$\begin{aligned} T(\theta) &= \frac{1}{2}(\tan\theta)\left(\sec\theta-1+\tan\theta\tan\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\theta}{3}\right)\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)\left(\frac{1}{\cos\theta}-1+\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}\cos\theta}\right)\cos\theta \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin^2\theta}{\sqrt{3}}\right) \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\{S(\theta)\}^2}{T(\theta)} &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\left\{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\theta\right)^2\theta\right\}^2}{\frac{1}{2}\left(\frac{\sin^2\theta}{\sqrt{3}}\right)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{4}\theta^2}{\frac{1}{2\sqrt{3}}\sin^2\theta} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

123) 정답 ②

$y = x + \sin x$ 와 $y = x + \cos x$ 의 교점의 x 좌표는
 $x + \sin x = x + \cos x$ 에서

$$\sin x = \cos x \text{이므로 } x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$$

구간 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$ 에서 $\sin x \geq \cos x$ 이므로

x 축에 수직으로 자른 단면이 $\sin x - \cos x$ 을 빗변으로 하는 직각이등변 삼각형이므로

$$\text{넓이는 } \frac{1}{2} \left(\frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{(\sin x - \cos x)^2}{4} \text{이다.}$$

따라서 부피는

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{1}{4} (\sin x - \cos x)^2 dx$$

$$= \frac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (1 - \sin 2x) dx$$

$$= \frac{1}{4} \left[x + \frac{1}{2} \cos 2x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}$$

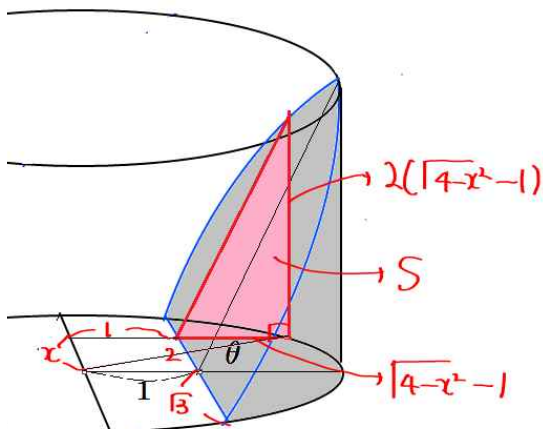
$$= \frac{\pi}{4}$$

124) 정답 16

그림과 같이 직각삼각형에서 밑변의 길이를 $\sqrt{4-x^2}-1$ 이라 하면 $\tan \theta = 2$ 에서 높이가

$2(\sqrt{4-x^2}-1)$ 이다. 색칠된 직각 삼각형의 넓이를 S

라 하면 $S = (\sqrt{4-x^2}-1)^2$ 이다.



$$V = 2 \int_0^{\sqrt{3}} S dx$$

$$= 2 \int_0^{\sqrt{3}} (\sqrt{4-x^2}-1)^2 dx$$

$$= 2 \int_0^{\sqrt{3}} (5-x^2-2\sqrt{4-x^2}) dx$$

$$= 2 \left\{ \left[5x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^{\sqrt{3}} - 2 \left(\frac{2}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right\}$$

$$= 2 \left\{ 5\sqrt{3} - \sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3} \right\}$$

$$= 6\sqrt{3} - \frac{8}{3}\pi$$

$$V = 6\sqrt{3} - \frac{8}{3}\pi$$

$$a = 6, b = -\frac{8}{3} \text{이므로 } ab = -16$$

따라서 $|ab| = 16$