

수학 영역(가형)

제 2 교시

1

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{3x}$ 의 값은?

[2점]

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

2. 반지름의 길이가 2, 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$ 인 부채꼴의 호의 길이는?
[2점]

- ① $\frac{\pi}{4}$ ② $\frac{\pi}{2}$ ③ $\frac{3}{4}\pi$ ④ π ⑤ $\frac{5}{4}\pi$

3. 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$ 의 점근선의 방정식이 $y = kx$, $y = -kx$ 이다.
양수 k 의 값은? [2점]

- ① 8 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

4. 닫힌 구간 $[2, 5]$ 에서 함수 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x-1)$ 의 최솟값은?
[3점]

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

5. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 3x dx$ 의 값은?

[3점]

- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{5}{12}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

6. 곡선 $y = \frac{x}{x^2+1}$ 의 변곡점의 개수는?

[3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

7. 자연수 7의 분할 중 4 이하의 자연수의 합으로 나타내어지는 분할의 수는? [3점]

- ① 11 ② 10 ③ 9 ④ 8 ⑤ 7

8. $e^x - e^y = x$ 위의 점 $(0, 0)$ 에서의 접선의 기울기는? [3점]

- ① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

10. $\left(x^2 + \frac{5}{x}\right)^n$ 의 전개식에서 0이 아닌 상수항이 존재하도록 하는 10

이하의 모든 자연수 n 의 합은? [3점]

- ① 18 ② 17 ③ 16 ④ 15 ⑤ 14

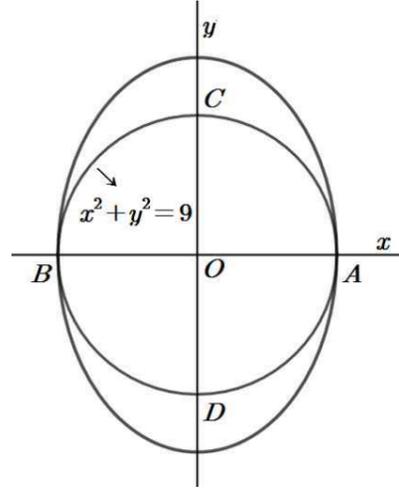
9. $0 \leq x < 2\pi$ 에서 부등식 $2\cos x - 1 < 0$ 의 해가 $\alpha < x < \beta$ 일 때,
 $\sin(\beta - \alpha)$ 의 값은? [3점]

- ① $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0
 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

11. 함수 $f(x) = (ax+b)\sin x$ 에 대하여 $f'(0) = 2$, $f''(0) = 3$ 일 때,
 $a \times b$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.) [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

12. 그림과 같이 원 $x^2 + y^2 = 9$ 가 x 축과 만나는 두 점을 각각 A, B라
 하고, y 축과 만나는 두 점을 각각 C, D라 하자. 두 초점이 C, D이
 고, 두 점 A, B를 지나는 타원이 점 $(k, 3)$ 를 지날 때, k^2 의 값
 은? [3점]



- ① $\frac{7}{2}$ ② $\frac{\sqrt{13}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{14}}{2}$ ④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

13. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 가

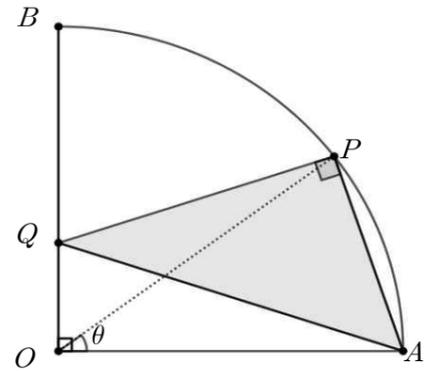
$$f'(x) = \begin{cases} e^{x-1} - 1 & (x < 1) \\ \ln x & (x > 1) \end{cases}$$

이다. $f(e) = 2$ 일 때, $f(0)$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{e} - 1$ ② $\frac{1}{e}$ ③ $\frac{1}{e} + 1$ ④ $\frac{1}{e} + \frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{1}{e} + 2$

14. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$ 인 부채꼴

OAB 가 있다. 호 AB 위의 점 P 와 선분 OB 위의 점 Q 는 $\angle APQ = \frac{\pi}{2}$ 을 유지한 채 움직인다. $\angle POA = \theta$ 일 때, 삼각형 APQ 의 넓이를 $S(\theta)$ 라 하자. $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{\theta}$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{5}{2}$ ② 2 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 1 ⑤ $\frac{1}{2}$

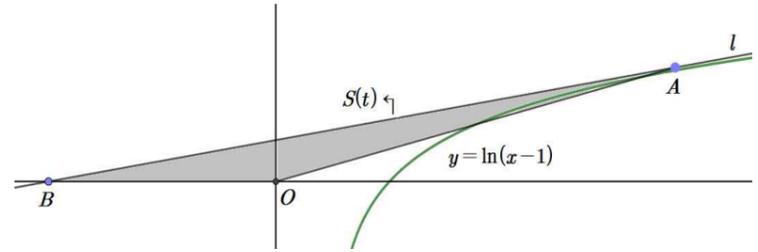
15. 곡선 $y=e^x$ 과 두 직선 $x=0, x=1$ 및 x 축으로 둘러싸인

부분의 넓이를 S 라 하자. 곡선 $y=e^x$ 과 두 직선 $x=1, x=a$ 및 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 $2S+2$ 가 되도록 하는 실수 a 의 값은? [4점]

- ① $\frac{3}{2}$ ② $\ln 3+1$ ③ $\ln 3+\frac{3}{2}$
 ④ 2 ⑤ $\ln 6$

16. 곡선 $y=\ln(x-1)$ 위의 점 $A(t, \ln(t-1))$ 에서의 접선을 l 이라 하자. 직선 l 이 x 축과 만나는 점을 B 라 하고, 삼각형 AOB 의 넓이를 $S(t)$ 라 할 때, $S'(e^2+1)$ 의 값은? [4점]
 (단, $t > 2$ 이고 O 는 원점이다.)

- ① $\frac{7}{2}-e$ ② $\frac{9}{2}-\frac{1}{2e^2}$ ③ $\frac{5}{2}-\frac{1}{2e^2}$
 ④ $\frac{1}{2}-\frac{1}{2e}$ ⑤ $\frac{1}{2}+\frac{1}{2e}$



17. 함수 $f(x) = \cos\left(\frac{x^2}{2}\right)$ 에 대한 설명으로 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

| 보기 |

ㄱ. 구간 $(0, 1)$ 에서 $y = f(x)$ 는 위로 볼록하다.

ㄴ. $\int_0^1 f(x)dx < 1$

ㄷ. $0 < x < 1$ 일 때, $\frac{1}{2}x^2 f(x) < \sin\left(\frac{x^2}{2}\right)$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

18. 두 양수 p, t 에 대하여 점 $A(0, -t)$ 에서 포물선 $x^2 = 4py$ 에 그은 두 접선이 x 축과 만나는 두 점을 각각 F, F' 라 하고 포물선과 만나는 두 점을 각각 P, Q 라 하자.

$\angle PAQ = \frac{\pi}{3}$ 일 때, 두 점 F, F' 을 초점으로 하고 두 점 P, Q 를

지나는 타원의 장축의 길이가 $4\sqrt{3} + 12$ 이다.

이때, $p+t$ 의 값은?

[4점]

- ① 12 ② 11 ③ 10
 ④ 9 ⑤ 8

19. 자연수 n 에 대하여 $3a+3b+c+d=3n$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d 의 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수를 a_n 이라 하자. 다음은 $\sum_{n=1}^7 a_n$ 의 값을 구하는 과정이다.

음이 아닌 정수 a, b, c, d 가 $3a+3b+c+d=3n$ 을 만족시키려면 음이 아닌 정수 k 에 대하여 $c+d=3k$ 이어야 한다.
 $c+d=3k$ 인 경우는
 (1) 음이 아닌 정수 k_1, k_2 에 대하여 $c=3k_1, d=3k_2$ 인 경우이거나
 (2) 음이 아닌 정수 k_3, k_4 에 대하여 $c=3k_3+1, d=3k_4+2$ 인 경우 또는
 (3) 음이 아닌 정수 k_5, k_6 에 대하여 $c=3k_5+2, d=3k_6+1$ 인 경우이다.

(1) $c=3k_1, d=3k_2$ 인 경우 :
 $3a+3b+c+d=3n$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d 의 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 개수는 \square (가) 이다.

(2) $c=3k_3+1, d=3k_4+2$ 인 경우 :
 $3a+3b+c+d=3n$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d 의 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 개수는 \square (나) 이다.

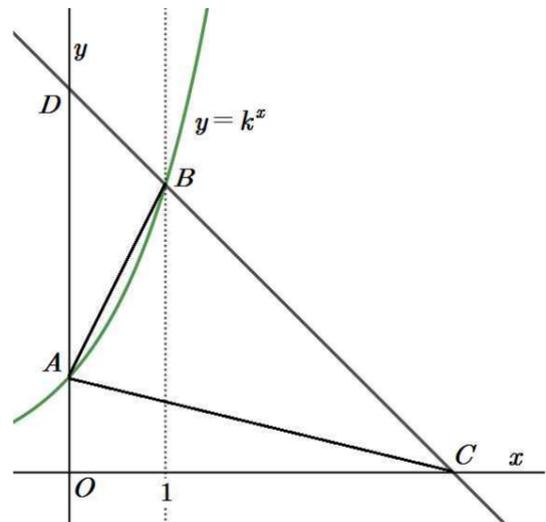
(3) $c=3k_5+2, d=3k_6+1$ 인 경우 :
 (2)와 같은 경우의 수를 가지므로 \square (나) 이다.

(1), (2), (3)에 의하여 $3a+3b+c+d=3n$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d 의 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수 a_n 은
 $a_n = \square$ (가) $+ 2 \times \square$ (나) 이다. 자연수 m 에 대하여
 $\sum_{n=1}^m \square$ (나) $= {}_{m+3}C_4$
 이므로 $\sum_{n=1}^7 a_n = \square$ (다) 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n), g(n)$ 이라 하고, (다)에 알맞은 수를 r 이라 할 때, $f(5)+g(6)+r$ 의 값은? [4점]

- ① 793 ② 818 ③ 843 ④ 861 ⑤ 893

20. 그림과 같이 곡선 $y=k^x (k>1)$ 과 y 축과 만나는 점을 A 라 하고, 곡선 $y=k^x$ 와 직선 $x=1$ 이 만나는 점을 B 라 하자. 점 B 를 지나고 기울기가 -1 인 직선 l 이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 C, D 라 하자. 삼각형 ABC 의 넓이가 삼각형 ABD 의 넓이의 3배일 때, 다음 조건을 만족시키는 곡선 $y=f(x)$ 에 대하여 $f(2)$ 의 값을 구하면? [4점]



(가) 곡선 $y=k^x (k>1)$ 을 평행이동 또는 x 축에 대하여 대칭이동 또는 y 축에 대하여 대칭이동 및 이들을 여러 번 결합한 이동을 통해 곡선 $y=f(x)$ 와 일치시킬 수 있다.
 (나) 곡선 $y=f(x)$ 는 두 점 C, D 를 지나고 $f(1)<k$ 이다.

- ① 2 ② $\frac{19}{20}$ ③ $\frac{6}{5}$ ④ 1 ⑤ $\frac{2}{5}$

21. $x \geq 0$ 에서 연속인 함수 $f(x)$ 와 $x \geq 1$ 에서 미분가능한 함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \quad g(t^2)t^3 = \int_1^t \{f(\ln x) + f((\ln x)^2)\ln x\} dx$$

$$(나) \quad \int_0^1 f(x) dx = 4, \quad \int_1^{e^2} g(x) dx = 2$$

$g(e^2)$ 의 값은?

[4점]

- ① $5e^2$ ② $6e^2$ ③ $\frac{5}{e^2}$ ④ $\frac{6}{e^2}$ ⑤ $\frac{6}{\sqrt{e}}$

단답형

22. 방정식 $\log_2(x+3)=3$ 을 만족시키는 실수 x 의 값을 구하시오.

[3점]

23. 정적분 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$ 의 값을 $\frac{q}{p} \ln 2$ 이라 할 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p, q 는 서로소인 자연수이다.) [3점]

24. 좌표평면에서 곡선 $y=3\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ ($0 \leq x \leq 4$) 위의 점 중 y 좌표가 정수인 점의 개수를 구하시오. [3점]

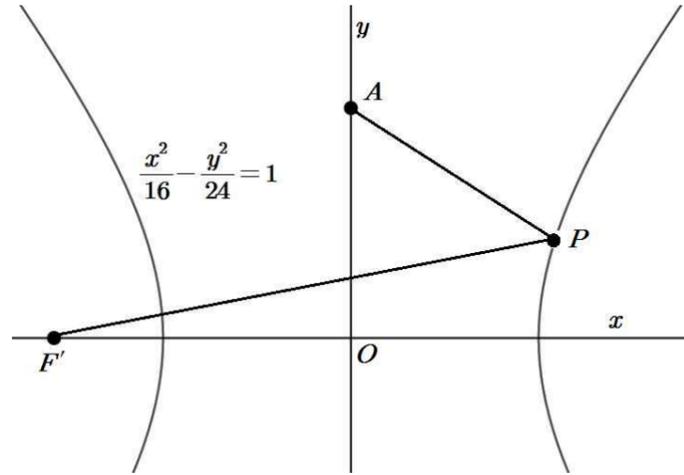
26. 숫자 1, 2, 3, 4, 5에서 중복을 허락하여 8개를 선택할 때, 홀수가 세 개가 되는 경우의 수를 구하시오. [4점]

25. 함수 $f(x)=\ln x$ 에 대하여 $g(x)=f(f(x))$ 일 때 $e \times g'(e)$ 의 값을 구하시오. [3점]

27. x 에 대한 방정식 $x^2 e^{\frac{x}{n}+2} = k$ 가 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 정수 k 의 개수를 $f(n)$ 이라 하자. $\sum_{n=1}^5 f(n)$ 의 값을 구하시오.

(단, n 은 자연수이고 $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{\frac{x}{n}+2} = 0$) [4점]

28. 다음 그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{24} = 1$ 의 두 초점 중 x 좌표가 음수인 점을 F' 라 하자. 점 $A(0, 2\sqrt{6})$ 와 이 쌍곡선 위에 있고 x 좌표가 양수인 점 P 에 대하여 $\overline{AP} + \overline{PF'}$ 의 최솟값을 구하시오. [4점]



29. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 집합 X 로의 함수 f 중에서 $f(1) \times f(2) + f(3) \times f(4) = 10$ 을 만족시키는 함수 f 의 개수를 구하시오. [4점]

30. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 와 함수 $f(x)$ 를 평행이동하여 얻은 함수 $g(x)$ 에 대하여 다음 조건이 성립한다.

- (가) 1이 아닌 모든 실수 x 에 대하여 $f(\pi^x) > f(\pi)$ 이다.
 (나) 임의의 실수 x 에 대하여 $f'(x)$ 의 최솟값이 $-\frac{16}{27}\pi^2$ 이다.
 (나) 함수 $h(x) = \begin{cases} f(x) & (x < 0) \\ g(x) & (x \geq 0) \end{cases}$ 는 실수 전체에서 미분가능하고 역함수를 갖는다.

이때, $h\left(\frac{5}{9}\pi\right) - h\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{q}{p}\pi^3$ 이다. $q-p$ 의 값을 구하시오.

(단, p, q 는 서로소인 자연수이다.)

[4점]

※ 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.