

제 2 교시

수학 영역 (가형)

5지선다형

1. 두 벡터 $\vec{a}=(2, 3)$, $\vec{b}=(-1, 5)$ 에 대하여 벡터 $\vec{a}+2\vec{b}$ 의 모든 성분의 합은? [2점]

- ① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

2. ${}_2H_4-{}_4H_2$ 의 값은? [2점]

- ① 16 ② 12 ③ 8
④ 4 ⑤ 0

3. $\sin \frac{17}{6}\pi$ 의 값은? [2점]

- ① -1 ② $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 0

4. 두 사건 A, B 가 서로 독립이고

$P(A)=\frac{1}{3}, P(A\cap B)=\frac{1}{6}$

일 때, $P(B)$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{5}{12}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

5. 정적분 $\int_1^e \frac{3x+1}{x^2} dx$ 의 값은 [3점]

- ① $4 - \frac{1}{e}$ ② $5 - \frac{1}{e}$ ③ $6 - \frac{2}{e}$ ④ $6 - \frac{1}{e}$ ⑤ $8 - \frac{3}{e}$

6. 함수 $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x^2} & (x \neq 0) \\ a & (x = 0) \end{cases}$ 가 모든 실수 x 에서
연속이기 위한 실수 a 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{7}{4}$

7. 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{17} = 1$ 의 두 초점을 $F(9, 0)$, $F'(-9, 0)$ 이라

하자. 쌍곡선 위의 점 P 에 대하여 $|\overline{PF} - \overline{PF'}|$ 의 값은?

(단, $a > 0$)

[3점]

- ① 16 ② 15 ③ 14 ④ 13 ⑤ 12

8. 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 중복을 허락하여 세 개를 택해 일렬로 나열하여 만든 세 자리 자연수가 짝수인 경우의 수는?
[3점]

- ① 72 ② 90 ③ 108 ④ 126 ⑤ 144

9. 곡선 $y^2+2xy+8=0$ 위의 점 $(-3, 4)$ 에서의 접선의 기울기는?
[3점]

- ① -8 ② $-\frac{19}{3}$ ③ $-\frac{17}{3}$ ④ -4 ⑤ -3

10. 한 개의 동전을 8번 던질 때, 뒷면이 앞면보다 4번 더 많이 나올 확률은?
[3점]

- ① $\frac{19}{128}$ ② $\frac{3}{32}$ ③ $\frac{7}{64}$ ④ $\frac{1}{8}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

11. $x > 0$ 인 실수 x 에 대하여 방정식 $2n\pi \cos x - x = 0$ 의 모든
실근의 개수를 a_n 이라 하자. $\sum_{n=1}^{20} a_n$ 의 값을 구하면? [3점]

- ① 400 ② 410 ③ 420 ④ 430 ⑤ 440

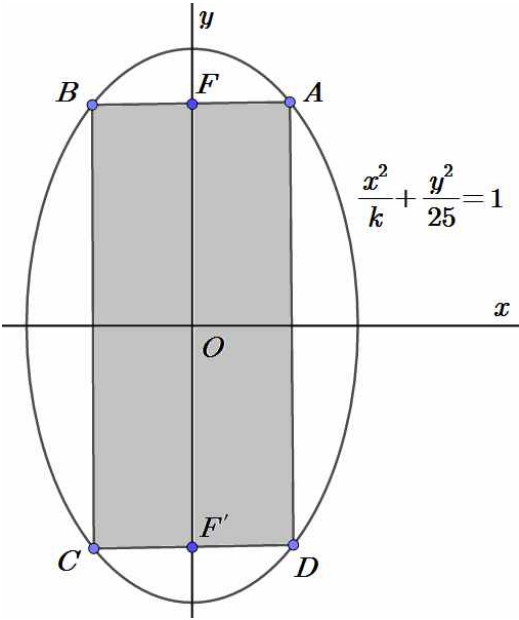
12. 방정식 $x + y + z + w = 10$ 을 만족시키는 자연수 x, y, z, w 의
순서쌍 (x, y, z, w) 중에서 x 가 3 의 배수인 순서쌍의
개수는? [3점]

- ① 9 ② 18 ③ 27 ④ 36 ⑤ 45

13. 어느 세 점도 한 직선 위에 있지 않은 네 점 O, A, B, C 에 대하여 삼각형 OAC 의 무게중심 G 가 선분 AB 위에 있다. 실수 a, b 에 대하여 $\overrightarrow{OC} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB}$ 일 때, $a+b$ 의 값은? [3점]

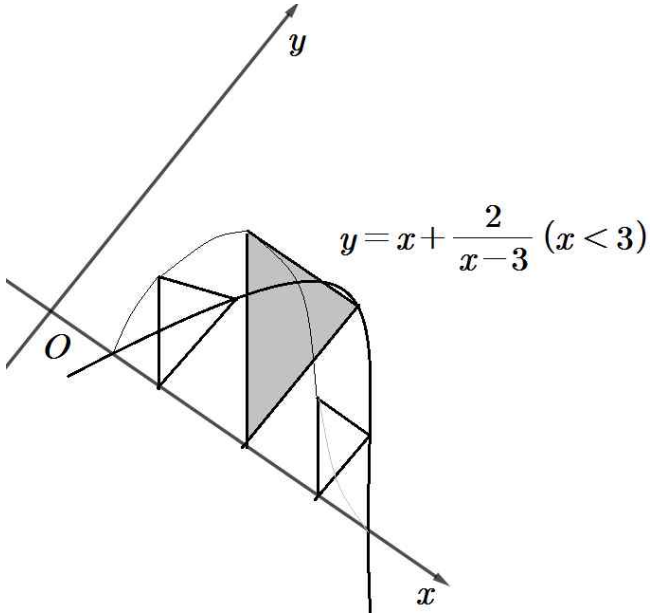
- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

14. 그림과 같이 두 초점이 $F(0, c), F'(0, -c)$ 인 타원 $\frac{x^2}{k} + \frac{y^2}{25} = 1$ ($0 < k < 25$)이 있다. 점 F 을 지나고 y 축에 수직인 직선이 타원과 제1사분면에서 만나는 점을 A , 제2사분면에서 만나는 점을 B 라 하고 점 F' 을 지나고 y 축에 수직인 직선이 타원과 제3사분면에서 만나는 점을 C , 제4사분면의 점과 만나는 점을 D 라 하자. 사각형 $ABCD$ 의 둘레의 길이가 24일 때, 사각형 $ABCD$ 의 넓이를 구하면? [4점]



- ① $10\sqrt{5}$ ② 25 ③ 30 ④ $30 + \sqrt{5}$ ⑤ $30 + 2\sqrt{5}$

15. 그림과 같이 곡선 $y = x + \frac{2}{x-3}$ ($x < 3$)와 x 축으로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정삼각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [4점]



- ① $\left(\frac{25}{3} - 3\ln 2\right)\sqrt{3}$ ② $\left(\frac{23}{12} - 2\ln 2\right)\sqrt{3}$ ③ $\left(\frac{5}{3} - 3\ln 2\right)\sqrt{3}$
 ④ $\left(\frac{25}{12} - 3\ln 2\right)\sqrt{3}$ ⑤ $\left(\frac{29}{12} - 4\ln 2\right)\sqrt{3}$

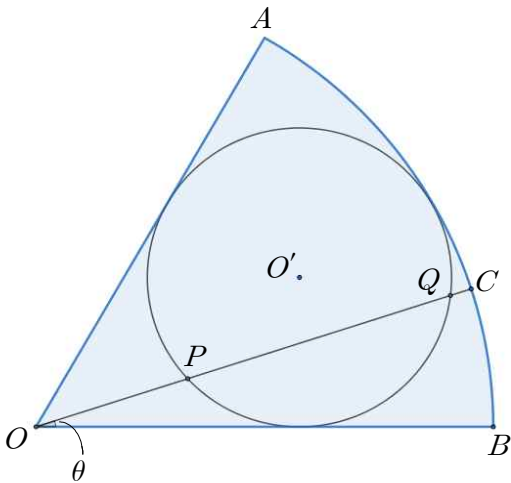
16. 최고차항의 계수가 1이고 역함수가 존재하는 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x 에 대하여
 $f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = 4x^3 + 3x^2 + 6x + 4$
 (나) $f'(0)g'(0) = 3$

두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 의 역함수를 각각 $h(x)$, $k(x)$ 라 할 때, $h'(1) \times k'(1)$ 의 값으로 가능한 모든 값의 합은? [4점]

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{5}{12}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{7}{12}$

17. 그림과 같이 반지름의 길이가 3이고 $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$ 인 부채꼴 AOB에 내접하는 원을 O' 이라 하자. 호 AB위의 한 점 C에 대하여 $\angle COB = \theta \left(0 < \theta < \frac{\pi}{3}\right)$ 일 때, 원 O' 과 $\overline{OC}$ 가 만나는 두 점을 P, Q라 하자. $\lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\overline{PQ}^2}{\theta}$ 의 값을 구하면?



- ① 8 ② $8\sqrt{2}$ ③ $8\sqrt{3}$ ④ $16\sqrt{2}$ ⑤ $16\sqrt{3}$

18. 다음은 $1 \sim n$ 까지 연속된 자연수에서 k 개의 연속되지 않는 자연수를 선택하는 방법의 수를 구하는 과정이다.
(단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않는 최대 정수다.)

(i) 모양이 같은 공 n 개에서 파란공 k 개와 빨간공 $n-k$ 개가 있다고 생각하자.

(ii) 우선 빨간공 $n-k$ 개를 일렬로 나열한다.
이때 발생하는 경우의 수는 $\boxed{\text{가}}$ 가지다.

(iii) 나열된 빨간공 사이에 파란공 k 개가 이웃하지 않게 들어갈수 있는 곳은 $n-k+1$ 개다.

(iv) 따라서 n 개의 공($n-k$ 개의 빨간공과 k 개의 파란공)을 일렬로 나열할 때 파란공 k 개가 이웃하지 않는 경우의 수는 $\boxed{\text{나}}$ 이다.

(v) 나열된 공에 처음으로 차례대로 $1, 2, 3, \dots, n$ 을 적는다.

(vi) 다시 문제로 돌아가서 $1 \sim n$ 까지 연속된 자연수는 빨간공과 파란공의 총 개수가 되고 k 개의 연속되지 않는 자연수는 빨간공 사이에 들어간 이웃하지 않는 파란공이 된다.
따라서 다음은 $1 \sim n$ 까지 연속된 자연수에서 k 개의 연속되지 않는 자연수를 선택하는 방법의 수는 $\boxed{\text{다}}$ 이다.

이때, k 는 $k \leq \boxed{\text{다}}$ 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수와 식을 각각 $a, f(n, k), g(n)$ 라 할 때, $a + f(10, 4) + g(19)$ 의 값은? [4점]

- ① 34 ② 38 ③ 42 ④ 46 ⑤ 50

19. 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $f(x)$ 와 $g(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

$$\begin{aligned} & \text{(가) 양의 실수 } x \text{에 대하여 } f'(x) > 0, \\ & \quad \ln\{g(x)\}f'(x) = 8x^2(\ln x - 3\ln 2) \\ & \text{(나) } f\left(\frac{1}{2}\right) = 1, f(1) = 8 \end{aligned}$$

이때, $\int_1^8 \frac{g(1)f(x)}{4f'(g(x))g(x)} dx$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{511}{9} - \ln 2$ ② $\frac{511}{9}$ ③ $2\ln 2 - \frac{511}{9}$
 ④ $\frac{511}{3} - 2\ln 2$ ⑤ $7\ln 2$

20. 좌표평면 위를 움직이는 점 P 의 시각 t 에서의 좌표는 $(t, 0)$ 이다. 곡선 $y = xe^{-x}$ 위의 점 $Q(x, y)$ 는 점 P 와 거리를 $\sqrt{2}e$ 를 유지하며 움직인다. 다음 중 옳은 것을 고른 것은?

[4점]

| 보 기 |

- ㄱ. $t = \sqrt{2}e$ 일 때 $\frac{dy}{dx} > 0$ 인 Q 의 좌표는 $(0, 0)$ 이다.
 ㄴ. $\frac{dy}{dx} < 0$ 인 Q 가 두 개 존재하기 위한 t 범위는 $t > \frac{\sqrt{2e^4 - 1}}{e}$ 이다.
 ㄷ. $t = e - 1$ 일 때, $\frac{dy}{dx} > 0$ 인 점 Q 의 속도는 $\left(\frac{1}{2e+1}, \frac{2e}{2e+1}\right)$ 이다. (단, Q 의 x 좌표는 정수이다.)

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x)=\lim_{n\rightarrow\infty}\int_0^{2n\pi}\left(\frac{a\sin t+b\cos t}{e^{xt}}\right)dt$$

가 $x=1$ 에서 극댓값 1을 가질 때, $a+b$ 의 값은?
(단, n 은 자연수이고 a, b 는 상수이다.) [4점]

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

단답형

22. 방정식 $\left(\frac{1}{2}\right)^{5-x}=16$ 를 만족시키는 실수 x 의 값을
구하시오. [3점]

23. ${}_3H_n=36$ 일 때, 자연수 n 의 값을 구하시오. [3점]

24. 함수 $f(x) = \log_3 x$ 와 그 역함수 $g(x)$ 에 대하여

$$g(1) = f(a) + f(b) - f(c)$$

가 성립할 때, $\frac{ab}{c}$ 의 값을 구하시오. (단, a, b, c 는 양수이다.)

[3점]

25. 두 함수 $f(x) = 4x^2 - 2x$, $g(x) = e^{kx} + 1$ 이 있다. 함수

$h(x) = (f \circ g)(x)$ 에 대하여 $h'(0) = 28$ 일 때, 상수 k 의 값을 구하시오.

[3점]

26. 서로 다른 연필 6개를 서로 다른 3개의 필통 A, B, C에 남김없이 넣으려고 할 때, 각 필통에 연필을 적어도 1개 이상 넣는 경우의 수를 구하시오.

[4점]



27. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가

$$f(x)=-\sin x+\int_0^{\pi}tf'(t)dt$$

를 만족시킬 때, $f\left(\frac{3}{2}\pi\right)$ 의 값을 구하시오.

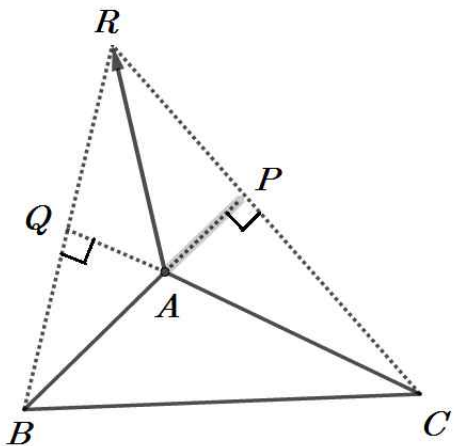
[4점]

28. $y_1=8$ 이고, 자연수 n 에 대하여 포물선 $y^2=8x$ 위의 점 (x_{2n-1}, y_{2n-1}) 에서의 접선의 y 절편을 y_{2n} 이라 하자. 직선 $y=y_{2n}$ 이 포물선 $y^2=-8x$ 와 만나는 점의 좌표를 (x_{2n}, y_{2n}) 이라 하고 (x_{2n}, y_{2n}) 에서의 접선의 y 절편을 y_{2n+1} , $y=y_{2n+1}$ 이 $y^2=8x$ 와 만나는 점의 좌표를 (x_{2n+1}, y_{2n+1}) 이라 하자. 두 수열 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}5x_n+\sum_{n=1}^{\infty}y_n$ 의 값을 구하시오.

[4점]

29. 그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=6$, $\overline{BC}=8$ 인 삼각형 ABC 가 있다. 점 B 에서 선분 AC 의 연장선에 내린 수선의 발을 Q , 점 C 에서 선분 AB 의 연장선에 내린 수선의 발을 P 라 하고 두 직선 BQ 와 CP 가 만나는 점을 R 라 하자.

$\overrightarrow{AR}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$ 일 때, $\frac{21n}{m}$ 의 값을 구하시오. (단, m, n 은 상수이다.) [4점]



30. 다음 조건을 만족하는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 실수 전체에서 미분 가능한 함수 $g(x)$ 가

$$g(x)=\begin{cases} \frac{kx}{2+f(x)} & (x>0) \\ -f(-x) & (x\leq 0) \end{cases} \text{ 이다.}$$

부등식 $(f(x)-x+2)\left(f\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}+2\right)\leq 0$ 의 해집합은 $\{1\}$ 이다.

$g(x)$ 의 최댓값을 M 이라 할 때,

$$\int_{g'(-1)}^k \{xg(x)\}dx - \int_{g(-1)}^M \{g(x)\}dx = \alpha \text{ 이다.}$$

e^α 의 값을 구하시오. [4점]

* 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.