

수학 영역(가형)

제 2 교시

1

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+5x)}{3x}$ 의 값은?

[2점]

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

3. $\int_0^1 (e^x - 1)dx$ 의 값은?

[2점]

- ① $e-2$ ② $e-1$ ③ e ④ $e+1$ ⑤ $e+2$

2. 함수 $y = -\sin x + 2$ 의 최댓값은?

[2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

4. 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = -1$ 의 주축의 길이는?

[3점]

- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

5. 함수 $f(x)=\sin x$ 에 대하여 $f'(\pi)$ 의 값은?

[3점]

- ① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

7. 같은 종류의 연필 10자루를 같은 종류의 필통 3개에 나누어 넣을 때, 빈 필통이 없도록 넣는 경우의 수는?

[3점]

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

6. 두 함수 $y=\log_2 \frac{k}{x}$, $y=2^{2-x}$ 의 그래프가 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭일 때, 상수 k 의 값은?

[3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

8. 함수 $f(x) = 2e^x + e^{2x}$ 에 대하여 함수 $f(2x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 일 때, $g'(3)$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{7}$ ③ $\frac{1}{6}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

10. 좌표평면 위의 곡선 $y = \sqrt{x-4}$ 과 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

- ① 20 ② $\frac{64}{3}$ ③ $\frac{68}{3}$ ④ 24 ⑤ $\frac{76}{3}$

9. $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 두 함수 $y = \sqrt{3} \sin x$, $y = \tan x$ 의 그래프가 만나는 점의 y 좌표는? [3점]

- ① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ⑤ $\sqrt{3}$

11. 좌표평면에서 곡선 $y = e^{x+1}$ 위의 점 $A(0, e)$ 에서의 접선이 x 축과 만나는 점을 B라 하자. 삼각형 OAB의 넓이는?
(단, O는 원점이다.) [3점]

- ① $\frac{1}{2}e$ ② $\frac{2}{3}e$ ③ e ④ $\frac{3}{2}e$ ⑤ $2e$

12. 집합 $X = \{1, 2\}$ 에서 집합 $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 으로의 함수 f 중에서 $f(1)+f(2)$ 가 3의 배수가 되도록 하는 함수 f 의 개수는? [3점]

- ① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

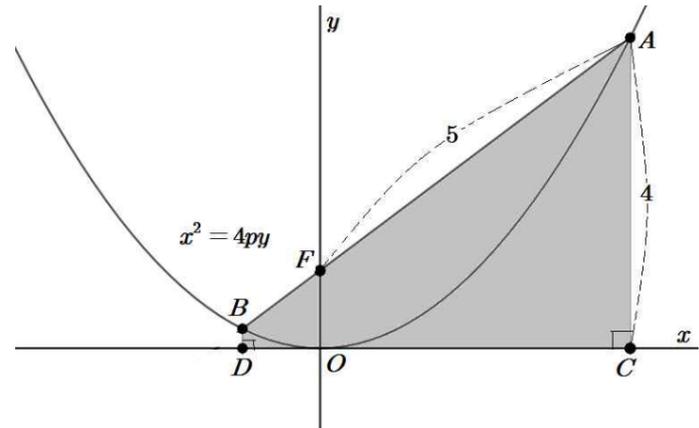
13. 함수 $f(x) = x^3 - 2x \ln x + 4$ 에 대하여 $f''(a) = 0$ 인 실수 a 의 값은?

[3점]

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ 1 ④ $\sqrt{3}$ ⑤ 3

14. 그림과 같이 포물선 $x^2 = 4py$ ($p > 0$)의 초점 F 를 지나는 직선이 포물선과 만나는 두 점을 각각 A, B 라 하고, 두 점 A, B 에서 x 축에 내린 수선의 발을 각각 C, D 라 하자.

$\overline{AF} = 5$, $\overline{AC} = 4$ 일 때, 사각형 $ABDC$ 의 넓이는? [4점]
(단, O 는 원점이고 A 는 제1사분면 위의 점이다.)

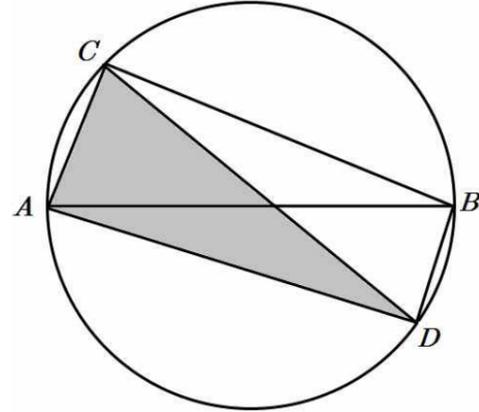


- ① $\frac{85}{8}$ ② $\frac{85}{6}$ ③ $\frac{85}{4}$ ④ $\frac{85}{3}$ ⑤ $\frac{85}{2}$

15. $\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^{\frac{2}{n}} \left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{4+\sin x}} \right) dx$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

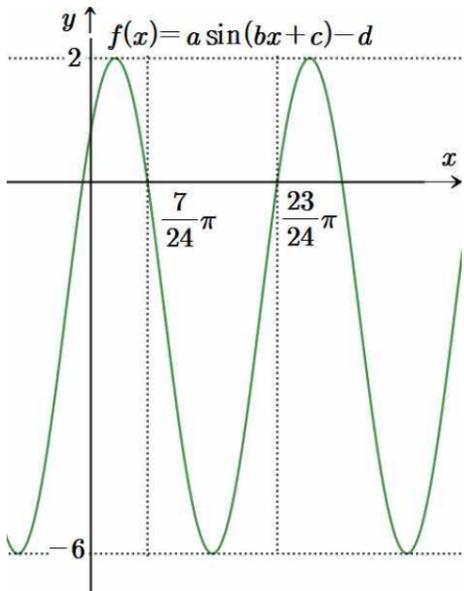
16. 그림과 같이 길이가 6인 선분 AB 를 지름으로 하는 원 위에 두 점 C, D 가 있다. $\overline{BD}=2$ 이고 C 에서 \overline{AB} 까지 거리가 $\sqrt{5}$ 일 때, 삼각형 CAD 의 넓이는? (단, $\overline{AC} < \overline{BC}$ 이고 \overline{AB} 와 \overline{CD} 는 한 점에서 만난다.) [4점]



- ① $\frac{2\sqrt{2}+8\sqrt{5}}{7}$ ② $\frac{2\sqrt{2}+8\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{2\sqrt{2}+8\sqrt{5}}{3}$
 ④ $\frac{\sqrt{2}+4\sqrt{5}}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}+4\sqrt{5}}{6}$

17. 모두 양수인 네 상수 a, b, c, d ($1 < b < 3, 0 < c < \frac{\pi}{2}$)에 대하여 함수 $f(x) = a \sin(bx + c) - d$ 가 있다. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, $abcd$ 의 값은? [4점]

(단, $f(\frac{7}{24}\pi) = f(\frac{23}{24}\pi) = 0$)



- ① $\frac{7}{2}\pi$ ② 4π ③ $\frac{9}{2}\pi$ ④ 5π ⑤ $\frac{11}{2}\pi$

18. 다항식 $(1-x)^{100}(1+x)^{100}$ 의 x^k 의 계수를 a_k ($0 \leq k \leq 200$)라 하자. 다음은 $a_k = a_{k+1} = 0$ 을 만족시키는 자연수 k 가 존재하지 않음을 보이는 과정이다. ($0 \leq k \leq 199$)

$q(x) = (1-x)^{99}(1+x)^{100}$ 의 x^k 의 계수를 b_k ($0 \leq k \leq 199$),
 $r(x) = (1-x)^{100}(1+x)^{99}$ 의 x^k 의 계수를 c_k ($0 \leq k \leq 199$)라 하자.

$p(x) = (1-x)^{100}(1+x)^{100}$ 라 하면 $p(x) = q(x) - xq(x)$ 또는 $p(x) = r(x) + xr(x)$ 임을 알 수 있다.

두 식에서 x^k ($0 \leq k \leq 199$)의 계수를 비교하면,

$$a_k = b_k - b_{k-1} \text{ 또는 } a_k = c_k + c_{k-1} \text{ 이다.} \dots \text{㉑}$$

$p(x) = \sum_{k=0}^{200} a_k x^k = (1-x)^{100}(1+x)^{100}$ 라 놓고, 양변을 미분하면

$$p'(x) = \sum_{k=1}^{200} k a_k x^{k-1} = \alpha q(x) + \beta r(x)$$

$$\text{따라서 } \sum_{k=1}^{200} k a_k x^{k-1} = \alpha \sum_{k=0}^{199} b_k x^k + \beta \sum_{k=0}^{199} c_k x^k$$

위 등식에서 x^{k-1} ($1 \leq k \leq 200$)의 계수를 비교하면,

$$k a_k = \alpha b_{k-1} + \beta c_{k-1} \dots \text{㉒}$$

이 항정리를 이용하면, $p(x)$ 의 x^{200} 의 계수는

$$a_{200} = \gamma \text{ 이므로 } a_{200} \neq 0 \text{ 이다.}$$

한편, $a_k = 0$ 이고 $a_{k+1} = 0$ 인 자연수 k ($0 \leq k \leq 198$)가 존재한다고 가정하면

$$\text{㉑에서 } b_{k+1} = b_k = b_{k-1}, c_{k+1} = -c_k = c_{k-1} \dots \text{㉓}$$

$$\text{㉒에서 } b_{k-1} = c_{k-1}, b_k = c_k \dots \text{㉔ 이 성립한다.}$$

$$b_k + c_k = b_k + (-c_{k-1}) = b_k - (b_{k-1}) = 0 \dots \text{㉕}$$

$$\text{㉓, ㉕에서 } b_k = c_k = 0 \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 ㉓에서 } b_{k+1} = b_k = c_{k+1} = c_k = 0 \text{ 이다.}$$

$$\text{㉒에서 } f(k) a_{f(k)} = \alpha b_{k+1} + \beta c_{k+1} = 0 \text{ 이므로}$$

$$a_{f(k)} = 0 \text{ 이다.}$$

$$\text{같은 방법으로 } a_{f(k+1)} = a_{f(k+2)} = \dots = 0 \text{ 이다.}$$

그런데 $a_{200} \neq 0$ 이므로 모순이다. 따라서 $a_k = a_{k+1} = 0$ 인 k 는 존재하지 않는다.

$\frac{\alpha}{\beta} + \gamma + f(100)$ 의 값을 구하면? [4점]

- ① 100 ② 102 ③ 104 ④ 106 ⑤ 108

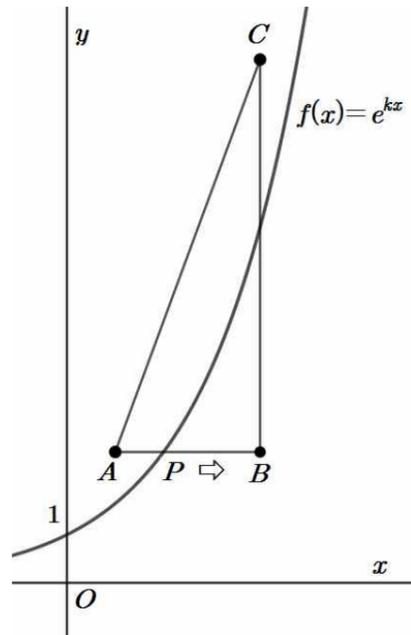
19. 타원 $\frac{x^2}{16} + \frac{3y^2}{4} = 1$ 위의 점 $A(2, 1)$ 에서의 접선이 x 축과 만나는 점을 B 라 하고 두 점 A 와 B 을 지나고 다음 조건을 만족시키는 포물선을 C 라 하자.

포물선 C 의 초점 F 는 선분 AB 위에 있고 준선은 x 축과 평행하다.

포물선 C 의 준선의 방정식이 $y = k$ ($k < 0$)일 때, $k = p + q\sqrt{37}$ 이다. $5p + q$ 의 값을 구하면? (단, p, q 는 유리수이다.) [4점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

20. 그림과 같이 세 점 $A(1, e)$, $B(5, e)$, $C(5, 5e)$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC 가 있다. 지수함수 $f(x) = e^{kx}$ 위의 점 P 는 삼각형 ABC 의 변을 따라 점 A 를 출발하여 점 B 를 거쳐 점 C 까지 이동하고 있다. 점 P 는 점 A 에서 B 까지는 매초 1의 속력으로 움직이고 점 B 를 지나 점 C 까지 매초 e 의 일정한 속력으로 움직인다고 할 때, t 초 후 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 P 에서의 접선의 기울기를 $g(t)$ 라 하자. 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, 점 P 는 한 번 지나간 점은 다시 지나가지 않는다.) [4점]



| 보기 |

ㄱ. $g(t) = \frac{e}{t+1}$ ($0 \leq t < 4$)

ㄴ. $4 \leq t \leq 8$ 일 때 P 의 좌표는 $(5, (t-3)e)$

ㄷ. $\int_0^8 g(t)dt = e\left(\frac{7}{2}\ln 5 + \frac{6}{5}\right)$

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 함수 $f(x) = \begin{cases} xe^x & (x < 0) \\ xe^{-x} & (x \geq 0) \end{cases}$ 와 실수 a 에 대하여

$$f(a) - f(t) = f'(a)(a - t)$$

를 만족시키는 서로 다른 실수 t 의 개수를 $g(a)$ 라 하자.
 함수 $g(a)$ 가 $a = \alpha$ 에서 불연속인 모든 α 를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ (m 은 자연수)라 할 때, $f(\alpha_m) - f(\alpha_1)$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{4}{e}$ ② $\frac{3}{e^2}$ ③ $\frac{1}{e^2}$ ④ $\frac{4}{e^2}$ ⑤ $\frac{5}{e}$

단답형

22. ${}_2\Pi_5$ 의 값을 구하시오. [3점]

23. 함수 $f(x) = -\frac{1}{x^3}$ 에 대하여 $f'\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ 의 값을 구하시오. [3점]

24. 매개변수 $t(t > 0)$ 로 나타내어진 함수

$$x = 2t + \sqrt{t}, \quad y = 5t^3$$

에 대하여 $t = 1$ 일 때, $\frac{dy}{dx}$ 의 값을 구하시오. [3점]

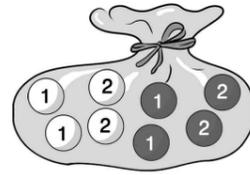
25. 점근선의 방정식이 $y = \sqrt{3}x$, $y = -\sqrt{3}x$ 이고, x 축과 만나는 두 점 사이의 거리가 6인 쌍곡선의 두 초점 사이의 거리를 구하시오. [3점]

26. 네 개의 자연수 2, 3, 5, 7 중에서 중복을 허락하여 10개를 선택할 때, 선택된 10개의 수의 곱이 90의 배수가 되도록 하는 경우의 수를 구하시오. [4점]

27. 실수 t 에 대하여 직선 $x=t$ 가 두 곡선 $y = \frac{1}{4} \cos 2x$ 와 $y = \cos x$ 와 만나는 점을 각각 A, B 라 하자. 점 A 에서 $y = \frac{1}{4} \cos 2x$ 에 접하는 접선과 점 B 에서 $y = \cos x$ 에 접하는 접선이 이루는 예각의 크기를 $\theta(t)$ 라 하자. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan^2 \theta(t)}{t^6} = k$ 일 때, $100k$ 의 값을 구하시오.

[4점]

28. 그림과 같이 숫자 1이 적힌 흰 공과 검은 공이 각각 2개, 숫자 2가 적힌 흰 공과 검은 공이 각각 2개씩 들어 있는 주머니가 있다.



왼쪽부터 차례대로 **동**, **해**, **물**, **과**, **백**, **두**, **산**, **이**가 적혀 있는 상자에 주머니 안의 공을 한 칸에 한 개씩 모두 넣을 때, **백**, **두**, **산**이 적힌 칸에 넣는 세 개의 공에 적힌 수의 합이 4이고 모두 같은 색이 되도록 하는 경우의 수를 구하시오.

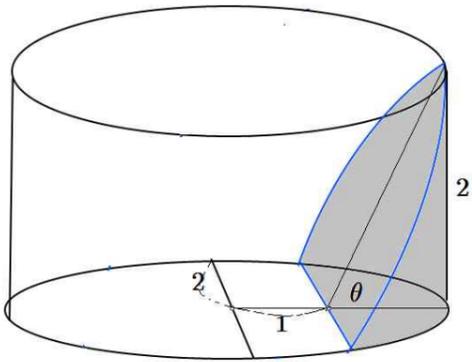
(단, 모든 공은 크기와 모양이 같다.)

[4점]

29. 다음 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 2이고 높이가 2인 원기둥에서 밑면의 중심에서 1만큼 떨어진 지점을 지나고 밑면과 이루는 각이 θ 인 평면으로 원기둥을 자를 때 작은 부분의 부피를 V 라 하자. $V = a\sqrt{3} + b\pi$ 일 때 $|ab|$ 의 값을 구하시오.

(단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $\tan\theta = 2$, a, b 는 유리수)

[4점]



30. 상수 a, b 에 대하여 함수 $f(x)$ 는

$$f(x) = \begin{cases} (b-x)e^{x+2} & (x < 0) \\ \frac{a \ln(x+1)}{x+1} & (x \geq 0) \end{cases}$$

이라 할 때 함수 $f(x)$ 는 모든 실수 x 에 대하여 미분 가능하다.

구간 $[2, \infty)$ 에서 정의된 함수

$$g(t) = \int_{-2}^0 |f(x) - t| dx$$

가 $t = k$ 에서 극솟값을 갖는다. 방정식 $f(x) = k$ 의 실근의 최댓값을 α 라 하자.

$f(-\frac{1}{\alpha})$ 의 값을 c 라 할 때, $\frac{b-a}{c^2}$ 의 값을 구하시오. [4점]

(단, a, b, c 는 상수이다.)

※ 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.