

킬러 문항 해결 지침서

제2권



NOTE

라던뷰

수학 가형

2018년 실시 모의고사 킬러문항 정리

하루 중 90%는 점 손하게 10%는 자신있게...

월 별 모의고사	주관	문항	풀이개수	변형문항수	변형문항 난이도
3월	교육청	20	4	1	☆☆☆☆
		21	1	1	☆☆☆☆
		30	2	3	☆☆☆☆☆
4월	교육청	20	1	1	☆☆☆☆
		21	2	1	☆☆☆☆
		28	1	1	☆☆☆☆
		29	3	1	☆☆☆☆☆
		30	1	1	☆☆☆☆☆
6월	평가원	21	2	3	☆☆☆☆☆
		29	2	1	☆☆☆☆☆
		30	2	2	☆☆☆☆☆
7월	교육청	21	1	1	☆☆☆☆
		29	2	1	☆☆☆☆
		30	3	1	☆☆☆☆☆
7월	사관학교	21	1	1	☆☆☆☆
		29	1	1	☆☆☆☆☆
		30	1	1	☆☆☆☆☆
9월	평가원	21	3	1	☆☆☆☆☆
		29	1	1	☆☆☆☆
		30	2	1	☆☆☆☆☆
10월	교육청	21	2	1	☆☆☆☆☆
		29	1	1	☆☆☆☆☆
		30	2	1	☆☆☆☆☆
11월 수능	평가원	21	1	1	☆☆☆☆
		29	1	1	☆☆☆☆
		30	1	2	☆☆☆☆☆
문항수		현재 26문항		현재 32문항	
기출+변형 문제 합계 58문항 + 2018 가형 제작 킬러문항 42문항 ⇨ 총 100문항					
랑데뷰 실전 모의고사 가형					
회차	1등급컷	2등급컷	21,29,30외 주요 문항	난이도	
1회	72점	60점	4점짜리 모두	☆☆☆☆	
2회	68점	60점	4점짜리 모두	☆☆☆☆☆	
3회	68점	60점	4점짜리 모두	☆☆☆☆☆	
4회	68점	60점	4점짜리 모두	☆☆☆☆☆	
5회	68점	60점	4점짜리 모두	☆☆☆☆☆☆	

상위권 수학 왕채복 세바사(9)

정적분 계산의 기술 $\Rightarrow$ 모든 함수 $f(x)$ 에 대하여 다음이 성립한다.

$$\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx, \quad \int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a f(x) + f(-x) dx$$

① $\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx \Rightarrow$ 설명 $y=f(x)$ 를 y 축 대칭이동 시킨 함수는 $y=f(-x)$ 이다.

$$\int_0^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(-x) dx \text{이고 우변을 } x \text{축으로 } a \text{만큼 평행이동 시키면 } \int_{-a}^0 f(-x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$$

이다. 따라서 $\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$ 이 성립한다. 같은 원리로 $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx$

② $\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a f(x) + f(-x) dx \Rightarrow$ 설명 앞에서 다루었다.

$$\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$$

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a f(x) + f(-x) dx$$

예를 들어 $\int_0^1 (x^2 - 2x) dx$ 의 값을

$$\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx \text{을 이용하여 구해 보자.}$$

$$I = \int_0^1 (x^2 - 2x) dx \text{라 두면}$$

$$I = \int_0^1 ((1-x)^2 - 2(1-x)) dx = \int_0^1 (x^2 - 1) dx \text{이고}$$

$$2I = \int_0^1 (2x^2 - 2x - 1) dx = \left[\frac{2}{3}x^3 - x^2 - x \right]_0^1 = -\frac{4}{3}$$

$$\text{따라서 } I = -\frac{2}{3} \text{이다. 물론 } \int_0^1 (x^2 - 2x) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_0^1 = -\frac{2}{3}$$

$$\text{그런데 } \int_0^\pi \left(\frac{e^{\cos x}}{1 + e^{\cos x}} \right) dx \text{은 쉽게 풀리지 않는다.}$$

$$\text{그런 경우 } \int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx \text{을 이용한다.}$$

$$I = \int_0^\pi \left(\frac{e^{\cos x}}{1 + e^{\cos x}} \right) dx \text{라 두면}$$

$$I = \int_0^\pi \left(\frac{e^{\cos(\pi-x)}}{1 + e^{\cos(\pi-x)}} \right) dx = \int_0^\pi \left(\frac{1}{e^{\cos x} + 1} \right) dx$$

$$\text{따라서 } 2I = \int_0^\pi 1 dx = [x]_0^\pi = \pi$$

$$\text{따라서 } \int_0^\pi \left(\frac{e^{\cos x}}{1 + e^{\cos x}} \right) dx = \frac{\pi}{2}$$

예를 들어 $\int_{-1}^1 (x^2 - 2x) dx$ 의 값을

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a f(x) + f(-x) dx \text{을 이용하여 구해 보자.}$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (x^2 - 2x) dx &= \int_0^1 (x^2 - 2x) + ((-x)^2 - 2(-x)) \\ &= \int_0^1 2x^2 dx = \left[\frac{4}{3} \right]_0^1 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

물론 우함수, 기함수 성질을 이용하면 계산은 간단하다.

$$\text{그런데 } \int_{-1}^1 \left(\frac{x^4}{1 + 2^x} \right) dx \text{은 쉽게 풀리지 않는다.}$$

$$\text{그런 경우 } \int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a f(x) + f(-x) dx \text{을 이용한다.}$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \left(\frac{x^4}{1 + 2^x} \right) dx &= \int_0^1 \left(\frac{x^4}{1 + 2^x} \right) + \left(\frac{(-x)^4}{1 + 2^{-x}} \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{x^4}{1 + 2^x} \right) + \left(\frac{x^4 \times 2^x}{2^x + 1} \right) dx \\ &= \int_0^1 x^4 dx = \left[\frac{1}{5}x^5 \right]_0^1 = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

상위권 수학 왕새부 세미나(14)

$$\textcircled{1} \quad g(x)=xf'(x)+f(x) \Rightarrow \int_a^x g(t)dt = xf(x)$$

$$\textcircled{2} \quad g(x)=xf'(x)-f(x) \Rightarrow \int_a^x \left(\frac{g(t)}{t^2}\right)dt = \frac{f(x)}{x}$$

$$\textcircled{3} \quad g(x)=xf'(x)+2f(x) \Rightarrow \int_a^x t g(t)dt = x^2 f(x)$$

$$\textcircled{4} \quad g(x)=xf'(x)+nf(x) \Rightarrow \int_a^x t^{n-1} g(t)dt = x^n f(x)$$

$$\textcircled{5} \quad g(x)=xf'(x)-nf(x) \Rightarrow \int_a^x \left(\frac{g(t)}{t^{n+1}}\right)dt = \frac{f(x)}{x^n}$$

설명

$$\textcircled{1} \quad g(x)=xf'(x)+f(x) \Rightarrow \int_a^x g(t)dt = xf(x) \Rightarrow g(x)=xf'(x)+f(x)=(xf(x))' \text{이므로}$$

$\int_a^x g(t)dt = xf(x)$ 의 양변을 미분한 식이다.

$$\textcircled{2} \quad g(x)=xf'(x)-f(x) \Rightarrow \int_a^x \left(\frac{g(t)}{t^2}\right)dt = \frac{f(x)}{x} \Rightarrow g(x)=xf'(x)+f(x) \text{에서 양변에 } \div x^2 \text{을 하면}$$

$$\frac{g(x)}{x^2} = \frac{xf'(x)+f(x)}{x^2} = \left(\frac{f(x)}{x}\right)' \text{이므로 } \int_a^x \left(\frac{g(t)}{t^2}\right)dt = \frac{f(x)}{x} \text{의 양변을 미분한 식이다.}$$

적용예시 [2019학년도 6월 평가원 가형 30번]

실수 전체의 집합에서 미분 가능한 함수 $f(x)$ 에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$ 에서의 접선의 y 절편을 $g(t)$ 라 하자.

⇒ **문장해석** $g(t)$ 는 접선의 y 절편이므로 $y=f(x)$ 의 $(t, f(t))$ 에서의 접선의 방정식은 $y=f'(t)(x-t)+f(t)$ 이므로

$$g(t)=-tf'(t)+f(t) \text{이다. 양변에 } -\frac{1}{t^2} \text{을 곱하면 } -\frac{g(t)}{t^2} = \frac{tf'(t)-f(t)}{t^2} = \left(\frac{f(t)}{t}+C_1\right)' \text{에서 } \therefore g(t)=(-t^2)\left(\frac{f(t)}{t}+C_1\right)'$$

$$\textcircled{3} \quad g(x)=xf'(x)+2f(x) \Rightarrow \int_a^x t g(t)dt = x^2 f(x) \Rightarrow g(x)=xf'(x)+2f(x) \text{에서 양변에 } \times x \text{을 하면}$$

$$xg(x)=x^2 f'(x)+2xf(x)=(x^2 f(x))' \text{이므로 } \int_a^x t g(t)dt = x^2 f(x) \text{의 양변을 미분한 식이다.}$$

$$\textcircled{4} \quad g(x)=xf'(x)+nf(x) \Rightarrow \int_a^x t^{n-1} g(t)dt = x^n f(x) \Rightarrow g(x)=xf'(x)+nf(x) \text{에서 양변에 } \times x^{n-1} \text{을 하}$$

$$\text{면 } x^{n-1}g(x)=x^n f'(x)+nx^{n-1}f(x)=(x^n f(x))' \text{이므로 } \int_a^x t^{n-1} g(t)dt = x^n f(x) \text{의 양변을 미분한 식이다.}$$

$$\textcircled{5} \quad g(x)=xf'(x)-nf(x) \Rightarrow \int_a^x \left(\frac{g(t)}{t^{n+1}}\right)dt = \frac{f(x)}{x^n} \quad g(x)=xf'(x)-nf(x) \text{에서 양변에 } \div x^{n+1} \text{을 하면}$$

$$\frac{g(x)}{x^{n+1}} = \frac{xf'(x)-nf(x)}{x^{n+1}} = \left(\frac{f(x)}{x^n}\right)' \text{이므로 } \int_a^x \left(\frac{g(t)}{t^{n+1}}\right)dt = \frac{f(x)}{x^n} \text{의 양변을 미분한 식이다.}$$

$$\Rightarrow g(x)=xf'(x)-nf(x)=xf'(x)+f(x)-(n+1)f(x)=\{xf(x)\}'-(n+1)f(x) \text{라 두고 풀어나가도 된다.}$$

상위권 수학 왕세부 세바사(17)

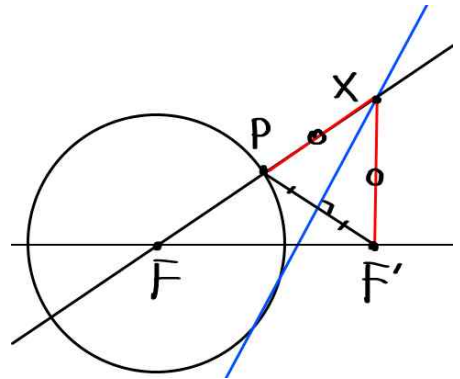
쌍곡선의 성질

① 한 원의 중심 F 와 원 위의 임의의 점 P , 원 밖의 점 F' 에서 직선 FP 과 $\overline{PF'}$ 의 수직이등분선의 교점 X 의 자취는 쌍곡선이다.

⇒ 오른쪽 그림에서 $\overline{XP} = \overline{XF'}$ 이므로

$\overline{XF} - \overline{XF'} = \overline{XF} - \overline{XP} = \overline{PF}$ (반지름으로 일정)

따라서 점 X 는 F, F' 을 두 초점으로 하는 쌍곡선이다.

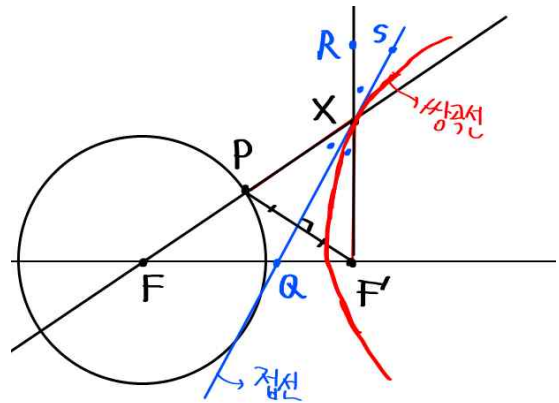


② 쌍곡선의 접선은 접점과 두 초점을 이은 선분이 이루는 각을 이등분한다.

⇒ 오른쪽 그림에서 직선 XQ 는 쌍곡선의 접선이다.

$\triangle XPQ \cong \triangle XF'Q$ 에서 $\angle FXQ = \angle F'XQ \cdots \textcircled{1}$

⇒ 따라서 $\overline{XF} : \overline{XF'} = \overline{FQ} : \overline{F'Q}$
가 성립한다.



③ 쌍곡선의 외부에서 쌍곡선에 반사된 빛은 한 초점을 지난다.

⇒ 두 번째 그림에서 $\angle F'XQ = \angle RXS$ (맞꼭지각) 이고 $\textcircled{1}$ 에서 $\angle RXS = \angle FXQ$ 이므로 R 에서 시작된 빛은 쌍곡선의 X 에 닿은 뒤 접선 XQ 에 대하여 반사한 뒤 [입사각=반사각]의 성질에 의해 쌍곡선의 초점 F 를 지남을 알 수 있다.

58.

최고차항의 계수가 π 인 사차함수 $f(x)$ 에 대하여

함수 $g(x) = \frac{3}{4 - \sin(f(x))}$ 이 $x = \alpha$ 에서 극대이고

$\alpha \geq 0$ 인 모든 α 를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \dots$

$x = \beta$ 에서 극소이고 $\beta > 0$ 인 모든 β 를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \dots$ 라 할 때, $g(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\alpha_1 = 0, \beta_9 = 2$ 이고 $g(\alpha_1) = g(\beta_9) = \frac{6}{7}$

(나) $m \neq 1, n \neq 9$ 인 모든 자연수 m, n 에 대하여 $g(\alpha_m) - g(\beta_n) = \frac{2}{5}$ 이 성립한다.

$g'(-1) = a\pi$ 라 할 때, $a^2 = \frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구 하시오.

(단, $0 < f(0) < \frac{\pi}{2}$, p, q 는 서로소인 자연수)

[2019학년도 11월 수능 가형 30번]-변형2

67.

원점 $(0, 0)$ 을 지나는 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 닫힌 구간 $[0, 1]$ 에서

$f(1)=k$ ($k > 0$), $f'(x) \geq 0$, $f''(x) \neq 0$ 이다.

(나) 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x)=-f(x)$ 이다.

(다) 모든 실수 x 에 대하여 $\int_{x-1}^{x+1} f(t) dt = 2kx$ 이다.

함수 $g(t)$ 가 모든 실수 t 에 대하여

$$\int_0^{g(t)} \{f(x) - kt\} dx = 0$$

을 만족시킬 때, $a_n = \int_{g(n)}^{g(n+1)} f(x) dx$ 라 하자.

$a_5 = 1$ 일 때, $\sum_{n=1}^{20} a_n$ 의 값을 구하시오.

97.

좌표 공간에 두 구

$$S_1: x^2 + y^2 + z^2 = 9,$$

$$S_2: x^2 + (y-t)^2 + z^2 = (t-2\sqrt{3})^2 \quad (t > 2\sqrt{3})$$

가 있다. 구 S_1 위의 점 $P(\sqrt{6}, \sqrt{3}, 0)$ 가 있고 구 S_2 의 중심을 A 라 하자.

구 S_2 위의 x 좌표가 양수인 점 Q 에 대하여 선분 AQ 의 연장선 위에 있고 y 좌표가 $\sqrt{3}$ 인 점 R 이 있다. 두 점 Q, R 이 다음 조건을 만족시킨다.

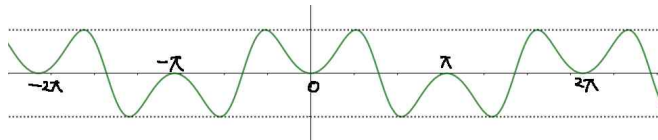
(가) $\triangle OPQ$ 를 포함하는 평면은 구 S_2 에 접한다.

$$(나) \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OR} = 9$$

$\overline{PR} = k$ 일 때 k^2 의 값을 구하시오.

1) 정답 ⑤

$g(x) = \sin(\pi \cos t)$ 의 그래프는 다음과 같다.



$f'(x) = g(x)$ 이므로

ㄱ. $f'(0) = g(0) = 0$

ㄴ. 임의의 양수 α 에 대하여 $g(x)$ 가 y 축 대칭이므로

$$\int_0^{\alpha} g(t) dt = \int_{-\alpha}^0 g(t) dt \rightarrow$$

$$\int_0^{\alpha} g(t) dt = - \int_0^{-\alpha} g(t) dt$$

이므로 $f(\alpha) = -f(-\alpha)$

$\therefore f(-x) = -f(x)$

ㄷ. $g(x)$ 가 $(\frac{\pi}{2}, 0)$ 에 대칭이므로 $f(\pi) = 0$

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 참이다.

[다른 풀이]-1

ㄷ. $f(x) = \int_0^x \sin(\pi \cos t) dt$ 에 $t = y + \pi$ 를 대입하면

$$f(x) = \int_{-\pi}^{x-\pi} \sin(\pi \cos(\pi + y)) dy$$

$$= \int_{-\pi}^{x-\pi} -\sin(\pi \cos y) dy$$

$$= \int_{x-\pi}^{-\pi} \sin(\pi \cos y) dy \rightarrow \text{양변에 } x = \pi \text{를 대입하면}$$

$$f(\pi) = \int_0^{-\pi} \sin(\pi \cos y) dy = f(-\pi)$$

$f(-\pi) = -f(\pi)$ ($\because$ ㄴ)이므로

$$f(\pi) = -f(\pi)$$

$$\therefore f(\pi) = 0$$

[다른 풀이]-2

$$\text{ㄷ. } f(\pi) = \int_0^{\pi} \sin(\pi \cos t) dt \text{에서}$$

$\pi \cos t = x$ 라 두면 $t: 0 \rightarrow \pi$ 이면 $x: \pi \rightarrow -\pi$

$$dt = -\frac{1}{\pi \sin t} dx = -\frac{1}{\pi \sqrt{1 - \cos^2 t}} dx$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{\pi^2 - x^2}} dx \text{이고}$$

$$g(x) = \sin x \times \frac{1}{\sqrt{\pi^2 - x^2}} \text{라 두면}$$

$g(-x) = -g(x)$ 이므로

$$f(\pi) = \int_{\pi}^{-\pi} -g(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx = 0 \text{ (참)}$$

[다른 풀이]-3

ㄷ. $\pi - t = y$ 라 하면 $-\frac{dt}{dy} = 1$ 이고,

$t = 0$ 일 때 $y = \pi$, $t = \pi$ 일 때 $y = 0$ 이므로

$$f(\pi) = \int_0^{\pi} \sin(\pi \cos t) dt$$

$$= - \int_{\pi}^0 \sin\{\pi \cos(\pi - y)\} dy = - \int_{\pi}^0 \sin(-\pi \cos y) dy$$

$$= \int_{\pi}^0 \sin(\pi \cos y) dy = - \int_0^{\pi} \sin(\pi \cos y) dy = -f(\pi)$$

$2f(\pi) = 0$ 이므로 $f(\pi) = 0$ 이다. (참)

[랑데뷰팁]

$$f(x) = \int_0^x \sin(\pi \cos t) dt \text{에서}$$

① $g(x) = \sin(\pi \cos x)$ 라 하면

㉠ $\cos(2\pi - x) = \cos x$ 이므로

$g(x) = g(2\pi - x) \rightarrow g(x)$ 는 $x = \pi$ 에 대칭인 함수이다.

㉡ $\cos(2\pi + x) = \cos x$ 이므로

$g(x) = g(2\pi + x) \rightarrow g(x)$ 는 주기가 2π 인 함수이다.

㉢ $\cos(-x) = \cos x$ 이므로

$g(x) = g(-x) \rightarrow g(x)$ 는 y 축 대칭인 함수이다. (우함수)

② 함수 $g(x)$ 의 닫힌구간 $[0, \pi]$ 에서 그래프를 생각해 보자.

$$g'(x) = -\pi \sin x \cos(\pi \cos x)$$

$$g'(x) = 0 \text{이면 } \sin x = 0 \text{ 또는 } \cos x = \pm \frac{1}{2}$$

㉣ $\sin x = 0$ 에서 $x = 0, \pi$

[다른 풀이]

$\angle BFF' = 120^\circ$ 이고

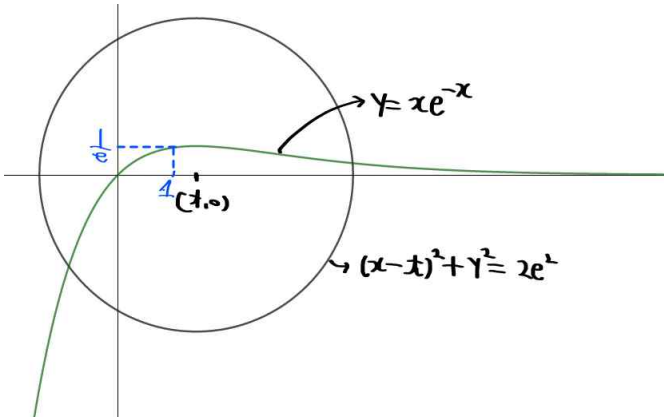
$\overline{F'F} = 4$, $\overline{FB} = 4\sqrt{3} - 6$ 이므로

삼각형 FBF' 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 4 \times (4\sqrt{3} - 6) \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 12 - 6\sqrt{3}$$

87) 정답 ③

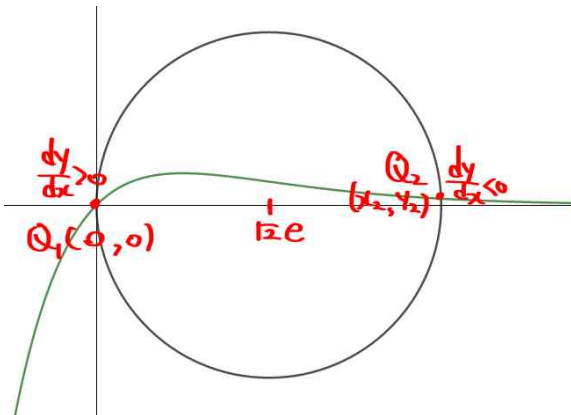
점 Q 가 $y = xe^{-x}$ 과 $(x-t)^2 + y^2 = 2e^2$ 을 만족한다.
그래프로 나타내면 다음과 같다.



$\therefore t = \sqrt{2}e$ 일 때

$y = xe^{-x}$ 와 $(x - \sqrt{2}e)^2 + y^2 = 2e^2$ 의 교점을
 $Q_1(0, 0)$, $Q_2(x_2, y_2)$ 라 하면 다음 그림과 같이

$\frac{dy}{dx} > 0$ 인 경우는 $Q_1(0, 0)$ 일 때다. (참)



$\therefore \frac{dy}{dx} < 0$ 인 Q 가 두 개 존재한다는 뜻은

$y = xe^{-x}$ 와 $(x-t)^2 + y^2 = 2e^2$ 의 교점이

$y = xe^{-x}$ 의 감소 구간에서 두 개 존재한다는 의미이

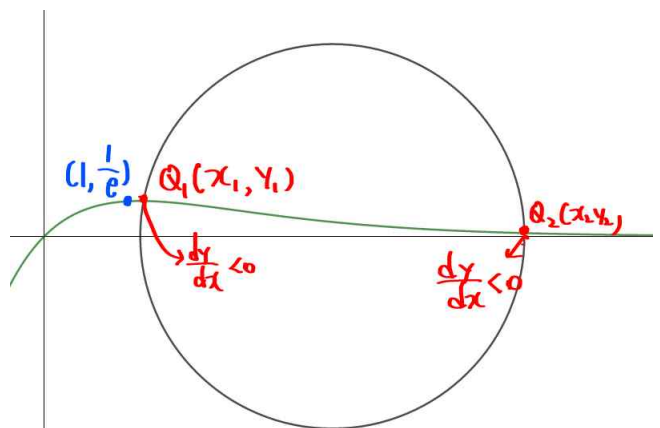
다. $y = xe^{-x}$ 의 극대점은 $(1, \frac{1}{e})$ 이므로

$(x-t)^2 + y^2 = 2e^2$ 에 대입하면

$$(1-t)^2 + \frac{1}{e^2} = 2e^2 \Rightarrow (t-1)^2 = \frac{2e^4-1}{e^2}$$

$t > 1$ 이므로 $t-1 = \frac{\sqrt{2e^4-1}}{e}$ 에서

$$t = 1 + \frac{\sqrt{2e^4-1}}{e}$$



따라서 교점이 모두 극대점의 x 좌표 1보다 큰 쪽에 존재해야

하므로 $t > 1 + \frac{\sqrt{2e^4-1}}{e}$ 이다. (거짓)

$\therefore y = xe^{-x}$ 와 $(x - \sqrt{2}e)^2 + y^2 = 2e^2$ 을 한 식으로
정리하면 $(x-t)^2 + x^2e^{-2x} = 2e^2$ 에서

$$(e^{-2x} + 1)x^2 - 2tx + t^2 = 2e^2 \text{이다.}$$

음함수 미분하면

$$\{-2x^2e^{-2x} + 2x(e^{-2x} + 1)\} \frac{dx}{dt} - 2x - 2t \frac{dx}{dt} + 2t = 0$$

$\dots \textcircled{A}$ 이다.

97) 정답 90

$A(0, t, 0)$, $R(a, \sqrt{3}, c)$ ($a > 0$)라 두면

$$\overrightarrow{PR} = (\sqrt{6} - a, 0, c)$$

(나)에서 $\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{PR}$ 이므로

$$(\sqrt{6}, \sqrt{3}, 0) \cdot (\sqrt{6} - a, 0, c) = 0 \text{에서}$$

$$a = \sqrt{6}$$

따라서 $R(\sqrt{6}, \sqrt{3}, c)$ 이고 $\overrightarrow{PR} = (0, 0, c)$ 이다.

(가)에서 $\overrightarrow{AR} \perp \overrightarrow{OP}$ 이므로

$$\overrightarrow{AR} \cdot \overrightarrow{OP} = (\sqrt{6}, \sqrt{3} - t, c) \cdot (\sqrt{6}, \sqrt{3}, 0) = 0 \Rightarrow$$

$$6 + 3 - \sqrt{3}t = 0$$

에서 $t = 3\sqrt{3}$ 이므로 $A(0, 3\sqrt{3}, 0)$ 이다.

$$\text{따라서 } \overrightarrow{OP} = 3, \overrightarrow{OA} = 3\sqrt{3}, \overrightarrow{AP} = 3\sqrt{2}$$

따라서 $\triangle OPA$ 는 $\angle P = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

$\overrightarrow{AQ}$ 는 구 S_2 의 반지름의 길이이므로

$$\overrightarrow{AQ} = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = \sqrt{3} \text{ 이다.}$$

한편 (가)에서 $\overrightarrow{AQ} \perp \overrightarrow{PQ}$ 이므로 $\triangle AQP$ 는

$\angle Q = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

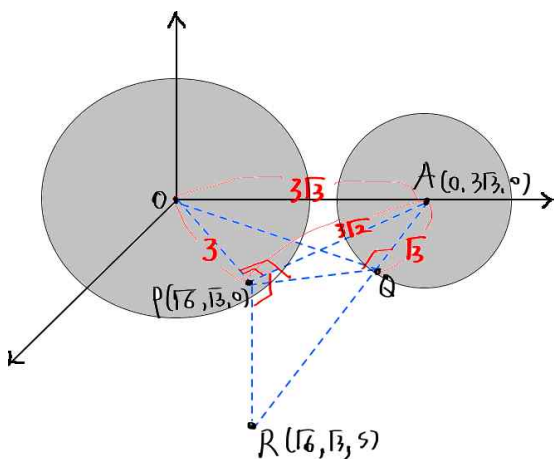
$$\text{따라서 } \overrightarrow{PQ} = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2} = \sqrt{15}$$

$$\text{또한 } \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{PR} = (\sqrt{6}, -2\sqrt{3}, 0) \cdot (0, 0, c) = 0 \text{이므로}$$

$$\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{PR}$$

따라서 $\triangle APR$ 는 $\angle P = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

따라서 다음 그림과 같다.



$$\triangle AQP \sim \triangle APR \text{ 이므로 } \overrightarrow{AQ} : \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AP} : \overrightarrow{PR}$$

$$\text{따라서 } \sqrt{3} : \sqrt{15} = 3\sqrt{2} : \overrightarrow{PR} \text{에서 } \overrightarrow{PR} = 3\sqrt{10}$$

$$\text{따라서 } k = 3\sqrt{10} \text{ 이므로 } k^2 = 90$$

98) 정답 30

점 A에서 평면 α 에 내린 수선의 발을 A' 라 하면 $\overrightarrow{AA'}$ 는 평면의 법선 벡터이다.

삼각형 $AA'P$ 는

$$\overrightarrow{AA'} = \frac{|\sqrt{3} + \sqrt{3} + \sqrt{3} - \sqrt{3}|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = 2, \overrightarrow{A'P} \perp \overrightarrow{AA'},$$

$$\overrightarrow{AP} = 4$$

이므로 $\angle APA' = 30^\circ$ 인 직각삼각형이다.

점 B에서 평면 α 에 내린 수선의 발을 B' 라 하면 $\overrightarrow{BB'}$ 는 평면의 법선 벡터이다.

(나)에서 삼각형 $BB'Q$ 는 $\angle BQB' = 30^\circ$ 인 직각삼각형이므로

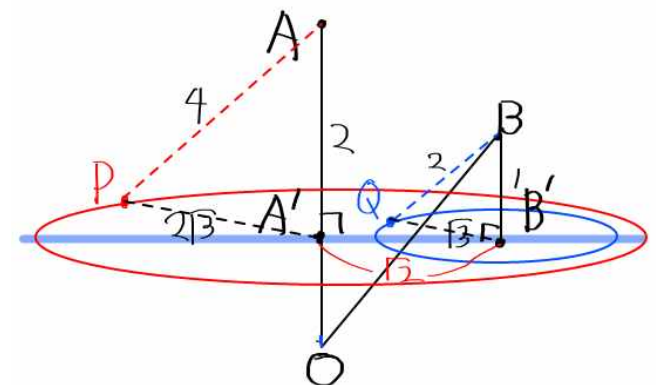
$$\overrightarrow{BB'} = \frac{|\sqrt{3} + \sqrt{3} + 0 - \sqrt{3}|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = 1 \text{ 이므로,}$$

$$\overrightarrow{BQ} = 2, \overrightarrow{B'Q} = \sqrt{3} \text{ 이다.}$$

따라서

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{BP} &= (\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'Q}) \cdot (\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'P}) \\ &= 2 + \overrightarrow{A'Q} \cdot \overrightarrow{B'P} \end{aligned}$$

한편, 원점 O를 기준으로 보면 $\overrightarrow{OA} = 3, \overrightarrow{OB} = \sqrt{6}$ 이고 O에서 평면 α 까지 거리가 1이므로 다음 그림과 같은 상황이다.



$$\text{따라서 } \overrightarrow{A'B'} = \sqrt{2}$$

따라서 점 P는 평면 α 위의 점 A' 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $2\sqrt{3}$ 인 원 위의 점이고 점 Q는 점 A' 에서 $\sqrt{2}$ 만큼 떨어진 점 B' 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$ 인 원 위의 점이다.