공부하다

박수칠 수학

기본서

박상칠 지음

기하와 벡터

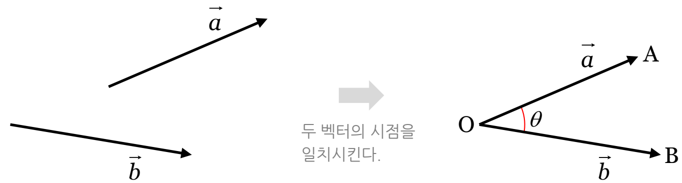
§3. 평면벡터의 내적

p.77 ~ 93에서 공부했던 벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배에 이어 벡터의 내적에 대해 알아보자. 먼저 벡터의 내적은 다음과 같이 정의된다.

벡터의 내적

• 두 벡터가 이루는 각의 크기

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$가 되도록 세 점 O, A, B를 잡을 때, $\angle\mathrm{AOB}=\theta\,(0\le\theta\le\pi)$를 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기라고 한다.



• 벡터의 내적

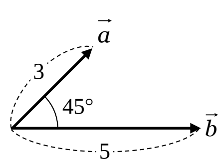
영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 $\theta\,(0\le\theta\le\pi)$일 때, $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$를 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 내적이라고 하며, 기호 $\vec{a}\bullet\vec{b}$로 나타낸다.

$$\boldsymbol{\vec{a}\bullet\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta}$$

또한 $\vec{a}=\vec{0}$ 또는 $\vec{b}=\vec{0}$일 때는 $\vec{a}\bullet\vec{b}=0$으로 정의한다.

[예] 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 크기가 각각 3, 5이고,
두 벡터가 이루는 각의 크기가 45°일 때

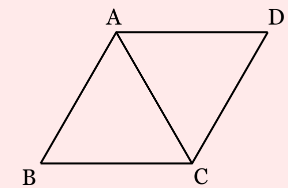
$$\vec{a}\bullet\vec{b}=3\times5\times\cos45^\circ=\frac{15\sqrt{2}}{2}$$



예제1 한 변의 길이가 2인 두 정삼각형 ABC, ACD를 붙여서 오른쪽 그림과 같은 마름모 ABCD를 만들었을 때, 다음의 값을 구하시오.

(1) $\overrightarrow{\mathrm{BA}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{BD}}$　　(2) $\overrightarrow{\mathrm{BC}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{CD}}$

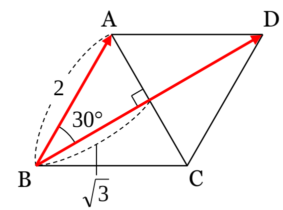
(3) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{BD}}$



풀이 (1) 마름모에서는 두 대각선이 직교하므로 $\overline{\mathrm{AC}}\perp\overline{\mathrm{BD}}$이다. 따라서

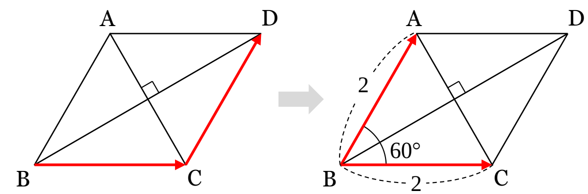
$\angle\mathrm{ABD}=30^\circ$, $|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|=2$, $|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|=2\sqrt{3}$

$\overrightarrow{\mathrm{BA}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{BD}}=2\times2\sqrt{3}\times\cos30^\circ=6$



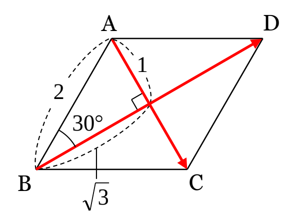
(2) $\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{BC}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{BA}}=2\times2\times\cos60^\circ=2$



(3) $\overline{\mathrm{AC}}\perp\overline{\mathrm{BD}}$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BD}}$이다. 따라서

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{BD}}=2\times2\sqrt{3}\times\cos90^\circ=0$



또한 벡터의 내적의 부호는 내적에 포함된 두 벡터가 이루는 각의 크기에 따라 다음과 같이 변한다.

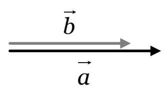
벡터의 내적의 부호

• 두 벡터가 이루는 각과 내적의 부호

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 $\theta\,(0 \le \theta \le \pi)$일 때, θ의 변화에 따른 두 벡터의 내적 $\vec{a} \bullet \vec{b}$의 부호 변화는 다음과 같다.

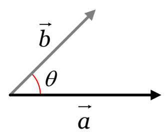
(1) $\theta = 0$일 때

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 0 = |\vec{a}||\vec{b}| > 0$$



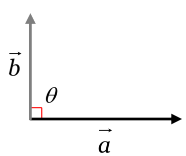
(2) $0 < \theta < 90°$일 때

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta > 0$$



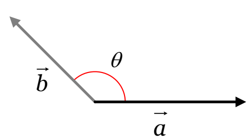
(3) $\theta = 90°$일 때

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 90° = 0$$



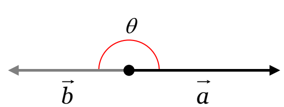
(4) $90° < \theta < 180°$일 때

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta < 0$$



(5) $\theta = 180°$일 때

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 180° = -|\vec{a}||\vec{b}| < 0$$



★ (1)에서 $\vec{b}$를 $\vec{a}$로 바꾸면 $\vec{a} \bullet \vec{a} = |\vec{a}||\vec{a}|\cos 0 = |\vec{a}|^2$이 성립한다. 따라서 같은 벡터끼리의 내적은 (벡터의 크기)^{2}과 같음을 알 수 있다.

(1), (3), (5)로부터 두 벡터가 수직 또는 평행할 조건을 내적으로 표현하면 다음과 같다.

• 두 벡터의 수직 조건

▹ 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 (3)과 같이 직각일 때, 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$는 서로 수직이라고 하며 기호 $\vec{a} \perp \vec{b}$로 나타낸다.

▹ (3)으로부터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 수직이면 $\vec{a} \bullet \vec{b} = 0$이고, 그 역도 성립하기 때문에 다음과 같이 표현할 수 있다.

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \bullet \vec{b} = 0$$

• 두 벡터의 평행 조건

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 평행하면 두 벡터가 이루는 각의 크기는 $0°$ 또는 $180°$이다. $0°$일 때는 (1)과 같이 $\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|$가 성립하고, $180°$일 때는 (5)와 같이 $\vec{a} \bullet \vec{b} = -|\vec{a}||\vec{b}|$가 성립한다. 따라서 다음과 같이 표현할 수 있다.

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여

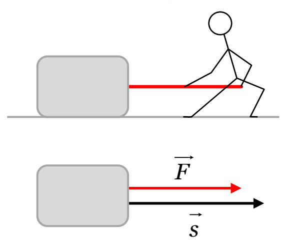
$$\vec{a} /\!/ \vec{b} \iff \vec{a} \bullet \vec{b} = \pm|\vec{a}||\vec{b}|$$

벡터의 내적의 의미를 이해하기 위해 힘이 물체에 한 일의 양을 벡터의 내적으로 표현해보자.

물체에 힘을 가해서 물체를 이동시켰을 때, 힘이 물체에 한 일의 양은 물체의 이동 방향으로의 힘의 크기와 물체의 이동거리의 곱으로 표현된다.

예를 들어 〈그림1〉과 같이 물체에 가한 힘의 방향과 크기를 나타내는 벡터가 $\vec{F}$, 물체의 이동 방향과 거리를 나타내는 벡터가 $\vec{s}$이고, 두 벡터의 방향이 같다면 일의 양은 $|\vec{F}||\vec{s}|$가 된다.

〈그림1〉

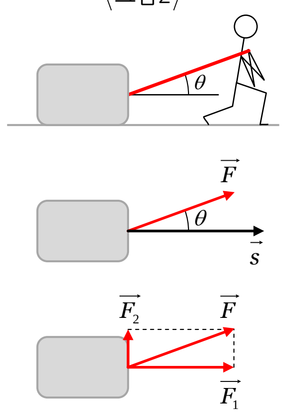


또한 두 벡터 $\vec{F}$, $\vec{s}$가 이루는 각이 0이므로 일의 양은 다음과 같이 두 벡터의 내적으로 표현할 수 있다.

$$|\vec{F}||\vec{s}| = |\vec{F}||\vec{s}|\cos 0 = \vec{F} \bullet \vec{s}$$

그렇다면 물체에 가한 힘의 방향과 물체의 이동 방향이 평행하지 않을 때는 일의 양이 어떻게 표현될까?

〈그림2〉



〈그림2〉와 같이 물체에 가한 힘의 방향과 크기를 나타내는 벡터가 $\vec{F}$, 물체의 이동 방향과 거리를 나타내는 벡터가 $\vec{s}$이고, 두 벡터가 이루는 각이 θ라고 하자.

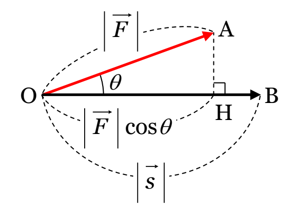
그리고 벡터 $\vec{F}$를 수평면에 평행한 벡터 $\vec{F_1}$과 수평면에 수직인 벡터 $\vec{F_2}$로 분해하면 $\vec{F_2}$는 물체의 이동 방향에 수직이기 때문에 물체의 이동에 영향을 주지 못하고, $\vec{F_1}$이 실제로 물체를 이동시키는 힘이라고 할 수 있다.

따라서 힘 $\vec{F}$가 한 일의 양은 물체의 이동 방향으로의 힘 $\vec{F_1}$이 한 일의 양 $|\vec{F_1}||\vec{s}|$와 같고, $|\vec{F_1}| = |\vec{F}|\cos\theta$임을 이용해서 일의 양을 두 벡터 $\vec{F}$, $\vec{s}$의 내적으로 표현하면 다음과 같다.

$$|\vec{F_1}||\vec{s}| = \left(|\vec{F}|\cos\theta\right)|\vec{s}| = |\vec{F}||\vec{s}|\cos\theta = \vec{F} \bullet \vec{s}$$

여기서 두 벡터 $\vec{F}$, $\vec{s}$의 내적 $\vec{F} \bullet \vec{s}$를 다음과 같이 이해할 수도 있다.

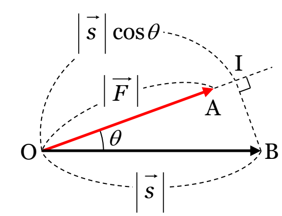
〈그림3〉



〈그림3〉과 같이 $\vec{F} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{s} = \overrightarrow{OB}$가 되도록 세 점 O, A, B를 잡고, 점 A에서 $\overline{OB}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\vec{F} \bullet \vec{s}$는 다음과 같이 변형된다.

$$\vec{F} \bullet \vec{s} = |\vec{F}||\vec{s}|\cos\theta = |\vec{s}|\left(|\vec{F}|\cos\theta\right)$$
$$= \overline{OB} \times \overline{OH}$$

〈그림4〉



마찬가지로 〈그림4〉와 같이 점 B에서 $\overline{OA}$의 연장선에 내린 수선의 발을 I라 하면 $\vec{F} \bullet \vec{s}$는 다음과 같이 변형된다.

$$\vec{F} \bullet \vec{s} = |\vec{F}||\vec{s}|\cos\theta = |\vec{F}|\left(|\vec{s}|\cos\theta\right)$$
$$= \overline{OA} \times \overline{OI}$$

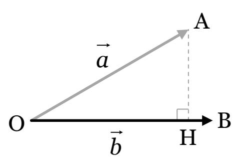
〈그림3〉에서 $\overline{OH}$는 $\vec{F}$의 $\vec{s}$ 위로의 정사영의 길이와 같고, 〈그림4〉에서 $\overline{OI}$는 $\vec{s}$의 $\vec{F}$ 위로의 정사영의 길이와 같다. (정사영의 의미는 p.201 참고)
그러므로 두 벡터 $\vec{F}$, $\vec{s}$의 내적은 한 벡터의 크기와 다른 벡터의 그 벡터 위로의 정사영의 길이를 곱한 것과 같다.

벡터의 내적과 정사영

• 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$가 되도록 세 점 O, A, B를 잡을 때, 두 벡터의 내적 $\vec{a}\bullet\vec{b}$는 다음과 같이 계산할 수 있다.

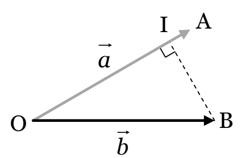
$$\vec{a}\bullet\vec{b}=|\vec{a}|\times(\vec{b}\text{의 }\vec{a}\text{ 위로의 정사영의 길이})$$
$$=|\vec{b}|\times(\vec{a}\text{의 }\vec{b}\text{ 위로의 정사영의 길이})$$

(단, $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각이 둔각이면 결과에 (–) 추가)



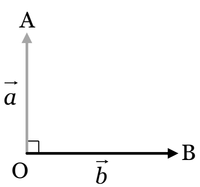
점 A에서 벡터 $\vec{b}$에 내린 수선의 발이 H일 때,

$\vec{a}\bullet\vec{b}=\overline{\mathrm{OB}}\times\overline{\mathrm{OH}}$



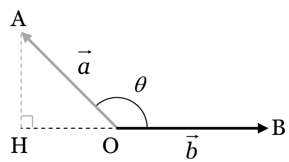
점 B에서 벡터 $\vec{a}$에 내린 수선의 발이 I일 때,

$\vec{a}\bullet\vec{b}=\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{OI}}$



$\angle\mathrm{AOB}=90°$일 때 점 A에서 벡터 $\vec{b}$에 내린 수선의 발이 O이므로

$\vec{a}\bullet\vec{b}=\overline{\mathrm{OB}}\times\overline{\mathrm{OO}}=0$

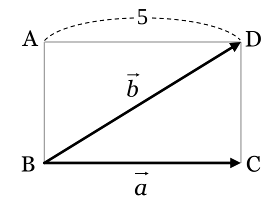


$\angle\mathrm{AOB}=\theta$가 둔각일 때, $\cos\theta<0$이므로 $\vec{a}\bullet\vec{b}<0$가 되어야 한다. 그러므로 점 A에서 벡터 $\vec{b}$의 연장선에 내린 수선의 발이 H라면

$\vec{a}\bullet\vec{b}=-\overline{\mathrm{OB}}\times\overline{\mathrm{OH}}$

[예] 오른쪽 그림과 같이 긴 변의 길이가 5인 직사각형 ABCD에서 $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{BD}}$로 두자. 이때, 점 D에서 $\vec{a}$로 내린 수선의 발이 C이므로 $\vec{b}$의 $\vec{a}$ 위로의 정사영의 길이는 $\overline{\mathrm{BC}}$이고, $\vec{a}\bullet\vec{b}$의 값은 다음과 같다.

$\vec{a}\bullet\vec{b}=\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{BC}}=25$

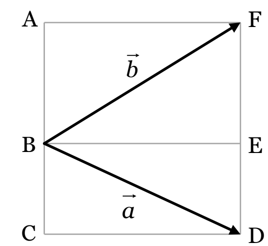


★ 벡터의 내적을 정사영으로 계산할 때, 다음과 같이 정사영끼리 곱하지 않도록 주의한다.

오른쪽 그림과 같이 변 BE를 공유하는 두 직사각형 ABEF, BCDE가 있다.

$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{BD}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{BF}}$로 두면 $\vec{a}$의 $\overline{\mathrm{BE}}$로의 정사영과 $\vec{b}$의 $\overline{\mathrm{BE}}$로의 정사영이 모두 $\overrightarrow{\mathrm{BE}}$이므로

$\cancel{\vec{a}\bullet\vec{b}=\overline{\mathrm{BE}}\times\overline{\mathrm{BE}}=\overline{\mathrm{BE}}^2}$ ……… ①



∵ $\angle\mathrm{DBE}=\alpha$, $\angle\mathrm{FBE}=\beta$로 두면 벡터의 내적의 정의로부터

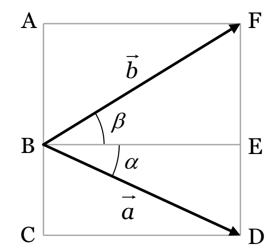
$\vec{a}\bullet\vec{b}=\overline{\mathrm{BD}}\times\overline{\mathrm{BF}}\times\cos(\alpha+\beta)$ …… ②

이고, ①은

$\overline{\mathrm{BE}}\times\overline{\mathrm{BE}}=\overline{\mathrm{BD}}\cos\alpha\times\overline{\mathrm{BF}}\cos\beta$

$=\overline{\mathrm{BD}}\times\overline{\mathrm{BF}}\times\cos\alpha\cos\beta$

이므로 ①과 ②가 일치한다고 할 수 없다.

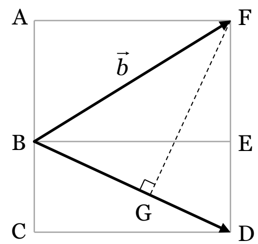


벡터의 내적을 정사영으로 계산하려면 다음과 같이 한 벡터와 그 벡터의

다른 벡터로의 정사영을 곱해야 한다.

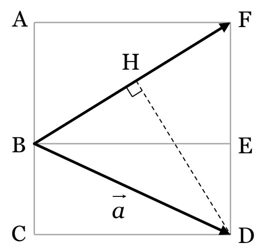
오른쪽 그림과 같이 점 F에서 $\overline{\mathrm{BD}}$에 내린 수선의 발이 G라면

$\vec{a} \bullet \vec{b} = \overline{\mathrm{BD}} \times \overline{\mathrm{BG}}$



오른쪽 그림과 같이 점 D에서 $\overline{\mathrm{BF}}$에 내린 수선의 발이 H라면

$\vec{a} \bullet \vec{b} = \overline{\mathrm{BF}} \times \overline{\mathrm{BH}}$

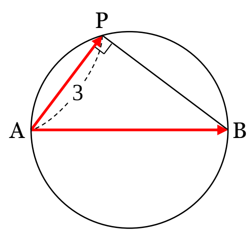


예제2 $\overline{\mathrm{AB}}$를 지름으로 하는 원 위의 한 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}=3$일 때, 내적 $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AP}}$의 값을 구하시오.

풀이 i) 점 P가 두 점 A, B 사이에 있을 때

$\overline{\mathrm{AB}}$가 원의 지름이므로 $\angle\mathrm{APB}=90°$이고, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$의 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$로의 정사영의 길이는 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$의 길이와 같다. 따라서

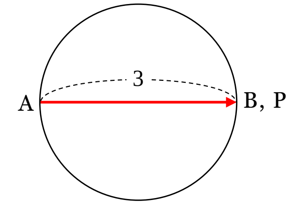
$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{AP}} \times \overline{\mathrm{AP}} = 3 \times 3 = 9$



ii) 점 P가 점 B와 일치할 때

$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right| = 3$이고, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$가 이루는 각의 크기가 0이므로

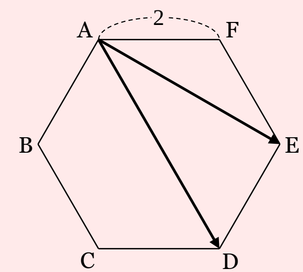
$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AP}} = 3 \times 3 \times \cos 0 = 9$



i), ii)로부터 $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AP}} = 9$

[2009학년도 10월 학평 가형 #19]

예제3 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정육각형 ABCDEF가 있다. 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$의 내적 $\overrightarrow{\mathrm{AD}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AE}}$의 값을 구하시오.



풀이 정육각형의 한 내각의 크기가 120°이고, 삼각형 AEF가 이등변삼각형이므로 선분 AE의 중점을 G라 하면 다음이 성립한다.

$\angle\mathrm{AFG} = \angle\mathrm{EFG} = 60°$

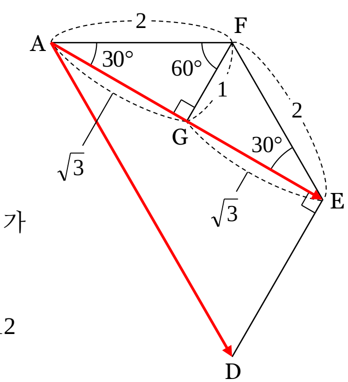
$\angle\mathrm{FAG} = \angle\mathrm{FEG} = 30°$

$\angle\mathrm{AED} = 90°$

$\overline{\mathrm{FG}} = 1,\ \overline{\mathrm{AG}} = \overline{\mathrm{EG}} = \sqrt{3}$

그리고 $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$의 $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$로의 정사영의 길이가 $\overline{\mathrm{AE}}$의 길이와 같으므로

$\overrightarrow{\mathrm{AD}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AE}} = \overline{\mathrm{AE}} \times \overline{\mathrm{AE}} = 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} = 12$



성분으로 표시된 평면벡터의 내적을 계산하는 방법을 알아보자.

성분으로 표시된 평면벡터의 내적

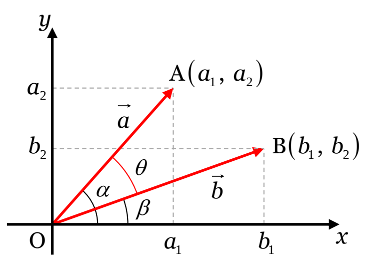
• 두 벡터 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$의 내적 $\vec{a}\bullet\vec{b}$는 다음과 같이 계산된다.

$$\boldsymbol{\vec{a}\bullet\vec{b}=(a_1,\ a_2)\bullet(b_1,\ b_2)=a_1b_1+a_2b_2}$$

(x성분끼리의 곱)+(y성분끼리의 곱)

$\because\ \vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$라고 가정하고, $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$로 두면 두 점 A, B의 좌표는 각각 (a_1, a_2), (b_1, b_2)가 된다. 그리고 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β, $\vec{a}$와 $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 θ로 두자.

$i)$ $\alpha>\beta$일 때



$\left|\overline{\mathrm{OA}}\right|=\left|\vec{a}\right|$, $\left|\overline{\mathrm{OB}}\right|=\left|\vec{b}\right|$이므로 다음이 성립한다.

$$\cos\alpha=\frac{a_1}{\left|\vec{a}\right|},\ \sin\alpha=\frac{a_2}{\left|\vec{a}\right|}\ \Rightarrow\ a_1=\left|\vec{a}\right|\cos\alpha,\ a_2=\left|\vec{a}\right|\sin\alpha$$

$$\cos\beta=\frac{b_1}{\left|\vec{b}\right|},\ \sin\beta=\frac{b_2}{\left|\vec{b}\right|}\ \Rightarrow\ b_1=\left|\vec{b}\right|\cos\beta,\ b_2=\left|\vec{b}\right|\sin\beta$$

따라서 두 벡터의 내적 $\vec{a}\bullet\vec{b}$는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\vec{a}\bullet\vec{b}&=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos(\alpha-\beta)\\&=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)\\&=\left|\vec{a}\right|\cos\alpha\left|\vec{b}\right|\cos\beta+\left|\vec{a}\right|\sin\alpha\left|\vec{b}\right|\sin\beta\\&=a_1b_1+a_2b_2\end{aligned}$$

$ii)$ $\alpha<\beta$일 때

$\theta=\beta-\alpha$로 두고 $i)$과 같은 방법을 적용하면 $\vec{a}\bullet\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$임을 보일 수 있다.

$iii)$ $\alpha=\beta$일 때

$\theta=0$, $\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$이므로

$\vec{b}=k\vec{a}$ (단, $k>0$)

$\left|\vec{b}\right|=\left|k\vec{a}\right|=k\left|\vec{a}\right|=k\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2}$

$\vec{a}\bullet\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos0=\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2}\times k\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2}\times1=k\left({a_1}^2+{a_2}^2\right)$

이다. 그리고 $\vec{b}=k\vec{a}\ \Rightarrow\ (b_1,\ b_2)=(ka_1,\ ka_2)$로부터

$a_1b_1+a_2b_2=a_1(ka_1)+a_2(ka_2)=k\left({a_1}^2+{a_2}^2\right)$

이므로 $\vec{a}\bullet\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$가 성립한다.

$i)\sim iii)$으로부터 α, β의 대소에 관계없이 $\vec{a}\bullet\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$가 성립함을 알 수 있다.

또한 $\vec{a}=\vec{0}$ 또는 $\vec{b}=\vec{0}$일 때는 $\vec{a}\bullet\vec{b}=0$으로 정의되고, $(a_1,\ a_2)=(0,\ 0)$ 또는 $(b_1,\ b_2)=(0,\ 0)$으로부터 $a_1b_1+a_2b_2=0$이므로 $\vec{a}\bullet\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$가 성립한다.

[예] $\vec{a}=(2,3)$, $\vec{b}=(0,1)$일 때, $\vec{a}\bullet\vec{b}=(2,3)\bullet(0,1)=2\times0+3\times1=3$

예제4 좌표평면 위의 네 점 $A(-1,2)$, $B(-2,-3)$, $C(2,-1)$, $D(3,1)$에 대하여 다음의 값을 각각 구하시오.

(1) $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{DC}$ (2) $\overrightarrow{AC}\bullet\overrightarrow{BD}$

풀이 문제에 포함된 벡터를 성분으로 표현하면 각각 다음과 같다.

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(-2,-3)-(-1,2)=(-1,-5)$

$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=(2,-1)-(3,1)=(-1,-2)$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(2,-1)-(-1,2)=(3,-3)$

$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}=(3,1)-(-2,-3)=(5,4)$

따라서 문제에 주어진 내적의 값은 다음과 같이 계산된다.

(1) $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{DC}=(-1,-5)\bullet(-1,-2)=(-1)\times(-1)+(-5)\times(-2)=11$

(2) $\overrightarrow{AC}\bullet\overrightarrow{BD}=(3,-3)\bullet(5,4)=3\times5+(-3)\times4=3$

예제5 두 벡터 $\vec{a}=(2x,-3)$, $\vec{b}=(x-2,2)$에 대하여 다음을 만족시키는 실수 x의 값을 각각 구하시오.

(1) $\vec{a}\perp\vec{b}$ (2) $(\vec{a}+\vec{b})\perp(\vec{a}-\vec{b})$

★ p.113 「두 벡터의 수직 조건」에서와 같이 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\bullet\vec{b}=0$임을 이용한다.

풀이 (1) $\vec{a}\bullet\vec{b}=0$이 $\vec{a}\perp\vec{b}$이기 위한 필요충분조건이므로 $\vec{a}\bullet\vec{b}=0$을 만족시키는 x의 값을 구하면 된다. 따라서

$\vec{a}\bullet\vec{b}=(2x,-3)\bullet(x-2,2)=2x^2-4x-6=2(x+1)(x-3)=0$

$x=-1$ 또는 $x=3$

(2) $(\vec{a}+\vec{b})\bullet(\vec{a}-\vec{b})=0$이 $(\vec{a}+\vec{b})\perp(\vec{a}-\vec{b})$이기 위한 필요충분조건이므로 $(\vec{a}+\vec{b})\bullet(\vec{a}-\vec{b})=0$을 만족시키는 x의 값을 구하면 된다. 따라서

$$(\vec{a}+\vec{b})\bullet(\vec{a}-\vec{b})=(3x-2,-1)\bullet(x+2,-5)$$
$$=3x^2+4x+1=(3x+1)(x+1)=0$$

$x=-1$ 또는 $x=-\frac{1}{3}$

평면벡터의 내적의 연산법칙

• 세 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$와 실수 k에 대하여 다음이 항상 성립한다.

(1) 교환법칙

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{b} \bullet \vec{a}$$

(2) 분배법칙

$$\vec{a} \bullet \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{a} \bullet \vec{c}$$

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \bullet \vec{c} = \vec{a} \bullet \vec{c} + \vec{b} \bullet \vec{c}$$

(3) 결합법칙

$$\left(k\vec{a}\right) \bullet \vec{b} = \vec{a} \bullet \left(k\vec{b}\right) = k\left(\vec{a} \bullet \vec{b}\right)$$

$\because \vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$, $\vec{c} = (c_1, c_2)$라고 가정하면

(1) $\vec{a} \bullet \vec{b} = (a_1, a_2) \bullet (b_1, b_2) = a_1b_1 + a_2b_2 = b_1a_1 + b_2a_2$

$= (b_1, b_2) \bullet (a_1, a_2) = \vec{b} \bullet \vec{a}$

(2) $\vec{a} \bullet \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = (a_1, a_2) \bullet (b_1 + c_1, b_2 + c_2) = a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2)$

$= (a_1b_1 + a_1c_1) + (a_2b_2 + a_2c_2) = (a_1b_1 + a_2b_2) + (a_1c_1 + a_2c_2)$

$= \vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{a} \bullet \vec{c}$

$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \bullet \vec{c} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \bullet (c_1, c_2) = (a_1 + b_1)c_1 + (a_2 + b_2)c_2$

$= (a_1c_1 + b_1c_1) + (a_2c_2 + b_2c_2) = (a_1c_1 + a_2c_2) + (b_1c_1 + b_2c_2)$

$= \vec{a} \bullet \vec{c} + \vec{b} \bullet \vec{c}$

(3) $\left(k\vec{a}\right) \bullet \vec{b} = (ka_1, ka_2) \bullet (b_1, b_2) = (ka_1)b_1 + (ka_2)b_2 = a_1(kb_1) + a_2(kb_2)$

$= (a_1, a_2) \bullet (kb_1, kb_2) = \vec{a} \bullet \left(k\vec{b}\right)$

$\left(k\vec{a}\right) \bullet \vec{b} = (ka_1, ka_2) \bullet (b_1, b_2) = (ka_1)b_1 + (ka_2)b_2 = k(a_1b_1 + a_2b_2)$

$= k\left(\vec{a} \bullet \vec{b}\right)$

예제6 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$이고, $\left|\vec{a}\right| = 3$, $\left|\vec{b}\right| = 4$일 때, 다음을 구하시오.

(1) $\left(3\vec{a}\right) \bullet \left(-2\vec{b}\right)$ (2) $\left(4\vec{a}\right) \bullet \left(\vec{a} + 3\vec{b}\right)$ (3) $\left(5\vec{a} + 3\vec{b}\right) \bullet \left(\vec{a} - 2\vec{b}\right)$

★ $\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{b} \bullet \vec{a} = 3 \times 4 \times \cos\frac{\pi}{3} = 6$과 내적의 연산법칙을 이용해서 계산하면 다음과 같다.

풀이 (1) $\left(3\vec{a}\right) \bullet \left(-2\vec{b}\right) = 3\left\{\vec{a} \bullet \left(-2\vec{b}\right)\right\} = \{3 \times (-2)\}\left(\vec{a} \bullet \vec{b}\right) = (-6) \times 6 = -36$

(2) $\left(4\vec{a}\right) \bullet \left(\vec{a} + 3\vec{b}\right) = \left(4\vec{a}\right) \bullet \vec{a} + \left(4\vec{a}\right) \bullet \left(3\vec{b}\right) = 4\left(\vec{a} \bullet \vec{a}\right) + (4 \times 3)\left(\vec{a} \bullet \vec{b}\right)$

$= 4\left|\vec{a}\right|^2 + 12\left(\vec{a} \bullet \vec{b}\right) = 4 \times 3^2 + 12 \times 6 = 108$

(3) $\left(5\vec{a} + 3\vec{b}\right) \bullet \left(\vec{a} - 2\vec{b}\right) = \left(5\vec{a}\right) \bullet \left(\vec{a} - 2\vec{b}\right) + \left(3\vec{b}\right) \bullet \left(\vec{a} - 2\vec{b}\right)$

$= \left(5\vec{a}\right) \bullet \vec{a} + \left(5\vec{a}\right) \bullet \left(-2\vec{b}\right) + \left(3\vec{b}\right) \bullet \vec{a} + \left(3\vec{b}\right) \bullet \left(-2\vec{b}\right)$

$= 5\left(\vec{a} \bullet \vec{a}\right) - 10\left(\vec{a} \bullet \vec{b}\right) + 3\left(\vec{b} \bullet \vec{a}\right) - 6\left(\vec{b} \bullet \vec{b}\right)$

$= 5\left|\vec{a}\right|^2 - 7\left(\vec{a} \bullet \vec{b}\right) - 6\left|\vec{b}\right|^2$

$= 5 \times 3^2 - 7 \times 6 - 6 \times 4^2 = -93$

★ $\vec{a}\bullet\vec{a}=|\vec{a}|^2$ 처럼 같은 벡터끼리의 내적은 (벡터의 크기)^{2}이 된다. 여기에 벡터의 내적에 대한 연산법칙을 추가하면 $|\vec{a}+\vec{b}|^2$을 전개할 수 있다.

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2+2\vec{a}\bullet\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2$$

$\because\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=(\vec{a}+\vec{b})\bullet(\vec{a}+\vec{b})$

$=\vec{a}\bullet(\vec{a}+\vec{b})+\vec{b}\bullet(\vec{a}+\vec{b})$ 두 번째 $(\vec{a}+\vec{b})$를 하나의 벡터로 보고 분배법칙 적용

$=\vec{a}\bullet\vec{a}+\vec{a}\bullet\vec{b}+\vec{b}\bullet\vec{a}+\vec{b}\bullet\vec{b}$ 분배법칙 적용

$=\vec{a}\bullet\vec{a}+2\vec{a}\bullet\vec{b}+\vec{b}\bullet\vec{b}$ 교환법칙 적용

$=\left|\vec{a}\right|^2+2\vec{a}\bullet\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2$

같은 방법으로 다음의 두 등식이 성립함을 증명할 수도 있다.

$$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2-2\vec{a}\bullet\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2$$

$$(\vec{a}+\vec{b})\bullet(\vec{a}-\vec{b})=\left|\vec{a}\right|^2-\left|\vec{b}\right|^2$$

$\because(\vec{a}+\vec{b})\bullet(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}\bullet(\vec{a}-\vec{b})+\vec{b}\bullet(\vec{a}-\vec{b})$

$=\vec{a}\bullet\vec{a}-\vec{a}\bullet\vec{b}+\vec{b}\bullet\vec{a}-\vec{b}\bullet\vec{b}=\left|\vec{a}\right|^2-\left|\vec{b}\right|^2$

★ 평면벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배의 결과는 벡터로 표현되지만, 평면벡터의 내적의 결과는 스칼라로 표현된다. 따라서 $\vec{a}\bullet\vec{b}\bullet\vec{c}$와 같은, 셋 이상의 벡터에 대한 내적은 정의되지 않으며, $\vec{a}\bullet\vec{a}\bullet\vec{a}=\left|\vec{a}\right|^3$도 성립하지 않는다.

예제7 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$이고, $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=\sqrt{3}$일 때, 다음을 구하시오.

(1) $\vec{a}\bullet\vec{b}$ (2) $|\vec{a}-\vec{b}|$ (3) $|\vec{a}+2\vec{b}|$

풀이 (1) $\vec{a}\bullet\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{6}=2\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3$

(2) $|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\bullet\vec{b}+|\vec{b}|^2=2^2-2\times3+(\sqrt{3})^2=1$

$\therefore|\vec{a}-\vec{b}|=1$

(3) $|\vec{a}+2\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\bullet(2\vec{b})+|2\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+4\vec{a}\bullet\vec{b}+4|\vec{b}|^2$

$=2^2+4\times3+4\times(\sqrt{3})^2=28$ $\because|k\vec{a}|^2=(|k||\vec{a}|)^2=k^2|\vec{a}|^2$

$\therefore|\vec{a}+2\vec{b}|=2\sqrt{7}$

예제8 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{a}-\vec{b}|=2\sqrt{3}$을 만족시킬 때, 다음을 구하시오.

(1) $\vec{a}\bullet\vec{b}$ (2) $|\vec{a}+\vec{b}|$ (3) $|3\vec{a}-2\vec{b}|$

풀이 (1) $|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\bullet\vec{b}+|\vec{b}|^2 \Rightarrow (2\sqrt{3})^2=3^2-2\vec{a}\bullet\vec{b}+2^2$

$\therefore\vec{a}\bullet\vec{b}=\frac{1}{2}$

(2) $|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\bullet\vec{b}+|\vec{b}|^2=3^2+2\times\frac{1}{2}+2^2=14$

$\therefore|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{14}$

(3) $\left|3\vec{a}-2\vec{b}\right|^2=\left|3\vec{a}\right|^2-2\left(3\vec{a}\right)\bullet\left(2\vec{b}\right)+\left|2\vec{b}\right|^2=9\left|\vec{a}\right|^2-12\vec{a}\bullet\vec{b}+4\left|\vec{b}\right|^2$

$$=9\times3^2-12\times\frac{1}{2}+4\times2^2=91$$

$\therefore \left|3\vec{a}-2\vec{b}\right|=\sqrt{91}$

> 예제9 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 아래에서 옳은 것을 모두 고르시오.
>
> | | |
> |---|---|
> | ㄱ. $\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\ge\left|\vec{a}\bullet\vec{b}\right|$ | ㄴ. $\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|\ge\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$ |
> | ㄷ. $\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2\ge2\vec{a}\bullet\vec{b}$ | ㄹ. $\left|\vec{a}\right|^2-\left|\vec{b}\right|^2\ge\left|\vec{a}+\vec{b}\right|\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$ |

풀이 ㄱ. $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각을 $\theta\left(0\le\theta\le\pi\right)$로 두면 $-1\le\cos\theta\le1$이므로

$-\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\le\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta\le\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right| \Rightarrow -\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\le\vec{a}\bullet\vec{b}\le\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|$

$\Rightarrow \left|\vec{a}\bullet\vec{b}\right|\le\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|$ (참)

ㄴ. $\left(\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|\right)^2-\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=\left(\left|\vec{a}\right|^2+2\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|+\left|\vec{b}\right|^2\right)-\left(\left|\vec{a}\right|^2+2\vec{a}\bullet\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2\right)$

$$=2\left(\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|-\vec{a}\bullet\vec{b}\right)\ge0\ (\because ㄱ)$$

따라서 $\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|\ge\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$ (참)

ㄷ. $\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2-2\vec{a}\bullet\vec{b}=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2\ge0 \Rightarrow \left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2\ge2\vec{a}\bullet\vec{b}$ (참)

ㄹ. $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$가 이루는 각을 $\theta\left(0\le\theta\le\pi\right)$로 두면

$\left|\vec{a}\right|^2-\left|\vec{b}\right|^2=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\bullet\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\left|\vec{a}+\vec{b}\right|\left|\vec{a}-\vec{b}\right|\cos\theta$

이고, $-1\le\cos\theta\le1$이므로

$-\left|\vec{a}+\vec{b}\right|\left|\vec{a}-\vec{b}\right|\le\left|\vec{a}+\vec{b}\right|\left|\vec{a}-\vec{b}\right|\cos\theta\le\left|\vec{a}+\vec{b}\right|\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$

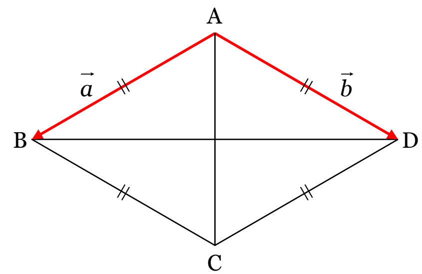
$\Rightarrow \left|\vec{a}\right|^2-\left|\vec{b}\right|^2\le\left|\vec{a}+\vec{b}\right|\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$ (거짓)

> 예제10 마름모 ABCD에서 $\overline{\mathrm{AC}}\perp\overline{\mathrm{BD}}$임을 벡터를 이용해서 증명하시오.

★ p.94에서 설명했던 벡터의 일차결합을 이용하기 위해 서로 평행하지 않은 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$를 잡은 다음, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 표현해보자.

풀이 오른쪽 그림과 같이 $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}$로 두면 다음이 성립한다.

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{a}+\vec{b}$



또한

$\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}-\vec{a}$

와 $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|$에 의해

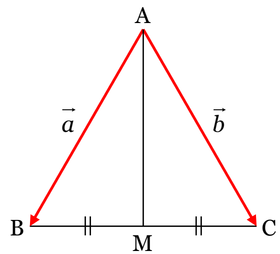
$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\bullet\left(\vec{b}-\vec{a}\right)$$
$$=\left(\vec{b}+\vec{a}\right)\bullet\left(\vec{b}-\vec{a}\right)$$
$$=\left|\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}\right|^2=0$$

이므로 p.113의 두 벡터의 수직 조건에 따라 $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BD}}$, $\overline{\mathrm{AC}}\perp\overline{\mathrm{BD}}$가 성립한다.

> 예제11 정삼각형 ABC에서 선분 BC의 중점이 M일 때, $\overline{\mathrm{AM}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$임을 벡터를 이용해서 증명하시오.

풀이 오른쪽 그림과 같이 $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$로 두면 점 M이 선분 BC의 중점이므로 다음이 성립한다.

$$\overrightarrow{AM}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$$



또한

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$$

와 $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|$에 의해

$$\overrightarrow{AM}\bullet\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\bullet\left(\vec{b}-\vec{a}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\vec{b}+\vec{a}\right)\bullet\left(\vec{b}-\vec{a}\right)=\frac{1}{2}\left(\left|\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}\right|^2\right)=0$$

이므로 p.113의 두 벡터의 수직 조건에 따라 $\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{BC}$, $\overline{AM}\perp\overline{BC}$가 성립한다.

예제12 영벡터가 아닌 세 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$에 대하여 다음 명제의 참, 거짓을 판별하시오.

$\vec{a}\bullet\vec{b}=\vec{a}\bullet\vec{c}$이면 $\vec{b}=\vec{c}$이다.

풀이 $\vec{a}\bullet\vec{b}=\vec{a}\bullet\vec{c}$의 우변의 내적을 좌변으로 옮긴 다음, 내적의 분배법칙을 적용하면 다음과 같이 변형된다.

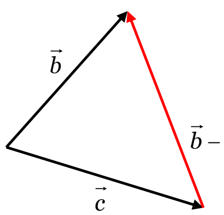
$$\vec{a}\bullet\vec{b}-\vec{a}\bullet\vec{c}=\vec{a}\bullet\left(\vec{b}-\vec{c}\right)=0 \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

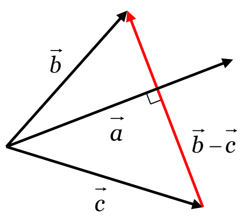
그리고 $\vec{a}\neq\vec{0}$이므로 ①이 성립할 수 있는 경우는 다음 두 가지가 있다.

$i)$ $\vec{b}-\vec{c}=\vec{0}$일 때 $ii)$ $\vec{b}-\vec{c}\neq\vec{0}$이고, $\vec{a}\perp\left(\vec{b}-\vec{c}\right)$일 때

$i)$이 $\vec{b}=\vec{c}$인 경우를 나타내므로 $ii)$를 만족시키는 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$가 존재하지 않으면 문제에 주어진 명제는 참이 된다.

그럼 $ii)$의 경우, 즉 $\vec{b}\neq\vec{c}$와 $\vec{a}\perp\left(\vec{b}-\vec{c}\right)$를 모두 만족시키는 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$가 존재하는지 알아보자. 아래 왼쪽과 같이 $\vec{b}\neq\vec{c}$를 만족시키는 $\vec{b}$, $\vec{c}$를 그린 다음, $\vec{b}-\vec{c}$와 수직인 벡터 $\vec{a}$를 추가하면 아래 오른쪽과 같다.





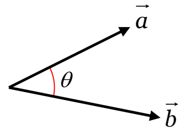
따라서 $\vec{b}\neq\vec{c}$와 $\vec{a}\perp\left(\vec{b}-\vec{c}\right)$를 모두 만족시키는 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$가 존재하며, 문제에 주어진 명제 「$\vec{a}\bullet\vec{b}=\vec{a}\bullet\vec{c}$이면 $\vec{b}=\vec{c}$이다」는 거짓이다.

영벡터가 아닌 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 θ일 때, 두 벡터의 내적은 $\vec{a}\bullet\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$로 정의된다. 여기서 $\vec{a}\bullet\vec{b}$, $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$의 값을 알면 $\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.

두 평면벡터가 이루는 각의 크기

• 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$가 이루는 각의 크기가 θ $(0\le\theta\le\pi)$일 때, 다음이 성립한다.

$$\vec{a}\bullet\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$



$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\bullet\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$$

[예] $\vec{a}\bullet\vec{b}=2\sqrt{3}$, $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=\sqrt{3}$을 만족시키는 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기 $\theta\,(0\le\theta\le\pi)$는 다음과 같다.

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\bullet\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{2\sqrt{3}}{4\times\sqrt{3}}=\frac{1}{2} \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{3}$$

예제13 다음과 같이 정의되는 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기 θ를 각각 구하시오. (단, $0\le\theta\le\pi$)

(1) $\vec{a}=(-3, 1)$, $\vec{b}=(-1, 2)$ (2) $\vec{a}=(3, \sqrt{3})$, $\vec{b}=(-2, 0)$

풀이 (1) $\vec{a}\bullet\vec{b}$, $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$의 값을 차례로 계산하면 다음과 같다.

$$\vec{a}\bullet\vec{b}=(-3, 1)\bullet(-1, 2)=(-3)\times(-1)+1\times2=5$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{(-3)^2+1^2}=\sqrt{10},\quad |\vec{b}|=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$$

$$\therefore \cos\theta=\frac{\vec{a}\bullet\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{5}{\sqrt{10}\times\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{4}$$

(2) $\vec{a}\bullet\vec{b}$, $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$의 값을 차례로 계산하면 다음과 같다.

$$\vec{a}\bullet\vec{b}=(3, \sqrt{3})\bullet(-2, 0)=3\times(-2)+\sqrt{3}\times0=-6$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{3^2+(\sqrt{3})^2}=2\sqrt{3},\quad |\vec{b}|=\sqrt{(-2)^2+0^2}=2$$

$$\therefore \cos\theta=\frac{\vec{a}\bullet\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{-6}{2\sqrt{3}\times2}=-\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta=\frac{5}{6}\pi$$

예제14 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=\sqrt{2}$, $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{5}$를 만족시킬 때, $\vec{a}$와 $\vec{b}$가 이루는 각의 크기 θ를 구하시오. (단, $0\le\theta\le\pi$)

★ $|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\bullet\vec{b}+|\vec{b}|^2$을 이용하면 세 벡터 $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$의 크기로부터 $\vec{a}\bullet\vec{b}$의 값을 구할 수 있다.

풀이 문제에 주어진 조건들을 $|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\bullet\vec{b}+|\vec{b}|^2$에 대입하면 다음과 같이 $\vec{a}\bullet\vec{b}$의 값을 구할 수 있다.

$$(\sqrt{5})^2=3^2-2\vec{a}\bullet\vec{b}+(\sqrt{2})^2 \Rightarrow \vec{a}\bullet\vec{b}=3$$

$$\therefore \cos\theta=\frac{\vec{a}\bullet\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{3}{3\times\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{4}$$

예제15 점 O를 원점으로 하는 좌표평면에서 두 점 A, B의 위치벡터가 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$이고, $\vec{a}$와 $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 θ이다. (단, $0 \le \theta \le \pi$)
$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=3$, $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=5$, $\left|\vec{a}\right|=2$일 때, 다음을 각각 구하시오.

(1) $\vec{a}\bullet\vec{b}$ (2) $\cos\theta$의 값 (3) 삼각형 OAB의 넓이

풀이 (1) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=3$, $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=5$의 양변을 제곱해서 전개하면

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2+2\vec{a}\bullet\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2=9 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

$$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2-2\vec{a}\bullet\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2=25 \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

가 된다. 그리고 ①−②에 의해 $\vec{a}\bullet\vec{b}$의 값은

$$4\vec{a}\bullet\vec{b}=-16 \Rightarrow \vec{a}\bullet\vec{b}=-4$$

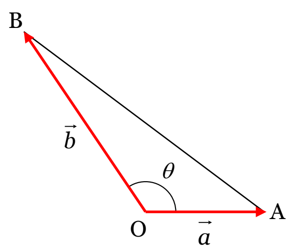
(2) (1)에서 ①+②를 하면

$$2\left|\vec{a}\right|^2+2\left|\vec{b}\right|^2=34 \Rightarrow \left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2=17$$

이고, 여기에 $\left|\vec{a}\right|=2$를 대입하면

$$\left|\vec{b}\right|^2=13 \Rightarrow \left|\vec{b}\right|=\sqrt{13}$$

$$\therefore \cos\theta=\frac{\vec{a}\bullet\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}=\frac{-4}{2\times\sqrt{13}}=-\frac{2\sqrt{13}}{13}$$



(3) (2)로부터 $\sin\theta$와 삼각형 OAB의 넓이를 구하면 다음과 같다.

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(-\frac{2\sqrt{13}}{13}\right)^2}=\frac{3}{\sqrt{13}}$$

$\boxed{0\le\theta\le\pi \text{이므로 } 0\le\sin\theta\le 1}$

$$\triangle OAB=\frac{1}{2}\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\theta=\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{13}\times\frac{3}{\sqrt{13}}=3$$

★ 시점이 일치하는 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 크기와 내적을 알 때 두 벡터를 변의 일부로 하는 삼각형의 넓이는 다음과 같이 표현된다.

삼각형 넓이의 내적 표현

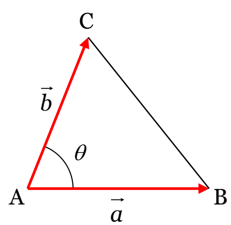
• $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$일 때, △ABC의 넓이는 다음과 같이 표현된다.

$$\triangle \mathbf{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\right)^2-\left(\vec{a}\bullet\vec{b}\right)^2}$$

∵ 오른쪽 그림과 같이 $\vec{a}$와 $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 θ로 두면 다음이 성립한다.

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\bullet\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}$$

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{\vec{a}\bullet\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}\right)^2}$$



따라서 △ABC의 넓이는 다음과 같다.

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\left|\vec{a}\right|\times\left|\vec{b}\right|\times\sin\theta=\frac{1}{2}\times\sqrt{\left(\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\right)^2}\times\sqrt{1-\left(\frac{\vec{a}\bullet\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\right)^2-\left(\vec{a}\bullet\vec{b}\right)^2}$$

★ 위 공식은 세 꼭짓점의 좌표가 주어진 삼각형의 넓이를 구할 때 효과적으로 이용할 수 있다.

[예] 좌표평면 위의 세 점 A$(1, 2)$, B$(5, 1)$, C$(3, 4)$를 꼭짓점으로 하는 삼

각형 ABC의 넓이

$\vec{a}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

$\quad=(5,1)-(1,2)=(4,-1)$

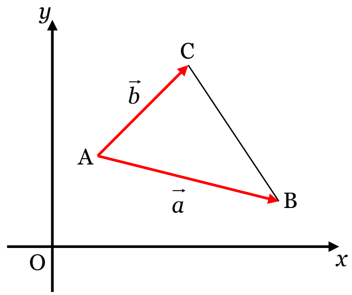
$\vec{b}=\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}$

$\quad=(3,4)-(1,2)=(2,2)$

$|\vec{a}||\vec{b}|=\sqrt{4^2+(-1)^2}\sqrt{2^2+2^2}$

$\quad=\sqrt{17}\sqrt{8}$

$\vec{a}\bullet\vec{b}=(4,-1)\bullet(2,2)=6$



$$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\sqrt{\left(|\vec{a}||\vec{b}|\right)^2-\left(\vec{a}\bullet\vec{b}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\sqrt{17}\sqrt{8}\right)^2-6^2}=5$$

★ 세 꼭짓점의 좌표가 주어진 삼각형의 넓이는 다음의 사선공식으로 구할 수도 있다.

〈세 꼭짓점이 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$인 $\triangle ABC$의 넓이〉

① 세 꼭짓점의 x좌표를 나열하고, 첫 번째 것은 반복

② x좌표에 맞춰 y좌표를 나열

③ 화살표 방향으로 곱함

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 & & \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 & & \\ \hline +x_2y_1 & +x_3y_2 & +x_1y_3 & -x_1y_2 & -x_2y_3 & -x_3y_1 \end{array}$$

④ 왼쪽 세 항에는 (+) ⑤ 오른쪽 세 항에는 (−)

⑥ 위 식에 절댓값 기호를 씌우고 $\frac{1}{2}$을 곱함

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\left|x_2y_1+x_3y_2+x_1y_3-x_1y_2-x_2y_3-x_3y_1\right|$$

세 점 $A(1,2)$, $B(5,1)$, $C(3,4)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 넓이를 구하는데 사선공식을 적용하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 5 & 3 & 1 & & \\ 2 & 1 & 4 & 2 & & \\ \hline 10 & +3 & +4 & -1 & -20 & -6 \end{array}$$

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}|10+3+4-1-20-6|=5$$

이처럼 평면에서 세 꼭짓점의 좌표가 주어진 삼각형의 넓이를 구할 때는 벡터의 내적을 이용할 수도 있고, 사선공식을 이용할 수도 있다. 그런데 벡터의 내적을 이용하는 방법은 공간에서 세 꼭짓점의 좌표가 주어진 삼각형의 넓이를 구할 때도 적용할 수 있기 때문에 알아두는 것이 좋다.

• 평면벡터의 내적 – 유형①
다양한 방법으로 평면벡터의 내적 계산하기

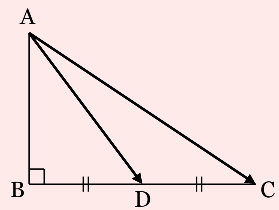
★ $\vec{a}\bullet\vec{b}$를 계산하는 가장 기본적인 방법은 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 시점을 일치시킨 후 내적의 정의 $\vec{a}\bullet\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta$를 적용하는 것이다. 그리고 문제에 따라 벡터의 분해(p.91 참고), 정사영을 이용한 방법(p.115 참고), 벡터의 성분을 이용한 방법(p.117 참고)을 쓸 수도 있다.

또한 정삼각형이나 직사각형 같은 평면도형 위에 그려진 벡터의 내적에는 p.94에서 공부했던 벡터의 일차결합이나 해석기하를 적용할 수도 있다.

예제16 오른쪽 그림과 같이

$\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=3$, $\angle ABC=90°$

인 직각삼각형 ABC가 있다. 변 BC의 중점이 D일 때, $\overrightarrow{AC}\bullet\overrightarrow{AD}$의 값을 구하시오.



풀이1 내적의 정의 $\overrightarrow{AC}\bullet\overrightarrow{AD}=\overline{AC}\times\overline{AD}\times\cos\angle CAD$를 이용한 방법

$$\overline{AC}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{13},\quad \overline{AD}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BD}^2}=\frac{5}{2}$$

$\angle CAB=\alpha$, $\angle DAB=\beta$로 두면

$$\cos\angle CAD=\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$
$$=\frac{2}{\sqrt{13}}\times\frac{4}{5}+\frac{3}{\sqrt{13}}\times\frac{3}{5}=\frac{17}{5\sqrt{13}}$$

$$\therefore \overrightarrow{AC}\bullet\overrightarrow{AD}=\overline{AC}\times\overline{AD}\times\cos\angle CAD=\sqrt{13}\times\frac{5}{2}\times\frac{17}{5\sqrt{13}}=\frac{17}{2}$$

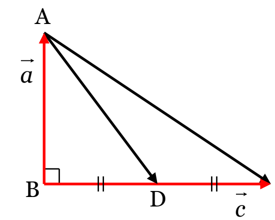
풀이2 벡터의 분해를 이용한 방법

$\overline{AB}\perp\overline{BC}$이므로 $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$를 $\overrightarrow{AB}$ 또는 $\overrightarrow{BC}$에 평행한 벡터로 분해하면

$$\overrightarrow{AC}\bullet\overrightarrow{AD}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)\bullet\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}\right)$$
$$=\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}\bullet\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\bullet\overrightarrow{BD}$$
$$=2^2+0+0+3\times\frac{3}{2}\times\cos 0°=\frac{17}{2}$$

풀이3 벡터의 일차결합을 이용한 방법

벡터의 일차결합을 적용하기 위해 두 벡터를 선택할 때는 벡터의 크기, 두 벡터가 이루는 각을 쉽게 알 수 있는 벡터로 정한다.



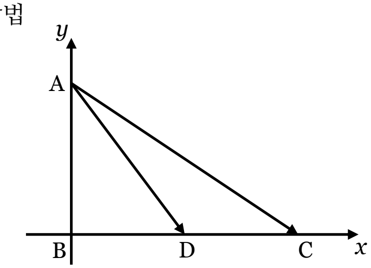
$\overrightarrow{BA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{c}$로 두면

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}=\vec{c}-\vec{a},\quad \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BA}=\frac{1}{2}\vec{c}-\vec{a}$$

$$\overrightarrow{AC}\bullet\overrightarrow{AD}=\left(\vec{c}-\vec{a}\right)\bullet\left(\frac{1}{2}\vec{c}-\vec{a}\right)=\frac{1}{2}\left|\vec{c}\right|^2-\frac{3}{2}\vec{c}\bullet\vec{a}+\left|\vec{a}\right|^2$$
$$=\frac{1}{2}\times3^2-\frac{3}{2}\times0+2^2=\frac{17}{2}$$

풀이4 해석기하와 성분을 이용한 방법

그림과 같이 직선 BC를 x축, 직선 BA를 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 세 점 A, C, D의 좌표가 각각 $(0,\ 2)$, $(3,\ 0)$, $\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$이므로

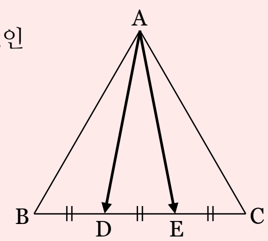


$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}=(3,\ 0)-(0,\ 2)=(3,\ -2)$

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BA}=\left(\frac{3}{2},\ 0\right)-(0,\ 2)=\left(\frac{3}{2},\ -2\right)$

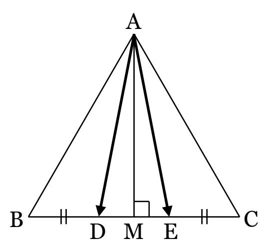
$\overrightarrow{AC}\bullet\overrightarrow{AD}=(3,\ -2)\bullet\left(\frac{3}{2},\ -2\right)=\frac{9}{2}+4=\frac{17}{2}$

예제17 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정삼각형 ABC에서 변 BC의 삼등분점을 D, E라 할 때, $\overrightarrow{AD}\bullet\overrightarrow{AE}$의 값을 구하시오.



풀이1 내적의 정의 $\overrightarrow{AD}\bullet\overrightarrow{AE}=\overline{AD}\times\overline{AE}\times\cos\angle DAE$를 이용한 방법

$\overline{BC}$의 중점을 M으로 두면



$\overline{AD}=\overline{AE}=\sqrt{\overline{AM}^2+\overline{MD}^2}=\frac{2\sqrt{7}}{3}$

$\angle DAM=\theta$로 두면

$\cos\theta=\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$, $\sin\theta=\frac{1}{2\sqrt{7}}$

$\cos\angle DAE=\cos2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=\frac{13}{14}$

$\therefore\ \overrightarrow{AD}\bullet\overrightarrow{AE}=\overline{AD}\times\overline{AE}\times\cos\angle DAE=\frac{2\sqrt{7}}{3}\times\frac{2\sqrt{7}}{3}\times\frac{13}{14}=\frac{26}{9}$

풀이2 벡터의 분해를 이용한 방법

여기서도 $\overline{BC}$의 중점을 M으로 두면 $\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{BC}$이므로 $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$를 $\overrightarrow{AM}$ 또는 $\overrightarrow{BC}$에 평행한 벡터로 분해하면

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD}\bullet\overrightarrow{AE}&=\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MD}\right)\bullet\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{ME}\right)\\&=\left|\overrightarrow{AM}\right|^2+\overrightarrow{AM}\bullet\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MD}\bullet\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MD}\bullet\overrightarrow{ME}\\&=\left(\sqrt{3}\right)^2+0+0+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\cos180^\circ=\frac{26}{9}\end{aligned}$$

풀이3 벡터의 일차결합을 이용한 방법

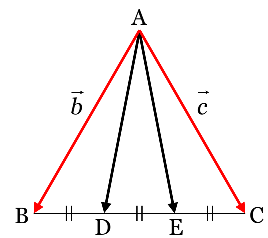
$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$로 두면

① 점 D가 $\overline{BC}$를 $1:2$로 내분하므로

$\overrightarrow{AD}=\frac{\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AB}}{3}=\frac{\vec{c}+2\vec{b}}{3}$

② 점 E가 $\overline{BC}$를 $2:1$로 내분하므로

$\overrightarrow{AE}=\frac{2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}}{3}=\frac{2\vec{c}+\vec{b}}{3}$



$$\begin{aligned}\therefore\ \overrightarrow{AD}\bullet\overrightarrow{AE}&=\left(\frac{\vec{c}+2\vec{b}}{3}\right)\bullet\left(\frac{2\vec{c}+\vec{b}}{3}\right)=\frac{1}{9}\left(2\left|\vec{c}\right|^2+5\vec{c}\bullet\vec{b}+2\left|\vec{b}\right|^2\right)\\&=\frac{1}{9}\left(2\times2^2+5\times2\times2\times\cos\frac{\pi}{3}+2\times2^2\right)=\frac{26}{9}\end{aligned}$$

풀이4 해석기하와 벡터의 성분을 이용한 방법

다음 그림과 같이 직선 BC를 x축, 점 B를 지나면서 직선 BC에 수직인 직선을 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 세 점 A, D, E의 좌표가 각각 $\left(1,\ \sqrt{3}\right)$, $\left(\frac{2}{3},\ 0\right)$, $\left(\frac{4}{3},\ 0\right)$이므로

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BA}$

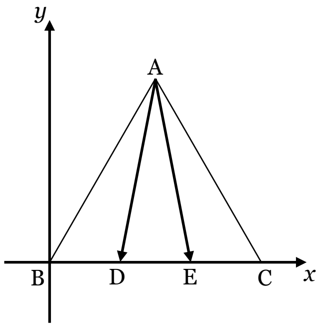
$=\left(\frac{2}{3},\,0\right)-\left(1,\,\sqrt{3}\right)=\left(-\frac{1}{3},\,-\sqrt{3}\right)$

$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{BA}$

$=\left(\frac{4}{3},\,0\right)-\left(1,\,\sqrt{3}\right)=\left(\frac{1}{3},\,-\sqrt{3}\right)$

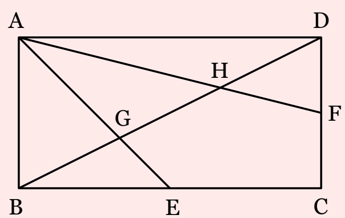
$\overrightarrow{AD}\bullet\overrightarrow{AE}=\left(-\frac{1}{3},\,-\sqrt{3}\right)\bullet\left(\frac{1}{3},\,-\sqrt{3}\right)$

$=-\frac{1}{9}+3=\frac{26}{9}$



예제18 그림과 같이 가로, 세로의 길이가 각각 2, 1인 직사각형 ABCD에서 변 BC의 중점을 E, 변 CD의 중점을 F라고 한다.

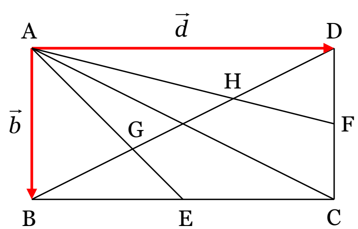
선분 BD와 선분 AE, AF의 교점을 각각 G, H라고 할 때, $\overrightarrow{AG}\bullet\overrightarrow{AH}$의 값을 구하시오.



풀이1 벡터의 일차결합을 이용한 방법

$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$로 두고, $\overrightarrow{AG}$와 $\overrightarrow{AH}$를 $\vec{b}$, $\vec{d}$의 일차결합으로 표현해보자.

점 A를 위치벡터의 시점으로 보면 네 점 A, B, C, D의 위치벡터



는 각각 $\vec{0}$, $\vec{b}$, $\vec{b}+\vec{d}$, $\vec{d}$이고, △ABC의 무게중심 G와 △ACD의 무게중심 H의 위치벡터는

$$\overrightarrow{AG}=\frac{\vec{0}+\vec{b}+\left(\vec{b}+\vec{d}\right)}{3}=\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{d},\quad \overrightarrow{AH}=\frac{\vec{0}+\left(\vec{b}+\vec{d}\right)+\vec{d}}{3}=\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{d}$$

따라서

$$\overrightarrow{AG}\bullet\overrightarrow{AH}=\left(\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{d}\right)\bullet\left(\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{d}\right)$$

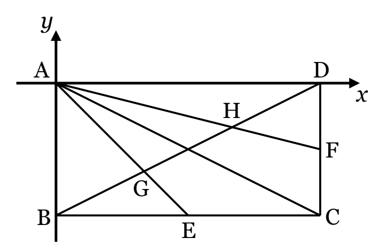
$$=\left(\frac{2}{3}\vec{b}\right)\bullet\left(\frac{1}{3}\vec{b}\right)+\left(\frac{2}{3}\vec{b}\right)\bullet\left(\frac{2}{3}\vec{d}\right)+\left(\frac{1}{3}\vec{d}\right)\bullet\left(\frac{1}{3}\vec{b}\right)+\left(\frac{1}{3}\vec{d}\right)\bullet\left(\frac{2}{3}\vec{d}\right)$$

$$=\frac{2}{9}\left|\vec{b}\right|^2+\frac{5}{9}\vec{b}\bullet\vec{d}+\frac{2}{9}\left|\vec{d}\right|^2=\frac{2}{9}\times1^2+\frac{5}{9}\times0+\frac{2}{9}\times2^2=\frac{10}{9}$$

풀이2 해석기하와 성분을 이용한 방법

직선 AD를 x축, 직선 BA를 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 네 점 A, B, C, D의 좌표가 각각 $(0,\,0)$, $(0,\,-1)$, $(2,\,-1)$, $(2,\,0)$이므로 △ABC의 무게중심 G와 △ACD의 무게중심 H의 좌표는 다음과 같다.

$G\left(\frac{2}{3},\,-\frac{2}{3}\right)$, $H\left(\frac{4}{3},\,-\frac{1}{3}\right)$



따라서

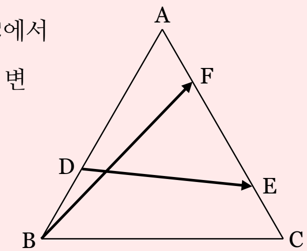
$\overrightarrow{AG}\bullet\overrightarrow{AH}=\left(\frac{2}{3},\,-\frac{2}{3}\right)\bullet\left(\frac{4}{3},\,-\frac{1}{3}\right)$

$=\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}+\left(-\frac{2}{3}\right)\times\left(-\frac{1}{3}\right)$

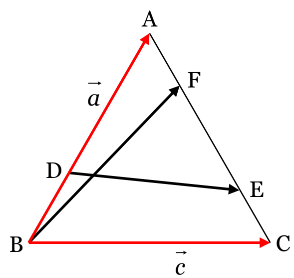
$=\frac{10}{9}$

[2014학년도 수능 9월 모평 B형 #11]

예제19 한 변의 길이가 3인 정삼각형 ABC에서 변 AB를 2:1로 내분하는 점을 D라 하고, 변 AC를 3:1과 1:3으로 내분하는 점을 각각 E, F라 할 때, $\left|\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{DE}\right|^2$의 값을 구하시오.



풀이1 벡터의 일차결합을 이용한 방법



$\overrightarrow{BA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{c}$로 두고, $\overrightarrow{BF}$와 $\overrightarrow{DE}$를 $\vec{a}$, $\vec{c}$의 일차결합으로 표현해보자.

$\vec{a}$, $\vec{c}$가 각각 점 A, 점 C의 위치벡터라면 선분 AC를 3:1로 내분하는 점 E와 1:3으로 내분하는 점 F의 위치벡터는 각각

$$\overrightarrow{BE}=\frac{3\vec{c}+\vec{a}}{3+1}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{c}\,,\quad \overrightarrow{BF}=\frac{\vec{c}+3\vec{a}}{1+3}=\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{c}$$

로 표현되고, $\overrightarrow{DE}$와 $\left|\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{DE}\right|^2$은 다음과 같이 계산된다.

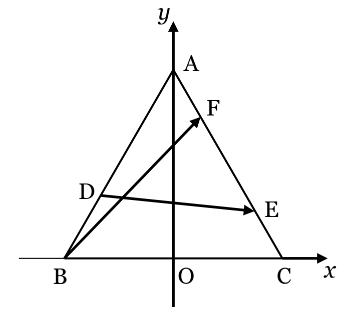
$$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{BD}=\left(\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{c}\right)-\frac{1}{3}\vec{a}=-\frac{1}{12}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{c}$$

$$\left|\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{DE}\right|^2=\left|\left(\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{c}\right)+\left(-\frac{1}{12}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{c}\right)\right|^2=\left|\frac{2}{3}\vec{a}+\vec{c}\right|^2$$

$$=\left|\frac{2}{3}\vec{a}\right|^2+2\left(\frac{2}{3}\vec{a}\right)\bullet\vec{c}+\left|\vec{c}\right|^2=\frac{4}{9}\left|\vec{a}\right|^2+\frac{4}{3}\vec{a}\bullet\vec{c}+\left|\vec{c}\right|^2$$

$$=\frac{4}{9}\times3^2+\frac{4}{3}\times3\times3\times\cos60°+3^2=19$$

풀이2 해석기하와 성분을 이용한 방법



그림과 같이 직선 BC를 x축, 직선 BC에 수직이면서 점 A를 지나는 직선을 y축으로 하는 좌표평면을 잡은 다음, 점 A ~ F의 좌표를 구하면

$$A\left(0,\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right),\ B\left(-\frac{3}{2},\ 0\right),\ C\left(\frac{3}{2},\ 0\right),$$

$$D\left(-1,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ E\left(\frac{9}{8},\ \frac{3\sqrt{3}}{8}\right),\ F\left(\frac{3}{8},\ \frac{9\sqrt{3}}{8}\right)$$

이를 이용해서 $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{DE}$를 성분으로 표현하고 $\left|\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{DE}\right|^2$을 구하면

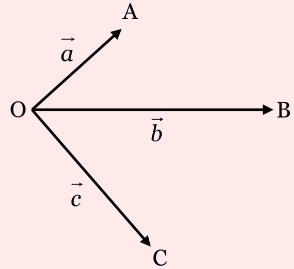
$$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OB}=\left(\frac{3}{8},\ \frac{9\sqrt{3}}{8}\right)-\left(-\frac{3}{2},\ 0\right)=\left(\frac{15}{8},\ \frac{9\sqrt{3}}{8}\right)$$

$$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OD}=\left(\frac{9}{8},\ \frac{3\sqrt{3}}{8}\right)-\left(-1,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\left(\frac{17}{8},\ -\frac{\sqrt{3}}{8}\right)$$

$$\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{DE}=\left(\frac{15}{8},\ \frac{9\sqrt{3}}{8}\right)+\left(\frac{17}{8},\ -\frac{\sqrt{3}}{8}\right)=\left(4,\ \sqrt{3}\right)$$

$$\therefore\left|\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{DE}\right|^2=4^2+\left(\sqrt{3}\right)^2=19$$

예제20 오른쪽 그림은 한 평면 위의 네 점 O, A, B, C를 시점 또는 종점으로 하는 세 벡터 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$를 나타낸 것이다.



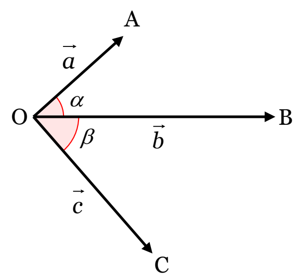
$\left|\vec{a}\right|=2$, $\left|\vec{b}\right|=4$, $\left|\vec{c}\right|=3$, $\vec{a}\bullet\vec{b}=6$, $\vec{b}\bullet\vec{c}=8$이 성립할 때, $\overrightarrow{BA}\bullet\overrightarrow{BC}$의 값을 구하시오.

풀이 $\overrightarrow{BA}\bullet\overrightarrow{BC}$의 계산에 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$를 이용하기 위해 $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$의 시점을 점 O로 바꾸면

$$\overrightarrow{BA}\bullet\overrightarrow{BC}=\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right)\bullet\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\right)=\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\bullet\left(\vec{c}-\vec{b}\right)$$
$$=\vec{a}\bullet\vec{c}-\vec{a}\bullet\vec{b}-\vec{b}\bullet\vec{c}+\left|\vec{b}\right|^2=\vec{a}\bullet\vec{c}-6-8+4^2=\vec{a}\bullet\vec{c}+2$$

또한 $\vec{a}\bullet\vec{c}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{c}\right|\cos\angle AOC$이고, $\cos\angle AOC$의 값을 구하기 위해 $\vec{a}$와 $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 α, $\vec{b}$와 $\vec{c}$가 이루는 각의 크기를 β로 두면

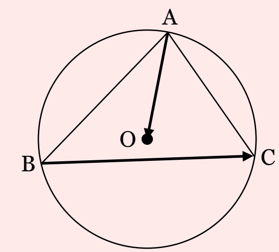
$$\cos\alpha=\frac{\vec{a}\bullet\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}=\frac{6}{2\times4}=\frac{3}{4}$$
$$\Rightarrow\ \sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{\sqrt{7}}{4}$$
$$\cos\beta=\frac{\vec{b}\bullet\vec{c}}{\left|\vec{b}\right|\left|\vec{c}\right|}=\frac{8}{4\times3}=\frac{2}{3}$$
$$\Rightarrow\ \sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$



따라서

$$\cos\angle AOC=\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$=\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{7}}{4}\times\frac{\sqrt{5}}{3}=\frac{6-\sqrt{35}}{12}$$
$$\therefore\ \overrightarrow{BA}\bullet\overrightarrow{BC}=\vec{a}\bullet\vec{c}+2=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{c}\right|\cos\angle AOC+2$$
$$=2\times3\times\frac{6-\sqrt{35}}{12}+2=\frac{10-\sqrt{35}}{2}$$

예제21 오른쪽 그림과 같은 삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=6$, $\overline{BC}=7$, $\overline{CA}=5$이다. 이 삼각형의 외심이 O일 때, $\overrightarrow{AO}\bullet\overrightarrow{BC}$의 값을 구하시오.



풀이 $\overrightarrow{AO}\bullet\overrightarrow{BC}$의 계산을 위해 $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{BC}$의 시점을 점 O로 통일하면

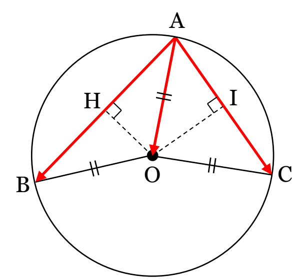
$$\overrightarrow{AO}\bullet\overrightarrow{BC}=\left(-\overrightarrow{OA}\right)\bullet\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\right)=-\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OB}$$

가 되지만, 여기에 포함된 두 내적은 계산하기가 어렵다.

대신 $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{BC}$의 시점을 점 A로 통일하면

$$\overrightarrow{AO}\bullet\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AO}\bullet\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)$$
$$=\overrightarrow{AO}\bullet\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AO}\bullet\overrightarrow{AB}$$

가 되고, 여기에 포함된 두 내적은 정사영을 이용해서 계산할 수 있다.



점 O에서 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$에 내린 수선의 발을 각각 H, I라 하면

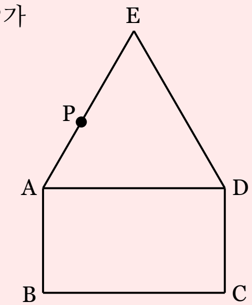
$\overrightarrow{AO} \bullet \overrightarrow{AC} = \overline{AI} \times \overline{AC} = \dfrac{5}{2} \times 5 = \dfrac{25}{2}$

$\overrightarrow{AO} \bullet \overrightarrow{AB} = \overline{AH} \times \overline{AB} = 3 \times 6 = 18$

$\therefore \overrightarrow{AO} \bullet \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AO} \bullet \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AO} \bullet \overrightarrow{AB} = \dfrac{25}{2} - 18 = -\dfrac{11}{2}$

[2011학년도 수능 9월 모평 가형 #14]

예제22 평면에서 그림과 같이 $\overline{AB}=1$이고 $\overline{BC}=\sqrt{3}$인 직사각형 ABCD와 정삼각형 EAD가 있다. 점 P가 선분 AE 위를 움직일 때, 옳은 것만을 아래에서 있는 대로 고르시오.



ㄱ. $\left|\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CP}\right|$의 최솟값은 1이다.

ㄴ. $\overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{CP}$의 값은 일정하다.

ㄷ. $\left|\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CP}\right|$의 최솟값은 $\dfrac{7}{2}$이다.

풀이 ㄱ. $\left|\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CP}\right| = \left|\overrightarrow{PB}\right|$이고, $\left|\overrightarrow{PB}\right|$는 점 P가 점 A에 위치할 때 최소가 된다. 따라서 $\left|\overrightarrow{PB}\right| \geq \overline{AB} = 1$ (참)

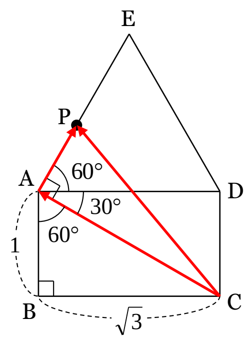
ㄴ. $\angle ABC = 90°$, $\overline{AB}=1$, $\overline{BC}=\sqrt{3}$으로부터

$\overline{AC}=2$, $\angle BAC = 60°$이고,

$\angle CAD = 30°$, $\angle DAE = 60°$로부터

$\angle CAE = 90°$이다.

그리고 $\overrightarrow{CP}$를 $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AP}$로 분해하면



$\overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CA} \bullet \left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AP}\right) = \overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{AP} = \left|\overrightarrow{CA}\right|^2 + 0 = 4$

이므로 $\overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{CP}$의 값은 일정하다. (참)

[ㄴ의 다른 풀이]

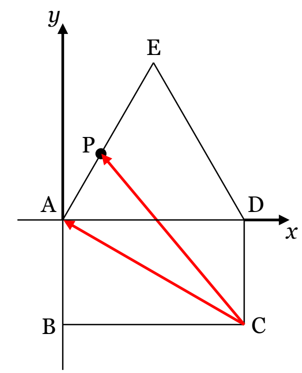
$\angle CAE = 90°$이므로 $\overrightarrow{CP}$의 $\overrightarrow{CA}$로의 정사영의 길이는 $\overline{CA}$의 길이와 같고, 다음이 성립한다.

$\overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{CP} = \overline{CA} \times \overline{CA} = 4$

따라서 $\overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{CP}$의 값은 일정하다. (참)

[ㄴ의 또 다른 풀이]

두 벡터 $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CP}$를 성분으로 표현하기 위해 직선 AD를 x축, 직선 BA를 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 두 점 A, C의 좌표는 각각 $(0, 0)$, $\left(\sqrt{3}, -1\right)$이 된다. 그리고 직선 $y=\sqrt{3}x$ 위의 점 P의 좌표를 $\left(x, \sqrt{3}x\right)$로 두면



$\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC} = -\left(\sqrt{3}, -1\right) = \left(-\sqrt{3}, 1\right)$

$\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AC} = \left(x, \sqrt{3}x\right) - \left(\sqrt{3}, -1\right) = \left(x-\sqrt{3}, \sqrt{3}x+1\right)$

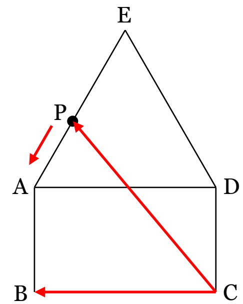
이므로 $\overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{CP}$는 다음과 같다.

$\overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{CP} = \left(-\sqrt{3}, 1\right) \bullet \left(x-\sqrt{3}, \sqrt{3}x+1\right) = -\sqrt{3}\left(x-\sqrt{3}\right) + \left(\sqrt{3}x+1\right) = 4$

따라서 $\overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{CP}$의 값은 일정하다. (참)

ㄷ. $\left|\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CP}\right| = \left|\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CP}\right|$이고, 점 P를 화살표 방향으로 이동시키면 $\overrightarrow{CP}$

의 크기, $\angle$BCP의 크기가 모두 감소하기 때문에 $\left|\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CP}\right|$가 증가하는지, 감소하는지 알기 어렵다.



$\left|\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CP}\right|$를 $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CP}$의 성분으로 계산하기 위해 [ㄴ의 또 다른 풀이]와 같이 좌표평면을 잡으면 점 B의 좌표가 $(0, -1)$이므로

$$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=(0, -1)-\left(\sqrt{3}, -1\right)=\left(-\sqrt{3}, 0\right)$$

$$\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC}=\left(x, \sqrt{3}x\right)-\left(\sqrt{3}, -1\right)=\left(x-\sqrt{3}, \sqrt{3}x+1\right)$$

$$\left|\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CP}\right|=\left|\left(x-2\sqrt{3}, \sqrt{3}x+1\right)\right|=\sqrt{\left(x-2\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{3}x+1\right)^2}$$

$$=\sqrt{4\left(x-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2+\frac{49}{4}}\quad\left(\text{단, } 0\le x\le\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

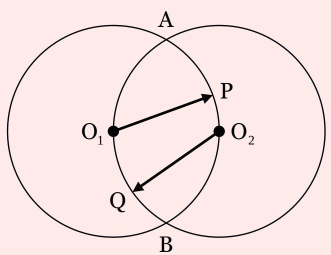
가 성립하고, $x=\frac{\sqrt{3}}{4}$일 때 $\left|\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CP}\right|$의 최솟값은 $\frac{7}{2}$이 된다. (참)

• 평면벡터의 내적 – 유형②
평면벡터의 내적에 대한 최대·최소 문제

★ $\vec{a}\bullet\vec{b}$의 최댓값 또는 최솟값을 구하는 가장 기본적인 방법은 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 시점을 일치시킨 후 내적의 정의를 적용하는 것이다. 그리고 문제에 따라 벡터의 분해(p.91 참고), 정사영을 이용한 내적 계산(p.115 참고), 벡터의 성분을 이용한 내적 계산(p.117 참고)을 함께 쓸 수도 있다.

[2009학년도 수능 9월 모평 가형 #7]

예제23 평면 위의 두 점 O_1, O_2 사이의 거리가 1일 때, O_1, O_2를 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 두 원의 교점을 A, B라 하자. 호 AO_2B 위의 점 P와 호 AO_1B 위의 점 Q에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{O_1P}$, $\overrightarrow{O_2Q}$의 내적 $\overrightarrow{O_1P}\bullet\overrightarrow{O_2Q}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하시오.



풀이 $\overrightarrow{O_1P}$와 $\overrightarrow{O_2Q}$가 이루는 각의 크기를 θ로 두면

$$\overrightarrow{O_1P}\bullet\overrightarrow{O_2Q}=1\times1\times\cos\theta=\cos\theta$$

가 성립한다. 따라서 $\overrightarrow{O_1P}\bullet\overrightarrow{O_2Q}$가 최대 또는 최소이려면 $\cos\theta$의 값이 최대 또는 최소가 되어야 하며, 이를 조사하기 위해 $\overrightarrow{O_1P}$와 $\overrightarrow{O_2Q}$의 시점을 일치시켜 보자.


공부하다
박수칠 수학
기본서
박상칠 지음
확률과 통계
새 교육과정
smart is sexy
Orbi

6 이산확률변수

「이항분포」를 간단하게 표현하면 독립시행의 확률(p.186)을 확률질량함수로 하는 이산확률변수의 확률분포라고 할 수 있다.

무슨 말인지 이해가 어려운가? 그렇다면 독립시행의 확률부터 복습해보자.

> 어떤 시행을 한 번 할 때 사건 A가 일어날 확률이 p이면,
> 이 시행을 독립적으로 n번 반복할 때 사건 A가 r번 일어날 확률은 다음과 같다.
>
> $${}_n\mathrm{C}_r \times p^r \times q^{n-r} \quad \left(\text{단, } q=1-p\text{이고, } r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n\text{이다.}\right)$$

위 정의와 같이 독립시행의 확률은 같은 시행을 반복할 때, 특정 사건이 특정 횟수만큼 일어날 확률을 의미한다. 따라서 이산확률변수의 확률질량함수가 독립시행의 확률과 같으려면 이산확률변수가 특정 사건이 일어나는 횟수를 나타내야 한다.

예를 들어 주사위 1개를 네 번 던지는 시행에서 1 또는 2의 눈이 나오는 횟수를 X로 정하자. 이때, X가 가질 수 있는 값은 $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$이고, 각각의 값을 가질 확률은 독립시행의 확률에 따라 다음 식으로 계산할 수 있다.

$$\mathrm{P}(X=x)={}_4\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{4-x} \quad (\text{단, } x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

그러므로 X는 주사위를 네 번 던지는 시행의 표본공간

$$S=\{(a,b,c,d)\mid a,\ b,\ c,\ d\text{는 각각 1부터 6까지의 정수}\}$$

예를 들어 S의 원소 $(1, 2, 3, 4)$에는 $X=2$가, $(6, 5, 4, 3)$에는 $X=0$이 대응된다.

에 속하는 각각의 원소에 0부터 4까지의 정수를 하나씩 대응시키는 함수면서, 그 정수들을 정해진 확률에 따라 값으로 갖는 이산확률변수가 된다.

또한 확률질량함수가 독립시행의 확률과 같기 때문에 이산확률변수 X의 확률분포는 이항분포가 된다.

일반적으로 이항분포는 다음과 같이 정의된다.

이항분포

• 이항분포의 정의

어떤 시행을 한 번 할 때, 사건 A가 일어날 확률이 p이다.
이 시행을 독립적으로 n번 반복할 때 사건 A가 일어난 횟수를 X로 두면 X는 이산확률변수가 되고, X의 확률분포를 이항분포라고 한다.

• 이항분포의 확률질량함수

위 정의와 같은 조건을 갖는 이산확률변수 X의 확률질량함수는 독립시행의 확률에 의해 다음과 같다.

$$\mathrm{P}(X=x)={}_n\mathrm{C}_x\, p^x q^{n-x} \quad \left(\text{단, } q=1-p\text{이고, } x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n\text{이다.}\right)$$

★ 위 확률질량함수에 $x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n$을 차례로 대입해서 각각의 확률을 구하면 다음과 같은 확률분포의 표를 만들 수 있다.

X	0	1	2	$\cdots$	n
$\mathrm{P}(X=x)$	${}_n\mathrm{C}_0\, p^0q^n$	${}_n\mathrm{C}_1\, p^1q^{n-1}$	${}_n\mathrm{C}_2\, p^2q^{n-2}$	$\cdots$	${}_n\mathrm{C}_n\, p^nq^0$

그리고 위 확률질량함수 또는 확률분포의 표에서 시행을 반복하는 횟수 n과 한 번의 시행에서 사건 A가 일어날 확률 p만 알면 모든 확률을 구할 수 있다.

따라서 서로 다른 이항분포는 n, p의 값으로 구별할 수 있으며, 이 점을 이용해서 이항분포를 표현하는 기호를 만들면 다음과 같다.

• 이항분포의 기호

위 정의와 같은 조건을 갖는 이항분포는 오른쪽과 같은 기호로 표현되며, '확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따른다'라고 한다.

$$\mathbf{B}(n,\ p)$$

시행 횟수 / 한 번의 시행에서 사건 A의 확률

★ $\mathrm{B}(n,\ p)$에서 B는 이항분포를 의미하는 Binomial Distribution의 머릿글자다.

★ 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따르는 이산확률변수 X의 확률분포의 표

X	0	1	2	$\cdots$	n
$\mathrm{P}(X=x)$	${}_n\mathrm{C}_0\,p^0q^n$	${}_n\mathrm{C}_1\,p^1q^{n-1}$	${}_n\mathrm{C}_2\,p^2q^{n-2}$	$\cdots$	${}_n\mathrm{C}_n\,p^nq^0$

에서 각각의 확률은 $(p+q)^n$을 이항정리에 따라 전개한 식에 포함된 각각의 항과 일치한다.

$$(p+q)^n = {}_n\mathrm{C}_0\,p^0q^n + {}_n\mathrm{C}_1\,p^1q^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_2\,p^2q^{n-2} + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n\,p^nq^0$$

[예] 동전 2개를 동시에 던질 때 둘 다 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{4}$이다. 이 시행을 독립적으로 다섯 번 반복할 때, 둘 다 앞면이 나온 횟수를 X로 두면 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(5,\ \frac{1}{4}\right)$을 따른다.

예제1 흰 공 4개, 검은 공 2개가 들어 있는 주머니에서 동시에 2개의 공을 뽑고 다시 넣는 시행을 네 번 반복할 때, 흰 공이 2개 뽑힌 횟수를 X라고 하자. 다음 물음에 답하시오.

(1) 확률변수 X의 확률분포를 기호 $\mathrm{B}(n,\ p)$의 꼴로 나타내시오.

(2) 확률변수 X의 확률질량함수를 구하고, X의 확률분포를 표로 나타내시오.

(3) 흰 공이 2개 뽑힌 횟수가 두 번 이상일 확률을 구하시오.

풀이 (1) 같은 시행을 네 번 반복하고, 한 번의 시행에서 흰 공이 2개 뽑힐 확률이 $\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{2}{5}$이므로 흰 공이 2개 뽑힌 횟수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(4,\ \frac{2}{5}\right)$를 따른다.

(2) 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따를 때의 확률질량함수가 $\mathrm{P}(X=x)={}_n\mathrm{C}_x\,p^x\,q^{n-x}$이므로 이항분포 $\mathrm{B}\left(4,\ \frac{2}{5}\right)$의 확률질량함수는 다음과 같다.

$$\mathrm{P}(X=x)={}_4\mathrm{C}_x\left(\frac{2}{5}\right)^x\left(\frac{3}{5}\right)^{4-x}\ (\text{단, } x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

그리고 $x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$일 때의 확률을 계산한 다음, X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

$$\mathrm{P}(X=0)={}_4\mathrm{C}_0\left(\frac{2}{5}\right)^0\left(\frac{3}{5}\right)^4=\frac{81}{625}\quad \mathrm{P}(X=1)={}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{2}{5}\right)^1\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{216}{625}$$

$$\mathrm{P}(X=2)={}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{216}{625}\quad \mathrm{P}(X=3)={}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(\frac{3}{5}\right)^1=\frac{96}{625}$$

$$\mathrm{P}(X=4)={}_4\mathrm{C}_4\left(\frac{2}{5}\right)^4\left(\frac{3}{5}\right)^0=\frac{16}{625}$$

X	0	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{81}{625}$	$\frac{216}{625}$	$\frac{216}{625}$	$\frac{96}{625}$	$\frac{16}{625}$	1

(3) 흰 공이 2개 뽑힌 횟수가 두 번 이상인 사건은 $X\geq 2$이며, 확률은 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\mathrm{P}(X\geq 2)=\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)=\frac{216}{625}+\frac{96}{625}+\frac{16}{625}=\frac{328}{625}$$

이항분포의 평균, 분산, 표준편차

• 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$를 따르는 확률변수 X의 평균 $\mathrm{E}(X)$, 분산 $\mathrm{V}(X)$, 표준편차 $\sigma(X)$는 다음의 식으로 계산할 수 있다. (단, $q=1-p$)

$$\mathbf{E}(X)=np \qquad \mathbf{V}(X)=npq \qquad \sigma(X)=\sqrt{npq}$$

★ 평균과 분산의 계산은 다음 두 가지 방법으로 증명할 수 있다.

[방법1] 평균, 분산의 정의를 이용하는 방법

$$\mathrm{E}(X)=\{(X\text{의 값})\times(\text{확률})\text{의 합}\}=\sum_{x=0}^{n} x\cdot \mathrm{P}(X=x)$$

$$=\sum_{x=1}^{n} x\cdot \mathrm{P}(X=x)=\sum_{x=1}^{n} \underline{x\cdot {}_{n}\mathrm{C}_{x}}\cdot p^{x}\cdot q^{n-x}=\sum_{x=1}^{n} \underline{n\cdot {}_{n-1}\mathrm{C}_{x-1}}\cdot p^{x}\cdot q^{n-x}$$

$$\boxed{\begin{aligned} ① \; x\cdot {}_{n}\mathrm{C}_{x} &= x\cdot \frac{n!}{x!(n-x)!}=\frac{n!}{(x-1)!(n-x)!} \\ &= n\cdot \frac{(n-1)!}{(x-1)!\{(n-1)-(x-1)\}!} \\ &= n\cdot {}_{n-1}\mathrm{C}_{x-1} \end{aligned}}$$

$$=\sum_{x=1}^{n} n\cdot {}_{n-1}\mathrm{C}_{x-1}\cdot p\cdot p^{x-1}\cdot q^{(n-1)-(x-1)}=np\sum_{x=1}^{n} {}_{n-1}\mathrm{C}_{x-1}\cdot p^{x-1}\cdot q^{(n-1)-(x-1)}$$

$$=np\sum_{r=0}^{n-1} {}_{n-1}\mathrm{C}_{r}\cdot p^{r}\cdot q^{(n-1)-r}=np(p+q)^{n-1}=np$$

$x-1=r$로 치환 이항정리 $p+q=1$

$$\mathrm{E}(X^2)=\{(X\text{의 값})^2\times(\text{확률})\text{의 합}\}=\sum_{x=0}^{n} x^2\cdot \mathrm{P}(X=x)$$

$$=\sum_{x=1}^{n} x^2\cdot \mathrm{P}(X=x)=\sum_{x=1}^{n} x\cdot \underline{x\cdot {}_{n}\mathrm{C}_{x}}\cdot p^{x}\cdot q^{n-x}=\sum_{x=1}^{n} x\cdot \underline{n\cdot {}_{n-1}\mathrm{C}_{x-1}}\cdot p^{x}\cdot q^{n-x}$$

①과 같음

$$=\sum_{x=1}^{n} (x-1+1)\cdot n\cdot {}_{n-1}\mathrm{C}_{x-1}\cdot p\cdot p^{x-1}\cdot q^{(n-1)-(x-1)}$$

$$=np\sum_{x=1}^{n} (x-1+1)\cdot {}_{n-1}\mathrm{C}_{x-1}\cdot p^{x-1}\cdot q^{(n-1)-(x-1)}$$

$$=np\left\{\sum_{x=1}^{n} (x-1)\cdot {}_{n-1}\mathrm{C}_{x-1}\cdot p^{x-1}\cdot q^{(n-1)-(x-1)}+\sum_{x=1}^{n} {}_{n-1}\mathrm{C}_{x-1}\cdot p^{x-1}\cdot q^{(n-1)-(x-1)}\right\}$$

$$=np\left\{\underline{\sum_{r=0}^{n-1} r\cdot {}_{n-1}\mathrm{C}_{r}\cdot p^{r}\cdot q^{(n-1)-r}}+\sum_{r=0}^{n-1} {}_{n-1}\mathrm{C}_{r}\cdot p^{r}\cdot q^{(n-1)-r}\right\}$$

$x-1=r$

이항분포 $\mathrm{B}(n-1, p)$의 확률질량함수가 $\mathrm{P}(X=x)={}_{n-1}\mathrm{C}_{x}\, p^{x}q^{(n-1)-x}$이므로 위 식은 $\mathrm{B}(n-1, p)$의 평균과 같다.

$$=np\{(n-1)p+(p+q)^{n-1}\}=np\{(n-1)p+1\}$$

$$=np(np-p+1)=np(np+q)$$

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$$

$$=np(np+q)-(np)^2=npq$$

[방법2] 이항계수의 성질을 이용하는 방법(p.84 (5)의 증명 참고)

이항정리에 의해 $(x+q)^n=\sum_{r=0}^{n} {}_{n}\mathrm{C}_{r}\, x^{r}q^{n-r}$이 성립하고, 이 등식의 양변을 x에 대해 미분하면 다음과 같다.

$$n(x+q)^{n-1}=\sum_{r=0}^{n} r\cdot {}_{n}\mathrm{C}_{r}\, x^{r-1}q^{n-r} \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

여기에 $x=p$를 대입하고, 양변에 p를 곱하면 다음과 같이 $\mathrm{E}(X)$가 나타난다.

$$n(p+q)^{n-1}=\sum_{r=0}^{n} r\cdot {}_{n}\mathrm{C}_{r}\, p^{r-1}q^{n-r} \;\Rightarrow\; np(p+q)^{n-1}=\sum_{r=0}^{n} r\cdot {}_{n}\mathrm{C}_{r}\, p^{r}q^{n-r}$$

$$\Rightarrow\; np=\sum_{r=0}^{n} r\cdot \mathrm{P}(X=r)=\mathrm{E}(X)$$

또한 ①의 양변을 한 번 더 x에 대해 미분하면 다음과 같다.

$$n(n-1)(x+q)^{n-2}=\sum_{r=0}^{n} r(r-1)\cdot {}_n\mathrm{C}_r\, x^{r-2}q^{n-r}$$

여기에 $x=p$를 대입하고, 양변에 p^2을 곱하면 다음과 같이 $\mathrm{E}(X^2)$이 나타난다.

$$n(n-1)(p+q)^{n-2}p^2=\sum_{r=0}^{n} r(r-1)\cdot {}_n\mathrm{C}_r\, p^r q^{n-r}$$

$$n(n-1)p^2=\sum_{r=0}^{n}(r^2-r)\cdot {}_n\mathrm{C}_r\, p^r q^{n-r}=\sum_{r=0}^{n} r^2\cdot {}_n\mathrm{C}_r\, p^r q^{n-r}-\sum_{r=0}^{n} r\cdot {}_n\mathrm{C}_r\, p^r q^{n-r}$$

$$=\sum_{r=0}^{n} r^2\cdot \mathrm{P}(X=r)-\sum_{r=0}^{n} r\cdot \mathrm{P}(X=r)=\mathrm{E}(X^2)-\mathrm{E}(X)$$

$$=\mathrm{E}(X^2)-np$$

$$\mathrm{E}(X^2)=np+n(n-1)p^2=np(np-p+1)=np(np+q)$$

따라서 분산은

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=np(np+q)-(np)^2=npq$$

예제2 완치율이 80%인 어떤 병을 앓는 환자 4명이 치료를 받고 있다. 완치된 환자 수를 X라 할 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) 확률변수 X의 평균과 분산을 구하시오.

(2) 환자 가운데 3명 이상이 완치될 확률을 구하시오.

★ 같은 시행을 독립적으로 반복할 때, 특정 사건이 일어나는 횟수에 대한 확률 문제는 독립시행의 확률로, 확률변수 문제는 이항분포로 접근한다.

풀이 같은 병을 앓는 환자 4명을 치료하는 것은 1명을 치료하는 시행을 네 번 반복하는 것으로 볼 수 있으며, 1명이 완치될 확률이 80%이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(4, \frac{4}{5}\right)$를 따른다.

(1) $\mathrm{E}(X)=4\times\frac{4}{5}=\frac{16}{5}$, $\mathrm{V}(X)=4\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{16}{25}$

(2) 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(4, \frac{4}{5}\right)$를 따르면 확률질량함수는 독립시행의 확률에 따라 다음과 같다.

$$\mathrm{P}(X=x)={}_4\mathrm{C}_x\left(\frac{4}{5}\right)^x\left(\frac{1}{5}\right)^{4-x}\ (\text{단, } x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

따라서 3명 이상의 환자가 완치될 확률은 다음과 같다.

$$\mathrm{P}(X\geq 3)=\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)={}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{4}{5}\right)^3\left(\frac{1}{5}\right)^1+{}_4\mathrm{C}_4\left(\frac{4}{5}\right)^4\left(\frac{1}{5}\right)^0=\frac{512}{625}$$

[2011학년도 수능 나형 #21]

예제3 동전 2개를 동시에 던지는 시행을 10회 반복할 때, 동전 2개 모두 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 하자. 확률변수 $4X+1$의 분산 $\mathrm{V}(4X+1)$의 값을 구하시오.

풀이 같은 시행을 10회 반복하고, 한 번의 시행에서 동전 2개 모두 앞면이 나올 확률이 $\frac{1}{4}$이므로 동전 2개 모두 앞면이 나오는 횟수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(10, \frac{1}{4}\right)$을 따른다.

이때, 확률변수 X의 분산은 $\mathrm{V}(X)=10\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{15}{8}$이고, 확률변수 $4X+1$의 분산은 다음과 같다.

$$\mathrm{V}(4X+1)=4^2\times\mathrm{V}(X)=16\times\frac{15}{8}=30$$

[2009학년도 수능 9월 모평 나형 #8]

예제4 한 개의 주사위를 던져 나온 눈의 수 a에 대하여 직선 $y=ax$와 곡선 $y=x^2-2x+4$가 서로 다른 두 점에서 만나는 사건을 A라 하자. 한 개의 주사위를 300회 던지는 독립시행에서 사건 A가 일어나는 횟수를 확률변수 X라 할 때, X의 평균 $\mathrm{E}(X)$를 구하시오.

풀이 직선 $y=ax$와 곡선 $y=x^2-2x+4$가 서로 다른 두 점에서 만나면 두 방정식을 연립하고 y를 소거해서 만든, x에 대한 이차방정식

$$ax=x^2-2x+4 \Rightarrow x^2-(a+2)x+4=0$$

이 서로 다른 두 실근을 갖는다. 이때, $D>0$이므로 a의 범위는 다음과 같다.

$$D=(a+2)^2-16=(a-2)(a+6)>0 \Rightarrow a<-6 \text{ 또는 } a>2$$

따라서 사건 A가 일어나는 것은 3 이상의 눈이 나오는 것과 같고, 주사위를 1번 던질 때 사건 A가 일어날 확률은 $\frac{2}{3}$가 된다. 그리고 주사위를 300번 던질 때 사건 A가 일어나는 횟수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(300, \frac{2}{3}\right)$를 따른다.

$$\therefore \mathrm{E}(X)=300\times\frac{2}{3}=200$$

[2014학년도 수능 A형 #9]

예제5 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(9, p)$를 따르고 $\{\mathrm{E}(X)\}^2=\mathrm{V}(X)$일 때, p의 값을 구하시오. (단, $0<p<1$)

풀이 이항분포 $\mathrm{B}(9, p)$를 따르는 확률변수 X의 평균과 분산

$$\mathrm{E}(X)=9p, \quad \mathrm{V}(X)=9p(1-p)$$

를 문제에 주어진 등식 $\{\mathrm{E}(X)\}^2=\mathrm{V}(X)$에 대입해서 p의 값을 계산하면 다음과 같다.

$$81p^2=9p(1-p) \Rightarrow 9p=1-p \Rightarrow p=\frac{1}{10}$$

예제6 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(25, p)$를 따르고, $\mathrm{P}(X=2)=48\mathrm{P}(X=1)$을 만족시킨다. 이때, 확률변수 X^2의 평균을 구하시오. (단, $0<p<1$)

풀이 이항분포 $\mathrm{B}(25, p)$를 따르는 확률변수 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)={}_{25}\mathrm{C}_x\, p^x(1-p)^{25-x} \quad (\text{단, } x=0, 1, 2, \cdots, 25)$$

이며, 문제에 주어진 등식 $\mathrm{P}(X=2)=48\mathrm{P}(X=1)$에 적용해서 p의 값을 계산하면 다음과 같다.

$${}_{25}\mathrm{C}_2\, p^2(1-p)^{23}=48\times{}_{25}\mathrm{C}_1\, p(1-p)^{24} \Rightarrow \frac{25\times24}{2}\times p=48\times25\times(1-p)$$

$$\Rightarrow p=\frac{4}{5}$$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(25, \frac{4}{5}\right)$를 따르고 평균, 분산이 각각

$$\mathrm{E}(X)=25\times\frac{4}{5}=20, \quad \mathrm{V}(X)=25\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}=4$$

이므로 X^2의 평균을 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2 \Rightarrow \mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2=4+20^2=404$$

예제7 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} {}_{10}\mathrm{C}_k \left(\frac{2}{5}\right)^k \left(\frac{3}{5}\right)^{10-k}$ (2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} k\cdot {}_{10}\mathrm{C}_k \left(\frac{2}{5}\right)^k \left(\frac{3}{5}\right)^{10-k}$

(3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} (2k+3)\cdot {}_{10}\mathrm{C}_k \left(\frac{2}{5}\right)^k \left(\frac{3}{5}\right)^{10-k}$ (4) $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} (k-4)^2 {}_{10}\mathrm{C}_k \left(\frac{2}{5}\right)^k \left(\frac{3}{5}\right)^{10-k}$

(5) $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} k^2\cdot {}_{10}\mathrm{C}_k \left(\frac{2}{5}\right)^k \left(\frac{3}{5}\right)^{10-k}$ (6) $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} (k+2)^2 {}_{10}\mathrm{C}_k \left(\frac{2}{5}\right)^k \left(\frac{3}{5}\right)^{10-k}$

풀이 (1)~(6)의 일반항에 공통으로 포함된 ${}_{10}\mathrm{C}_k \left(\frac{2}{5}\right)^k \left(\frac{3}{5}\right)^{10-k}$ 은 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$의 확률질량함수 $\mathrm{P}(X=x)={}_n\mathrm{C}_x\, p^x q^{n-x}$ 과 같은 꼴이다. 둘을 비교하면 $n=10,\ x=k,\ p=\frac{2}{5},\ q=\frac{3}{5}$이므로 이항분포 $\mathrm{B}\left(10,\ \frac{2}{5}\right)$와 (1)~(6)의 관계를 생각하면서 문제를 풀어보자.

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(10,\ \frac{2}{5}\right)$를 따를 때

(1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} {}_{10}\mathrm{C}_k \left(\frac{2}{5}\right)^k \left(\frac{3}{5}\right)^{10-k} = \sum_{x=0}^{10}\mathrm{P}(X=x)=\begin{pmatrix} X\text{에 대한} \\ \text{모든 확률의 합}\end{pmatrix}=1$

(2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} k\cdot {}_{10}\mathrm{C}_k \left(\frac{2}{5}\right)^k \left(\frac{3}{5}\right)^{10-k} = \sum_{x=0}^{10} x\cdot\mathrm{P}(X=x)$

$=\{(X\text{의 값})\times(\text{확률})\text{의 합}\}$

$=\mathrm{E}(X)=10\times\frac{2}{5}=4$

(3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} (2k+3)\cdot {}_{10}\mathrm{C}_k \left(\frac{2}{5}\right)^k \left(\frac{3}{5}\right)^{10-k} = \sum_{x=0}^{10}(2x+3)\cdot\mathrm{P}(X=x)$

$\displaystyle=\sum_{x=0}^{10}(2x+3)\cdot\mathrm{P}(2X+3=2x+3)$

$=\{(2X+3\text{의 값})\times(\text{확률})\text{의 합}\}$

$=\mathrm{E}(2X+3)=2\mathrm{E}(X)+3=11$

(4) $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} (k-4)^2 {}_{10}\mathrm{C}_k \left(\frac{2}{5}\right)^k \left(\frac{3}{5}\right)^{10-k} = \sum_{x=0}^{10}\{x-\mathrm{E}(X)\}^2\cdot\mathrm{P}(X=x)$

$=\{(X\text{의 편차})^2\times(\text{확률})\text{의 합}\}$

$=\mathrm{V}(X)=10\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{12}{5}$

(5) $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} k^2\cdot {}_{10}\mathrm{C}_k \left(\frac{2}{5}\right)^k \left(\frac{3}{5}\right)^{10-k} = \sum_{x=0}^{10}x^2\cdot\mathrm{P}(X=x)=\sum_{x=0}^{10}x^2\cdot\underline{\mathrm{P}(X^2=x^2)}$

$=\{(X^2\text{의 값})\times(\text{확률})\text{의 합}\}$

$=\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=\frac{12}{5}+4^2=\frac{92}{5}$

확률변수 X가 이항분포를 따르면 0 또는 자연숫값만 가지므로 X가 가질 수 있는 값과 X^2이 가질 수 있는 값이 일대일대응을 이루면서 $\mathrm{P}(X=x)=\mathrm{P}(X^2=x^2)$이 성립한다.

(6) $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} (k+2)^2 {}_{10}\mathrm{C}_k \left(\frac{2}{5}\right)^k \left(\frac{3}{5}\right)^{10-k} = \sum_{x=0}^{10}(x^2+4x+4)\cdot\mathrm{P}(X=x)$

$\displaystyle=\sum_{x=0}^{10}x^2\cdot\mathrm{P}(X=x)+4\sum_{x=0}^{10}x\cdot\mathrm{P}(X=x)$

$\displaystyle+4\sum_{x=0}^{10}\mathrm{P}(X=x)$

$=\mathrm{E}(X^2)+4\mathrm{E}(X)+4\times1$

$=\frac{92}{5}+4\times4+4=\frac{192}{5}$

이항분포의 성질

• 이항분포에서 분산의 최댓값

이항분포 $\mathrm{B}(n,\,p)$를 따르는 확률변수 X의 분산 $\mathrm{V}(X)$는

$$\mathrm{V}(X)=npq=np(1-p)\ (\text{단, } q=1-p)$$

이다. 이때, 시행 횟수 n의 값이 일정하다면 $\mathrm{V}(X)$는 확률 p에 대한 이차함수이므로 다음과 같이 완전제곱꼴로 변형할 수 있다.

$$\mathrm{V}(X)=np(1-p)=-np^2+np=-n\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{n}{4}$$

따라서 이항분포 $\mathrm{B}(n,\,p)$의 분산 $\mathrm{V}(X)$는 $p=\frac{1}{2}$일 때 최댓값 $\frac{n}{4}$을 갖는다.

• 이항분포에서 시행 횟수에 따른 확률분포의 변화

주사위 1개를 던지는 시행을 n번 반복할 때, 1의 눈이 나오는 횟수를 X라 하면 X는 확률변수가 되고, 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\,\frac{1}{6}\right)$을 따른다.

그리고 X의 평균이 $\mathrm{E}(X)=\frac{n}{6}$, 분산이 $\mathrm{V}(X)=\frac{5n}{36}$이므로 n의 값이 증가하면 평균과 분산도 함께 증가하게 된다. 이때, 확률분포의 그래프는 평균의 증가에 의해 분포의 중심이 오른쪽으로 이동하고, 분산의 증가에 의해 그래프의 폭이 넓어지게 된다.

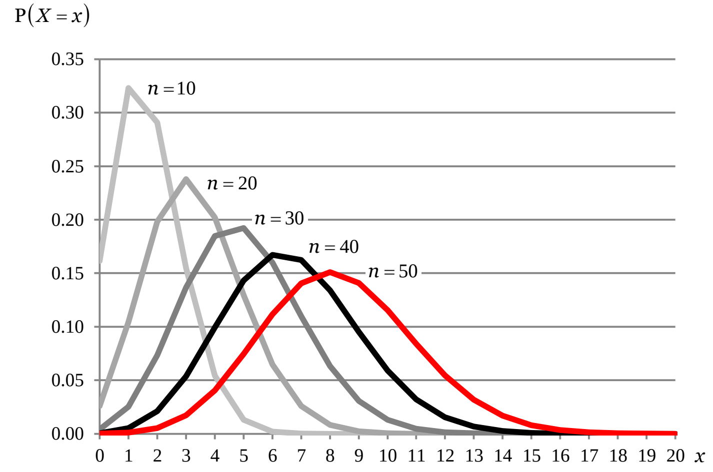
이 경향을 눈으로 확인하기 위해 몇 개의 n값에 대한 확률분포의 그래프를 그려보자. 확률변수 X의 확률질량함수

$$\mathrm{P}(X=x)={}_n\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{6}\right)^x\left(\frac{5}{6}\right)^{n-x}\ (\text{단, } x=0,\,1,\,2,\,\cdots,\,n)$$

로 $n=10$일 때의 확률 $\mathrm{P}(X=0)\sim\mathrm{P}(X=10)$, $n=20$일 때의 확률 $\mathrm{P}(X=0)\sim\mathrm{P}(X=20)$, $\cdots$, $n=50$일 때의 확률 $\mathrm{P}(X=0)\sim\mathrm{P}(X=50)$을 계산해서 표로 정리하고, 확률분포를 꺾은선 그래프로 나타내면 다음과 같다.

X	$\mathrm{P}(X=x)$				
	$n=10$	$n=20$	$n=30$	$n=40$	$n=50$
0	0.1615	0.0261	0.0042	0.0007	0.0001
1	0.3230	0.1043	0.0253	0.0054	0.0011
2	0.2907	0.1982	0.0733	0.0212	0.0054
3	0.1550	0.2379	0.1368	0.0538	0.0172
4	0.0543	0.2022	0.1847	0.0995	0.0405
5	0.0130	0.1294	0.1921	0.1433	0.0745
6	0.0022	0.0647	0.1601	0.1671	0.1118
7	0.0002	0.0259	0.1098	0.1624	0.1405
8	0.0000	0.0084	0.0631	0.1340	0.1510
9	0.0000	0.0022	0.0309	0.0953	0.1410
10	0.0000	0.0005	0.0130	0.0591	0.1156
11		0.0001	0.0047	0.0322	0.0841
12		0.0000	0.0015	0.0156	0.0546
13		0.0000	0.0004	0.0067	0.0319
14		0.0000	0.0001	0.0026	0.0169
15		0.0000	0.0000	0.0009	0.0081
16		0.0000	0.0000	0.0003	0.0035
17		0.0000	0.0000	0.0001	0.0014
18		0.0000	0.0000	0.0000	0.0005
19		0.0000	0.0000	0.0000	0.0002
20		0.0000	0.0000	0.0000	0.0001

※ $X=21,\,22,\,\cdots,\,50$일 때는 확률이 작아서 표시하지 않음



이처럼 확률분포의 그래프에서도 n의 값이 증가할수록 평균과 분산이 증가하는 경향을 분포 중심의 이동과 그래프의 폭 변화로 확인할 수 있다.

또한 n의 값이 증가할수록 확률분포의 그래프 모양은 평균을 기준으로 좌우대칭에 가까워지며, 최댓값이 감소한다는 점도 알 수 있다.

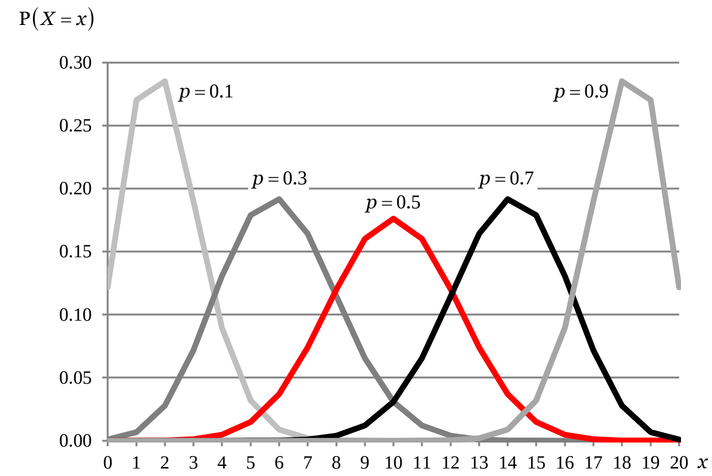
• 이항분포에서 확률의 변화에 따른 확률분포의 변화

이번에는 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(20, p)$를 따를 때, n의 값이 일정한 상태에서 p의 값이 증가할 때의 확률분포를 조사해보자. 확률질량함수

$$\mathrm{P}(X=x)={}_{20}\mathrm{C}_{x}\,p^{x}(1-p)^{20-x}\ \ (\text{단, } x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 20)$$

으로 $p=0.1,\ 0.3,\ \cdots,\ 0.9$일 때의 확률 $\mathrm{P}(X=0)\sim\mathrm{P}(X=20)$을 계산해서 표로 정리하고, 확률분포를 꺾은선 그래프로 나타내면 다음과 같다.

X	$\mathrm{P}(X=x)$				
	$p=0.1$	$p=0.3$	$p=0.5$	$p=0.7$	$p=0.9$
0	0.1216	0.0008	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.2702	0.0068	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.2852	0.0278	0.0002	0.0000	0.0000
3	0.1901	0.0716	0.0011	0.0000	0.0000
4	0.0898	0.1304	0.0046	0.0000	0.0000
5	0.0319	0.1789	0.0148	0.0000	0.0000
6	0.0089	0.1916	0.0370	0.0002	0.0000
7	0.0020	0.1643	0.0739	0.0010	0.0000
8	0.0004	0.1144	0.1201	0.0039	0.0000
9	0.0001	0.0654	0.1602	0.0120	0.0000
10	0.0000	0.0308	0.1762	0.0308	0.0000
11	0.0000	0.0120	0.1602	0.0654	0.0001
12	0.0000	0.0039	0.1201	0.1144	0.0004
13	0.0000	0.0010	0.0739	0.1643	0.0020
14	0.0000	0.0002	0.0370	0.1916	0.0089
15	0.0000	0.0000	0.0148	0.1789	0.0319
16	0.0000	0.0000	0.0046	0.1304	0.0898
17	0.0000	0.0000	0.0011	0.0716	0.1901
18	0.0000	0.0000	0.0002	0.0278	0.2852
19	0.0000	0.0000	0.0000	0.0068	0.2702
20	0.0000	0.0000	0.0000	0.0008	0.1216



이처럼 확률분포의 그래프는 p의 값이 증가할수록 분포의 중심이 오른쪽으로 이동함을 알 수 있다.

그리고 p의 값이 0.5에 가까울수록 그래프 모양이 평균을 기준으로 좌우대칭에 가까워지면서 최댓값이 감소하고, 그래프 폭이 증가한다는 점도 확인할 수 있다.

앞 페이지에서 설명했듯이 n의 값이 일정하면 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$의 분산은 $p=0.5$일 때 최대이므로 p의 값이 0.5에 가까울수록 그래프의 폭이 넓어진다.

공부하다

박수칠 수학 기본서

박상칠 지음

미적분Ⅱ

새 교육과정

Orbi.kr
1등급이 되는 책
Designed by Orbi in Seoul

6 여러 가지 미분법

미적분Ⅰ에서는 다항함수의 도함수를 구하는데 필요한 미분법의 기본 공식을 공부했다. 미적분Ⅱ에서는 보다 다양한 함수의 도함수를 구할 수 있도록 함수의 몫의 미분법, 합성함수의 미분법, 역함수의 미분법을 배우게 된다.

그럼 함수식이 분수꼴로 표현된 함수를 미분하는데 필요한 함수의 몫의 미분법부터 알아보도록 하자.

함수의 몫의 미분법

• 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능하고 $g(x)\neq 0$일 때, 함수 $y=\frac{f(x)}{g(x)}$의 도함수는 다음과 같다.

$$\boldsymbol{y=\frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow y'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}}$$

여기서 $f(x)=1$일 때, 즉 함수 $y=\frac{1}{g(x)}$의 도함수는 다음과 같다.

$$\boldsymbol{y=\frac{1}{g(x)} \Rightarrow y'=-\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}}$$

★ 위 공식을 증명하기 위해서는 도함수의 정의로 $y=\frac{1}{g(x)}$의 도함수를 유도한 다음, 함수의 곱의 미분법으로 $y=\frac{f(x)}{g(x)}$의 도함수를 유도하면 된다.

먼저 $y=\frac{1}{g(x)}$의 도함수는 다음과 같이 유도된다.

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{g(x+\Delta x)}-\frac{1}{g(x)}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left\{\frac{1}{\Delta x}\times\frac{g(x)-g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)}\right\}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left\{-\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\times\frac{1}{g(x+\Delta x)g(x)}\right\}$$
$$=-g'(x)\times\frac{1}{\{g(x)\}^2}=-\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

다음으로 $y=\frac{f(x)}{g(x)}$를 $y=f(x)\times\frac{1}{g(x)}$로 보고 함수의 곱의 미분법을 적용하면 다음과 같다.

$$y'=f'(x)\times\frac{1}{g(x)}+f(x)\times\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}'=\frac{f'(x)}{g(x)}+f(x)\times\left[-\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}\right]$$
$$=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

[예1] 함수 $y=\frac{x^2-1}{x+2}$의 도함수

$$y'=\frac{(x^2-1)'(x+2)-(x^2-1)(x+2)'}{(x+2)^2}=\frac{2x(x+2)-(x^2-1)\cdot 1}{(x+2)^2}=\frac{x^2+4x+1}{(x+2)^2}$$

[예2] 함수 $y=\frac{1}{2x^3+x}$의 도함수

$$y'=-\frac{(2x^3+x)'}{(2x^3+x)^2}=-\frac{6x^2+1}{(2x^3+x)^2}$$

예제1 다음 함수의 도함수를 구하여라.

(1) $y=\frac{x^2-2}{x^2+x}$ (2) $y=\frac{4}{e^x+1}$ (3) $y=\frac{\cos x+1}{\sin x}$

풀이 (1) $y'=\frac{(x^2-2)'(x^2+x)-(x^2-2)(x^2+x)'}{(x^2+x)^2}$
$$=\frac{2x(x^2+x)-(x^2-2)(2x+1)}{(x^2+x)^2}=\frac{x^2+4x+2}{(x^2+x)^2}$$

(2) $y'=4\times\left(\frac{1}{e^x+1}\right)'=4\times\left\{-\frac{(e^x+1)'}{(e^x+1)^2}\right\}=4\times\left\{-\frac{e^x}{(e^x+1)^2}\right\}=-\frac{4e^x}{(e^x+1)^2}$

(3) $y'=\frac{(\cos x+1)'\sin x-(\cos x+1)(\sin x)'}{\sin^2 x}=\frac{(-\sin x)\sin x-(\cos x+1)\cos x}{\sin^2 x}$
$$=\frac{-1-\cos x}{\sin^2 x}=-\frac{1+\cos x}{1-\cos^2 x}=-\frac{1+\cos x}{(1+\cos x)(1-\cos x)}=\frac{1}{\cos x-1}$$

★ n이 양의 정수일 때, 함수 $y=x^n$의 도함수는 $y'=nx^{n-1}$이다. 그리고 함수의 몫의 미분법으로 n이 음의 정수일 때 함수 $y=x^n$의 도함수가 $y'=nx^{n-1}$임을 보일 수 있다. (단, $x\neq0$)

> n이 음의 정수일 때, $n=-m$ (m은 양의 정수)으로 두면 함수 $y=x^n$의 도함수는 다음과 같다.
>
> $$y'=(x^n)'=(x^{-m})'=\left(\frac{1}{x^m}\right)'=-\frac{(x^m)'}{(x^m)^2}=-\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}}=-mx^{-m-1}=nx^{n-1}$$
>
> $\therefore y'=nx^{n-1}$

또한 $n=0$일 때도

> 함수 $y=1=x^0$의 도함수는 $y'=0=0\cdot x^{-1}$이다.

이므로 n이 정수일 때 함수 $y=x^n$의 도함수는 $y'=nx^{n-1}$이 된다.

$$\boldsymbol{y=x^n} \Rightarrow \boldsymbol{y'=nx^{n-1}}$$

(단, n은 정수, $x\neq0$)

[예1] 함수 $y=\dfrac{1}{x^3}$의 도함수

$$y'=(x^{-3})'=-3x^{-4}=-\frac{3}{x^4}$$

[예2] 함수 $y=\dfrac{3x^4-2x^2+4}{x^3}$의 도함수

$$y=\frac{3x^4}{x^3}-\frac{2x^2}{x^3}+\frac{4}{x^3}=3x-2x^{-1}+4x^{-3}$$

분수함수의 분모가 단항식이면 분자도 단항식이 되도록 분리한 다음 미분한다.

$$y'=3-2(-x^{-2})+4(-3x^{-4})=3+\frac{2}{x^2}-\frac{12}{x^4}$$

★ $p.128$에서 공부한 사인함수, 코사인함수의 미분에 함수의 몫의 미분법을 적용하면 나머지 삼각함수들을 미분할 수 있다.

(3) $$(\tan x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'(\cos x)-(\sin x)(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$$

(4) $$(\cot x)'=\left(\frac{1}{\tan x}\right)'=-\frac{(\tan x)'}{\tan^2 x}=-\frac{\sec^2 x}{\tan^2 x}=-\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}=-\frac{1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x$$

(5) $$(\sec x)'=\left(\frac{1}{\cos x}\right)'=-\frac{(\cos x)'}{\cos^2 x}=-\frac{-\sin x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos x}\times\frac{\sin x}{\cos x}=\sec x\tan x$$

(6) $$(\csc x)'=\left(\frac{1}{\sin x}\right)'=-\frac{(\sin x)'}{\sin^2 x}=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin x}\times\frac{\cos x}{\sin x}=-\csc x\cot x$$

지금까지 설명한 삼각함수 $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$, $\csc x$의 미분을 요약하면 다음과 같다.

삼각함수의 미분

(1) $\boldsymbol{y=\sin x} \Rightarrow \boldsymbol{y'=\cos x}$

(2) $\boldsymbol{y=\cos x} \Rightarrow \boldsymbol{y'=-\sin x}$

(3) $\boldsymbol{y=\tan x} \Rightarrow \boldsymbol{y'=\sec^2 x}$

(4) $\boldsymbol{y=\cot x} \Rightarrow \boldsymbol{y'=-\csc^2 x}$

(5) $\boldsymbol{y=\sec x} \Rightarrow \boldsymbol{y'=\sec x\tan x}$

(6) $\boldsymbol{y=\csc x} \Rightarrow \boldsymbol{y'=-\csc x\cot x}$

★ 다음을 기억해두면 위 공식들을 효과적으로 암기할 수 있다.

▷ c로 시작되는 삼각함수 $\cos x$, $\cot x$, $\csc x$의 도함수에는 (−)가 붙는다.

▷ 공식 (3)의 탄젠트와 시컨트에 '코'를 붙이면 공식 (4)가 나타난다. 마찬가지로 공식 (5)의 시컨트와 탄젠트에 '코'를 붙이면 공식 (6)이 된다.

예제2 다음 함수의 도함수를 구하여라.

(1) $y=2\tan x-\csc x$ (2) $y=\dfrac{\cos x+1}{\sin x}$ (3) $y=\sec x\tan x$

풀이 (1) $y'=2\sec^2 x-(-\csc x\cot x)=2\sec^2 x+\csc x\cot x$

(2) $y=\dfrac{\cos x}{\sin x}+\dfrac{1}{\sin x}=\cot x+\csc x$

$y'=-\csc^2 x+(-\csc x\cot x)=-\csc^2 x-\csc x\cot x$

(3) $y'=(\sec x)'(\tan x)+(\sec x)(\tan x)'$

$=(\sec x\tan x)(\tan x)+(\sec x)(\sec^2 x)=\sec x\tan^2 x+\sec^3 x$

$=(\sec x)(\sec^2 x-1)+\sec^3 x=2\sec^3 x-\sec x$

예제3 함수 $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x+1}$에 대하여 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(\pi+h)-f(\pi-2h)}{3h}$의 값을 구하여라.

풀이 주어진 극한을 미분계수의 정의에 맞춰 변형하면 다음과 같다.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\pi+h)-f(\pi-2h)}{3h}=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(\pi+h)-f(\pi)\}-\{f(\pi-2h)-f(\pi)\}}{3h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(\pi+h)-f(\pi)}{3h}-\frac{f(\pi-2h)-f(\pi)}{3h}\right\}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(\pi+h)-f(\pi)}{h}\times\frac{1}{3}+\frac{f(\pi-2h)-f(\pi)}{-2h}\times\frac{2}{3}\right\}$$

$$=f'(\pi)\times\frac{1}{3}+f'(\pi)\times\frac{2}{3}=f'(\pi)$$

도함수 $f'(x)$와 미분계수 $f'(\pi)$를 차례로 계산하면 다음과 같다.

$$f'(x)=\frac{(\cos x)'(\sin x+1)-(\cos x)(\sin x+1)'}{(\sin x+1)^2}$$

$$=\frac{(-\sin x)(\sin x+1)-(\cos x)(\cos x)}{(\sin x+1)^2}=-\frac{1+\sin x}{(\sin x+1)^2}=-\frac{1}{\sin x+1}$$

$$f'(\pi)=-\frac{1}{\sin\pi+1}=-1$$

★ 미적분Ⅰ $p.108$의 예제12에서 설명했던 것처럼 $\Delta y=f(\pi+h)-f(\pi-2h)$로 보면 $\Delta x=(\pi+h)-(\pi-2h)=3h$이므로

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(\pi+h)-f(\pi-2h)}{3h}$$

로 쓸 수 있으며, 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 두 점 $(\pi+h,\ f(\pi+h))$와 $(\pi-2h,\ f(\pi-2h))$를 이은 직선의 기울기와 같다. 그리고 $h\to 0$일 때

$$(\pi+h,\ f(\pi+h))\to(\pi,\ f(\pi)),\ (\pi-2h,\ f(\pi-2h))\to(\pi,\ f(\pi))$$

이고, 함수 $y=f(x)$가 $x=\pi$에서 미분가능하므로 $\dfrac{f(\pi+h)-f(\pi-2h)}{3h}$는 점 $(\pi,\ f(\pi))$에서의 접선 기울기 $f'(\pi)$로 수렴한다. 따라서

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\pi+h)-f(\pi-2h)}{3h}=f'(\pi)$$

로 계산할 수도 있다.

함수 $y=\left(2x^3+x-3\right)^2$은 두 함수 $y=u^2$, $u=2x^3+x-3$을 합성한 것과 같고, 각 함수의 도함수가

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\left\{\left(2x^3+x-3\right)\left(2x^3+x-3\right)\right\}'\\&=\left(6x^2+1\right)\left(2x^3+x-3\right)+\left(2x^3+x-3\right)\left(6x^2+1\right)\\&=2\left(2x^3+x-3\right)\left(6x^2+1\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{du}&=2u\\&=2\left(2x^3+x-3\right)\end{aligned}$$

$$\frac{du}{dx}=6x^2+1$$

이므로 다음 관계가 성립함을 알 수 있다.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

또한 첫 번째 줄의 세 함수를 각각 $y=f(g(x))$, $y=f(u)$, $u=g(x)$로 두면

$$\frac{dy}{dx}=\{f(g(x))\}' \qquad \frac{dy}{du}=f'(u)=f'(g(x)) \qquad \frac{du}{dx}=g'(x)$$

이므로 ①에 의해 다음 관계도 성립함을 알 수 있다.

$$\{f(g(x))\}'=f'(g(x))g'(x)$$

합성함수의 미분법 Ⅰ

• 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능하고, 합성함수 $f(g(x))$가 정의될 때 다음이 성립한다.

겉미분

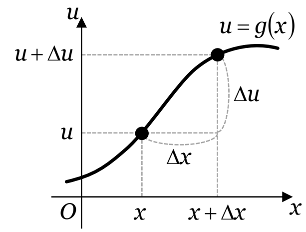
$$\boldsymbol{y=f(g(x))} \Rightarrow \boldsymbol{y'=f'(g(x))g'(x)}$$

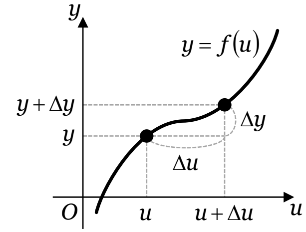
그대로

속미분

∵ 합성함수의 미분법을 증명하기 위해서는 합성함수 $y=f(g(x))$를 두 함수 $y=f(u)$와 $u=g(x)$로 분리해야 한다.

그리고 함수 $u=g(x)$에서 x의 값이 x부터 $x+\Delta x$까지 변할 때 u의 값이 u부터 $u+\Delta u$까지 변하고, 함수 $y=f(u)$에서 u의 값이 u부터 $u+\Delta u$까지 변할 때 y의 값이 y부터 $y+\Delta y$까지 변한다고 하자.





이때, 두 함수 $u=g(x)$, $y=f(u)$의 도함수가 각각

$$g'(x)=\frac{du}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} \qquad f'(u)=\frac{dy}{du}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}$$

이므로 함수 $y=f(g(x))$의 도함수는 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned}\{f(g(x))\}'&=\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\times\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)=\left(\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\right)\times\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\\&=f'(u)g'(x)=f'(g(x))g'(x)\end{aligned}$$

함수 $u=g(x)$가 연속함수이므로 $\Delta x\to 0$일 때 $\Delta u\to 0$이다.

[예1] 함수 $y=\sin\left(x^2+x\right)$의 도함수

(1) $f(x)=\sin x$, $g(x)=x^2+x$로 두면 주어진 함수는 $y=f(g(x))$이며, 도함수는 다음과 같다.

$$f'(x)=\cos x,\ g'(x)=2x+1$$

$$y'=f'(g(x))g'(x)=\left\{\cos\left(x^2+x\right)\right\}(2x+1)=(2x+1)\cos\left(x^2+x\right)$$

(2) (1)과 같이 치환해서 미분하는 것은 번거롭기 때문에 실제 문제를 풀 때는 다음과 같이 한 번에 계산한다.

겉미분

$$y'=\left\{\sin\left(x^2+x\right)\right\}'=\left\{\cos\left(x^2+x\right)\right\}(2x+1)=(2x+1)\cos\left(x^2+x\right)$$

그대로

속미분

[예2] 우함수의 도함수가 기함수임을 증명하기

미분가능한 함수 $f(x)$가 우함수면

$f(-x)=f(x)$

가 성립하며, 양변을 x에 대해 미분하면 오른쪽과 같다.

$f'(-x)\cdot(-x)'=f'(x)$

$f'(-x)\cdot(-1)=f'(x)$

$f'(-x)=-f'(x)$

$\therefore$ 우함수의 도함수는 기함수다.

예제1 다음 함수의 도함수를 구하여라.

(1) $y=(x^3-x+2)^4$ (2) $y=\dfrac{4}{(x^2+2x)^3}$ (3) $y=\sin^2 x\cos^3 x$

★ n이 정수일 때, 함수 $y=\{f(x)\}^n$의 도함수는 $y=n\{f(x)\}^{n-1}f'(x)$이다.

겉미분

$$\left[\{f(x)\}^n\right]'=n\{f(x)\}^{n-1}f'(x)$$

그대로

속미분

$\because$ $g(x)=x^n$으로 두면 $\{f(x)\}^n=g(f(x))$이다. 그리고 $g'(x)=nx^{n-1}$이므로 합성함수의 미분법 I에 의해 도함수는 다음과 같다.

$$\{g(f(x))\}'=g'(f(x))f'(x)=n\{f(x)\}^{n-1}f'(x)$$

풀이 (1) $y'=4(x^3-x+2)^3(x^3-x+2)'=4(x^3-x+2)^3(3x^2-1)$

(2) 주어진 함수를 $y=4(x^2+2x)^{-3}$으로 변형하면 다음과 같이 미분된다.

$$y'=4\left\{-3(x^2+2x)^{-4}\right\}(x^2+2x)'=-12\times\frac{1}{(x^2+2x)^4}\times(2x+2)=-\frac{24(x+1)}{x^4(x+2)^4}$$

(3) $(\sin^2 x)'=\left\{(\sin x)^2\right\}'=2\sin x\cos x$

$(\cos^3 x)'=\left\{(\cos x)^3\right\}'=(3\cos^2 x)(-\sin x)=-3\sin x\cos^2 x$

이므로 주어진 함수는 다음과 같이 미분된다.

$$\begin{aligned}y'&=(\sin^2 x)'(\cos^3 x)+(\sin^2 x)(\cos^3 x)'\\&=(2\sin x\cos x)(\cos^3 x)+(\sin^2 x)(-3\sin x\cos^2 x)\\&=2\sin x\cos^3 x-3\sin^3 x\cos^2 x\end{aligned}$$

예제2 다음 함수의 도함수를 구하여라.

(1) $y=\cos(\tan x)$ (2) $y=\ln(x^2+2x+3)$ (3) $y=e^{\sec x}$

풀이 (1) $f(x)=\cos x$, $g(x)=\tan x$로 두면 주어진 함수는 $y=f(g(x))$이며, 도함수는 다음과 같다.

$f'(x)=-\sin x$, $g'(x)=\sec^2$

$y'=f'(g(x))g'(x)=\{-\sin(\tan x)\}(\sec^2 x)=-\sec^2 x\sin(\tan x)$

(2) $f(x)=\ln x$, $g(x)=x^2+2x+3$으로 두면 주어진 함수는 $y=f(g(x))$이며, 도함수는 다음과 같다.

$f'(x)=\dfrac{1}{x}$, $g'(x)=2x+2$

$$y'=f'(g(x))g'(x)=\frac{1}{x^2+2x+3}\times(2x+2)'=\frac{2x+2}{x^2+2x+3}$$

(3) $f(x)=e^x$, $g(x)=\sec x$로 두면 주어진 함수는 $y=f(g(x))$이며, 도함수는 다음과 같다.

$f'(x)=e^x$, $g'(x)=\sec x\tan x$

$y'=f'(g(x))g'(x)=e^{\sec x}\sec x\tan x$

예제3 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$가

$$f(x^3)=2x^3-x^2+32x$$

를 만족시킬 때, $f'(1)$의 값을 구하여라.

풀이 주어진 등식의 좌변과 우변을 각각 x에 대해 미분하면

$\{f(x^3)\}'=f'(x^3)\times(x^3)'=f'(x^3)\times 3x^2$

$(2x^3-x^2+32x)'=6x^2-2x+32$

이므로 $f'(x^3)\times3x^2=6x^2-2x+32$가 성립하고, 여기에 $x=1$을 대입하면 다음과 같이 $f'(1)$의 값이 나타난다.

$f'(1)\times3=36 \Rightarrow f'(1)=12$

★ p.133의 합성함수 미분법 증명에는 다음 과정이 포함되어 있다.

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\times\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)=\left(\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\right)\times\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

여기서 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$가 성립함을 알 수 있으며, 합성함수를 미분할 때 이용할 수 있다.

합성함수의 미분법 Ⅱ

• 두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$의 도함수 $\frac{dy}{du}$, $\frac{du}{dx}$가 모두 존재하면, 합성함수 $y=f(g(x))$의 도함수 $\frac{dy}{dx}$는 $\frac{dy}{du}$, $\frac{du}{dx}$의 곱과 같다.

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}}$$

분수처럼 du가 약분된다고 보면 쉽게 이해된다.

합성함수의 미분법 Ⅱ는 세 개 이상의 함수에 대해서도 성립한다.

• 세 함수 $y=f(v)$, $v=g(u)$, $u=h(x)$의 도함수 $\frac{dy}{dv}$, $\frac{dv}{du}$, $\frac{du}{dx}$가 모두 존재하면, 합성함수 $y=f(g(h(x)))$의 도함수 $\frac{dy}{dx}$는 $\frac{dy}{dv}$, $\frac{dv}{du}$, $\frac{du}{dx}$의 곱과 같다.

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dv}\cdot\frac{dv}{du}\cdot\frac{du}{dx}}$$

분수처럼 dv, du가 약분된다고 보면 쉽게 이해된다.

[예1] 함수 $y=\frac{\cos(x^2+x)}{\sin(x^2+x)+1}$의 도함수

주어진 함수식을 그대로 미분하는 것은 계산이 복잡하므로 반복되는 식 x^2+x를 u로 치환해서 두 함수 $y=\frac{\cos u}{\sin u+1}$, $u=x^2+x$로 분리한 다음, 합성함수의 미분법 Ⅱ를 적용한다.

$$\frac{dy}{du}=\frac{(-\sin u)(\sin u+1)-(\cos u)(\cos u)}{(\sin u+1)^2}=-\frac{1}{\sin u+1}=-\frac{1}{\sin(x^2+x)+1}$$

$$\frac{du}{dx}=2x+1$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=-\frac{1}{\sin(x^2+x)+1}\times(2x+1)=-\frac{2x+1}{\sin(x^2+x)+1}$$

[예2] 함수 $y=2\cos(3x^2+x)^4$의 도함수

$3x^2+x=u$로 두면 $y=2\cos u^4$이 되고, 다시 $u^4=v$로 두면 $y=2\cos v$가 된다. 따라서 주어진 함수는 세 함수 $y=2\cos v$, $v=u^4$, $u=3x^2+x$로 분리되며, 합성함수의 미분법 Ⅱ를 적용하면 다음과 같다.

$$\frac{dy}{dv}=-2\sin v=-2\sin u^4=-2\sin(3x^2+x)^4$$

$$\frac{dv}{du}=4u^3=4(3x^2+x)^3 \qquad \frac{du}{dx}=6x+1$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dv}\cdot\frac{dv}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\left\{-2\sin(3x^2+x)^4\right\}\times 4(3x^2+x)^3\times(6x+1)$$
$$=-8(6x+1)(3x^2+x)^3\sin(3x^2+x)^4$$

합성함수의 미분법 Ⅰ을 두 번 반복해서 도함수를 구할 수도 있다. 첫 번째로 $f(x)=2\cos x$, $g(x)=(3x^2+x)^4$로 보고 $\{f(g(x))\}'=f'(g(x))g'(x)$를 적용하면

겉미분

$$y'=\left\{2\cos(3x^2+x)^4\right\}'=\left\{-2\sin(3x^2+x)^4\right\}\times\left\{(3x^2+x)^4\right\}'$$

그대로

속미분

가 되고, 두 번째로 속미분 $\left\{(3x^2+x)^4\right\}'$에서 $f(x)=x^4$, $g(x)=3x^2+x$로 보고 $\{f(g(x))\}'=f'(g(x))g'(x)$를 적용하면 다음과 같다.

$$y'=\left\{-2\sin(3x^2+x)^4\right\}\times 4(3x^2+x)^3\times(3x^2+x)'$$
$$=\left\{-2\sin(3x^2+x)^4\right\}\times 4(3x^2+x)^3\times(6x+1)$$
$$=-8(6x+1)(3x^2+x)^3\sin(3x^2+x)^4$$

★ $p.131$에서 설명했듯이 n이 정수일 때, 함수 $y=x^n$의 도함수는 $y'=nx^{n-1}$이다. 그리고 합성함수의 미분법으로 n이 유리수일 때도 함수 $y=x^n$의 도함수가 $y'=nx^{n-1}$임을 보일 수 있다. (단, $x>0$)

$n=\dfrac{q}{p}$ (p는 자연수, q는 정수)로 두면 함수 $y=x^n$은 $y=x^{\frac{q}{p}}$과 같고, 양변을 p제곱하면 $y^p=x^q$이 된다. 여기서 양변을 z로 두면 두 함수 $z=y^p$, $z=x^q$으로 분리되고, 각각의 도함수는 다음과 같다.

$$\frac{dz}{dy}=py^{p-1},\ \frac{dz}{dx}=qx^{q-1} \quad \cdots\cdots ①$$

☆ p가 자연수일 때

$p=1$이면 $x^{\frac{q}{p}}=x^q$

$p\geq 2$이면 $x^{\frac{q}{p}}=\sqrt[p]{x^q}$

그리고 합성함수의 미분법 Ⅱ에 의해

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$$

가 성립하고, ①을 여기에 대입하면 함수 $y=x^n$의 도함수가 된다.

$$qx^{q-1}=py^{p-1}\times\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{qx^{q-1}}{py^{p-1}}=\frac{q}{p}\times\frac{x^{q-1}}{\left(x^{\frac{q}{p}}\right)^{p-1}}=\frac{q}{p}\times\frac{x^{q-1}}{x^{q-\frac{q}{p}}}=\frac{q}{p}\times x^{\frac{q}{p}-1}=nx^{n-1}$$

$\therefore y'=nx^{n-1}$

따라서 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\boxed{y=x^n} \Rightarrow \boxed{y'=nx^{n-1}}$$

(단, n은 유리수, $x>0$)

[예1] 함수 $y=\sqrt{x}+x\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}$의 도함수

각각의 거듭제곱근을 거듭제곱으로 바꾼 다음 미분하면 다음과 같다.

$$y=x^{\frac{1}{2}}+x\cdot x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{2}{3}}=x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{2}{3}}$$

$$y'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{3}{2}\sqrt{x}+\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

[예2] 함수 $y=\sqrt{2x^3+x}$의 도함수

거듭제곱근을 거듭제곱으로 바꾼 다음 합성함수의 미분법으로 미분하면 다음과 같다.

$$y=\left(2x^3+x\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$y'=\frac{1}{2}\left(2x^3+x\right)^{-\frac{1}{2}}\left(2x^3+x\right)'=\frac{1}{2}\left(2x^3+x\right)^{-\frac{1}{2}}\left(6x^2+1\right)=\frac{6x^2+1}{2\sqrt{2x^3+x}}$$

★ 제곱근의 도함수 $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$은 자주 쓰이기 때문에 외워두도록 하자.

예제4 다음 함수의 도함수를 구하여라.

(1) $y=\dfrac{x^2+3x}{\ln\left(x^2+3x\right)+2}$ (2) $y=\sin^2\left(x^3+2x\right)$

풀이1 합성함수의 미분법 Ⅰ에 따른 풀이

(1) 먼저 함수의 몫의 미분법에 따라 미분하면

$$y'=\frac{\left(x^2+3x\right)'\left\{\ln\left(x^2+3x\right)+2\right\}-\left(x^2+3x\right)\left\{\ln\left(x^2+3x\right)+2\right\}'}{\left\{\ln\left(x^2+3x\right)+2\right\}^2}$$

가 된다. 다음으로 $\left\{\ln\left(x^2+3x\right)+2\right\}'$에서 $f(x)=\ln x+2$, $g(x)=x^2+3x$로 보고 $\{f(g(x))\}'=f'(g(x))g'(x)$를 적용하면

$$\left\{\ln\left(x^2+3x\right)+2\right\}'=\frac{1}{x^2+3x}\times(2x+3)=\frac{2x+3}{x^2+3x}$$

이므로 도함수는 다음과 같다.

$$y'=\frac{(2x+3)\left\{\ln\left(x^2+3x\right)+2\right\}-\left(x^2+3x\right)\times\dfrac{2x+3}{x^2+3x}}{\left\{\ln\left(x^2+3x\right)+2\right\}^2}$$

$$=\frac{(2x+3)\left\{\ln\left(x^2+3x\right)+2\right\}-(2x+3)}{\left\{\ln\left(x^2+3x\right)+2\right\}^2}=\frac{(2x+3)\left\{\ln\left(x^2+3x\right)+1\right\}}{\left\{\ln\left(x^2+3x\right)+2\right\}^2}$$

(2) $\sin^2\left(x^3+2x\right)=\left\{\sin\left(x^3+2x\right)\right\}^2$이므로

$$y'=\left\{2\sin\left(x^3+2x\right)\right\}\times\left\{\sin\left(x^3+2x\right)\right\}'$$

이 된다. 그리고 $\left\{\sin\left(x^3+2x\right)\right\}'$에서 $f(x)=\sin x$, $g(x)=x^3+2x$로 보고

$\{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)$를 적용하면 다음과 같다.

$$y' = \{2\sin(x^3+2x)\}\times\{\cos(x^3+2x)\}\times(x^3+2x)'$$
$$= \{\sin 2(x^3+2x)\}\times(3x^2+2) = (3x^2+2)\sin(2x^3+4x)$$

$2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$

풀이2 합성함수의 미분법 Ⅱ에 따른 풀이

(1) 공통 부분 x^2+3x를 u로 치환해서 두 함수 $y=\dfrac{u}{\ln u+2}$, $u=x^2+3x$로 분리한 다음, 합성함수의 미분법 Ⅱ를 적용한다.

$$\frac{dy}{du} = \frac{1\cdot(\ln u+2)-u\cdot\frac{1}{u}}{(\ln u+2)^2} = \frac{\ln u+1}{(\ln u+2)^2} = \frac{\ln(x^2+3x)+1}{\{\ln(x^2+3x)+2\}^2} \qquad \frac{du}{dx} = 2x+3$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \frac{\ln(x^2+3x)+1}{\{\ln(x^2+3x)+2\}^2}\cdot(2x+3) = \frac{(2x+3)\{\ln(x^2+3x)+1\}}{\{\ln(x^2+3x)+2\}^2}$$

(2) $x^3+2x=u$로 두면 $y=\sin^2 u$가 되고, 다시 $\sin u = v$로 두면 $y=v^2$이 된다. 따라서 주어진 함수는 세 함수 $y=v^2$, $v=\sin u$, $u=x^3+2x$로 분리되며, 합성함수의 미분법 Ⅱ를 적용하면 다음과 같다.

$$\frac{dy}{dv} = 2v = 2\sin u = 2\sin(x^3+2x)$$

$$\frac{dv}{du} = \cos u = \cos(x^3+2x) \qquad \frac{du}{dx} = 3x^2+2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv}\cdot\frac{dv}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \{2\sin(x^3+2x)\}\times\{\cos(x^3+2x)\}\times(3x^2+2)$$
$$= \{\sin 2(x^3+2x)\}\times(3x^2+2) = (3x^2+2)\sin(2x^3+4x)$$

예제5 다음 함수의 도함수를 구하여라.

(1) $y=\sqrt[4]{(4x+3)^3}$ (2) $y=x\sqrt{4-x^2}$ (3) $y=\sin\sqrt{x^2+x}$

★ n이 유리수일 때, 함수 $y=x^n$의 도함수가 $y=nx^{n-1}$이므로 합성함수의 미분법에 따라 함수 $y=\{f(x)\}^n$의 도함수는 $y=n\{f(x)\}^{n-1}f'(x)$이다.

풀이 (1) $\sqrt[4]{(4x+3)^3} = (4x+3)^{\frac{3}{4}}$이므로 도함수는 다음과 같다.

$$y' = \left\{\frac{3}{4}(4x+3)^{-\frac{1}{4}}\right\}\times(4x+3)' = \frac{3}{4}\times\frac{1}{\sqrt[4]{4x+3}}\times 4 = \frac{3}{\sqrt[4]{4x+3}}$$

(2) 먼저 함수의 곱의 미분법을 적용하면

$$y' = 1\times\sqrt{4-x^2} + x\times\left(\sqrt{4-x^2}\right)'$$

이고, $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$로부터

$$\left(\sqrt{4-x^2}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{4-x^2}}\times(4-x^2)' = \frac{1}{2\sqrt{4-x^2}}\times(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$$

이므로 도함수는 다음과 같다.

$$y' = \sqrt{4-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{-2x^2+4}{\sqrt{4-x^2}}$$

(3) 합성함수의 미분법 Ⅰ에 따라 도함수는 다음과 같다.

$$y' = \left(\cos\sqrt{x^2+x}\right)\times\left(\sqrt{x^2+x}\right)' = \left(\cos\sqrt{x^2+x}\right)\times\underline{\frac{1}{2\sqrt{x^2+x}}\times(2x+1)}$$
$$= \frac{(2x+1)\cos\sqrt{x^2+x}}{2\sqrt{x^2+x}}$$

$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$을 이용

예제6 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$가 다음의 조건들을 모두 만족할 때, $g'(8)$의 값을 구하여라.

(가) $f(x) = (x+4)^{\frac{3}{2}}$
(나) $g(x)$는 모든 실수 x에 대해 미분가능하다.
(다) $h(x) = (g\circ f)(x)$, $h'(0)=8$

풀이 두 함수 $f(x) = (x+4)^{\frac{3}{2}}$, $h(x) = g(f(x))$의 도함수는 각각

$$f'(x) = \frac{3}{2}(x+4)^{\frac{1}{2}},\ h'(x) = g'(f(x))f'(x)$$

이고, $h'(0)=8$을 이용하기 위해 $x=0$을 대입하면 다음과 같이 계산된다.

$$h'(0) = g'(f(0))f'(0) = g'(8)\times 3 = 8 \Rightarrow g'(8) = \frac{8}{3}$$

공부하다

박수칠 수학 기본서

박상칠 지음

미적분Ⅰ

새 교육과정

Orbi.kr

1등급이 되는 책

Designed By Orbi In Seoul

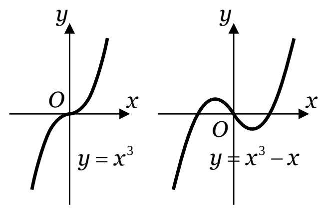
7 함수의 극대·극소와 그래프

§1. 함수의 극대·극소와 도함수

중등수학과 수학 I 에서는 일차함수와 이차함수의 그래프를, 수학II에서는 간단한 분수함수와 무리함수의 그래프를 공부했다. 여기서 함수의 그래프 개형을 그리는 방법은 대개 기본형의 그래프를 평행이동시키는 것이었다.

$y=ax$, $y=ax^2$, $y=\dfrac{a}{x}$, $y=\pm\sqrt{ax}$

그런데 삼차 이상의 고차함수에서는 같은 방법이 통하지 않는다. 예를 들어 삼차함수 $y=x^3$과 $y=x^3-x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 합동이 아니기 때문에 $y=x^3$의 그래프를 평행이동해서 $y=x^3-x$의 그래프를 그릴 수 없다.



따라서 고차함수의 그래프 개형을 그리기 위해서는 새로운 방법이 필요한데 바로 도함수를 이용하는 방법이다. 이를 공부하기 위해 먼저 함수 $f(x)$의 증가·감소와 도함수 $f'(x)$ 사이에 어떤 관계가 있는지부터 알아보자.

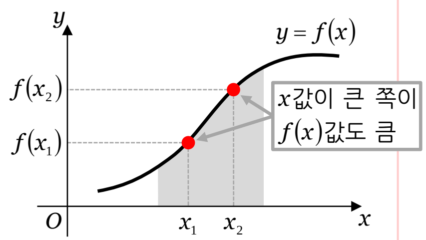
함수의 증가·감소

• 증가·감소의 정의

함수 $f(x)$와 구간 I에 속하는 임의의 두 수 x_1, x_2에 대하여

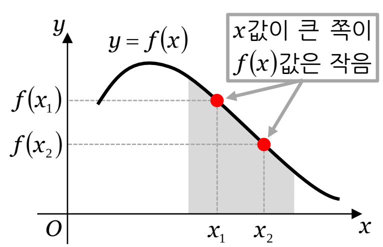
① 「$x_1<x_2$이면 $f(x_1)<f(x_2)$이다」가 항상 성립할 때, 함수 $f(x)$는 구간 I에서 증가한다고 한다.

또한 증가하는 구간에서 함수의 그래프는 오른쪽 위로 향한다.



② 「$x_1<x_2$이면 $f(x_1)>f(x_2)$이다」가 항상 성립할 때, 함수 $f(x)$는 구간 I에서 감소한다고 한다.

또한 감소하는 구간에서 함수의 그래프는 오른쪽 아래로 향한다.



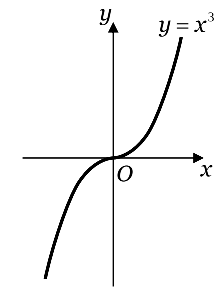
[예] 함수 $f(x)=x^3$은 구간 $(-\infty,\infty)$에서 증가한다. 이를 증명하려면 임의의 실수 x_1, x_2에 대해 「$x_1<x_2$이면 $f(x_1)<f(x_2)$」가 성립함을 보여야 한다.

임의의 실수 x_1, x_2에 대하여 $x_1<x_2$이면

$$\begin{aligned} f(x_1)-f(x_2) &= x_1^3-x_2^3 \\ &= (x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2) \\ &= (x_1-x_2)\left\{\left(x_1+\frac{1}{2}x_2\right)^2+\frac{3}{4}x_2^2\right\}<0 \end{aligned}$$

$\therefore f(x_1)<f(x_2)$

가 된다. 따라서 「$x_1<x_2$이면 $f(x_1)<f(x_2)$」가 성립하므로 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\infty)$에서 증가한다.



미분가능한 함수 $f(x)$가 특정 구간에서 증가하는지, 감소하는지를 판단할 때는 그 구간에서의 도함수 부호를 이용하는 것이 효과적이다.

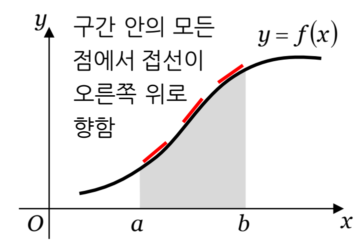
도함수와 함수의 증가·감소

• 도함수의 부호와 함수의 증가, 감소 – I

함수 $f(x)$가 구간 (a,b)에서 미분가능할 때

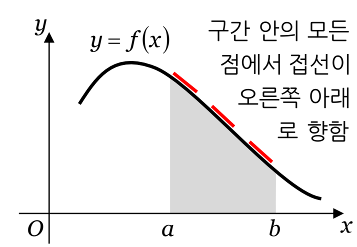
① 구간 (a,b)에서 $f'(x)>0$이면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.

$\because$ 구간 (a,b)에 속하는 모든 점에서 미분계수가 양수이므로 모든 접선이 오른쪽 위로 향하고, 곡선도 오른쪽 위로 향한다.

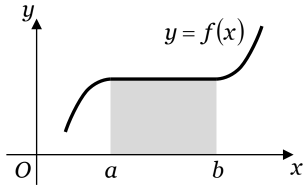


② 구간 (a,b)에서 $f'(x)<0$이면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다.

$\because$ 구간 (a,b)에 속하는 모든 점에서 미분계수가 음수이므로 모든 접선이 오른쪽 아래로 향하고, 곡선도 오른쪽 아래로 향한다.



③ 구간 (a, b)에서 $f'(x)=0$이면
함수 $f(x)$는 이 구간에서 상수함수다.
$\because$ p.150 예제9 –(1)에서 평균값 정리로
증명되었다.



★ 명제 ①, ②의 정확한 증명도 평균값 정리를 이용한다.

[①의 증명]

구간 (a, b)에 속하는 임의의 두 수를 x_1, x_2 (단, $x_1 < x_2$)라 하면, 함수 $f(x)$는 구간 $[x_1, x_2]$에서 연속이고, 구간 (x_1, x_2)에서 미분가능하다. 따라서 평균값 정리에 의해 등식

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)$$

를 만족하는 c가 구간 (x_1, x_2)에 존재하고, $x_2-x_1>0$, $f'(c)>0$이므로

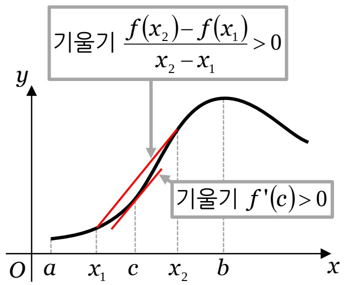
$$f(x_2)-f(x_1)>0 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

가 성립한다.

그러므로 구간 (a, b)에 속하는 임의의 두 수 x_1, x_2에 대하여

「$x_1 < x_2$이면 $f(x_1) < f(x_2)$이다」

가 성립하며, 함수 $f(x)$는 구간 (a, b)에서 증가한다.



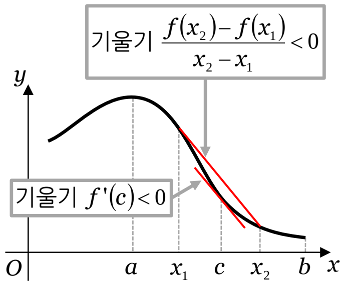
[②의 증명]

구간 (a, b)에 속하는 임의의 두 수를 x_1, x_2 (단, $x_1 < x_2$)라 하면, 함수 $f(x)$는 구간 $[x_1, x_2]$에서 연속이고, 구간 (x_1, x_2)에서 미분가능하다. 따라서 평균값 정리에 의해 등식

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)$$

를 만족하는 c가 구간 (x_1, x_2)에 존재하고, $x_2-x_1>0$, $f'(c)<0$이므로

$$f(x_2)-f(x_1)<0 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$$



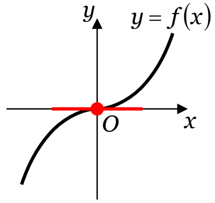
가 성립한다.

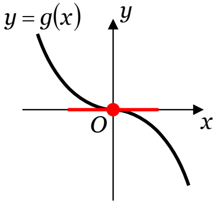
그러므로 구간 (a, b)에 속하는 임의의 두 수 x_1, x_2에 대하여

「$x_1 < x_2$이면 $f(x_1) > f(x_2)$이다」

가 성립하며, 함수 $f(x)$는 구간 (a, b)에서 감소한다.

★ 다음과 같이 함수 $f(x)$가 증가 또는 감소하는 구간에서 $f'(x)=0$인 점이 나타날 수 있다.





함수 $f(x)=x^3$에 대하여
▹ 구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가한다.
▹ $x\neq 0$일 때 $f'(x)=3x^2>0$,
$x=0$일 때 $f'(x)=0$이다.

함수 $g(x)=-x^3$에 대하여
▹ 구간 $(-\infty, \infty)$에서 감소한다.
▹ $x\neq 0$일 때 $f'(x)=-3x^2<0$,
$x=0$일 때 $f'(x)=0$이다.

따라서 명제 ①, ②의 가정과 결론을 바꾸면 다음과 같이 도함수의 부호에 등호가 붙어야 한다.

• 함수의 증가, 감소와 도함수의 부호

함수 $f(x)$가 구간 (a, b)에서 미분가능할 때

①–1. 함수 $f(x)$가 구간 (a, b)에서 증가하면 이 구간에서 $f'(x)\geq 0$이다.

②–1. 함수 $f(x)$가 구간 (a, b)에서 감소하면 이 구간에서 $f'(x)\leq 0$이다.

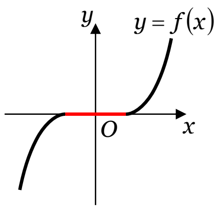
★ 마찬가지로 명제 ①, ②의 가정에 등호를 넣으면 그 명제는 참이 될까? 거짓이 될까?

거짓

함수 $f(x)$가 구간 (a, b)에서 미분가능할 때
▹ 구간 (a, b)에서 $f'(x)\geq 0$가 항상 성립하면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.
▹ 구간 (a, b)에서 $f'(x)\leq 0$가 항상 성립하면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다.

정말 헷갈리겠지만, 앞 페이지의 명제는 둘 다 거짓이다. 왜냐하면 아래의 [예]와 같이 $f'(x)=0$을 만족하는 점이 연속적으로 나타날 수 있기 때문이다. (즉, 함수 $f(x)$가 상수함수가 되는 구간이 생기기 때문)

[예] $f(x)=\begin{cases}(x+1)^3 & (x<-1)\\ 0 & (-1\le x\le 1)\\ (x-1)^3 & (x>1)\end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases}3(x+1)^2 & (x<-1)\\ 0 & (-1\le x\le 1)\\ 3(x-1)^2 & (x>1)\end{cases}$

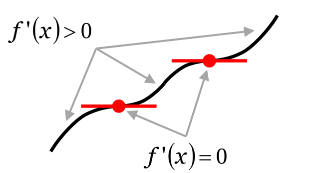


함수 $f(x)$는
구간 $[-1,1]$에서 상수함수이기 때문에
구간 $(-\infty,\infty)$에서 항상 $f'(x)\ge 0$이 성립
하더라도 증가함수가 아니다.

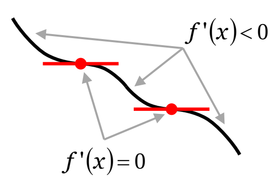
그런데 함수 $f(x)$가 특정 조건을 만족하면 $f'(x)\ge 0$이 항상 성립하더라도 증가함수일 수 있고, $f'(x)\le 0$이 항상 성립하더라도 감소함수일 수 있다.
그 조건은 바로 $f'(x)=0$인 점이 연속적이지 않을 것, 다시 말하면 $f(x)$의 값이 일정한 구간이 존재하지 않을 것이다.

• 도함수의 부호와 함수의 증가, 감소 – II
함수 $f(x)$가 구간 (a,b)에서 미분가능할 때

① – 2. 구간 (a,b)에서 $f'(x)\ge 0$이고,
$f'(x)=0$인 점이 연속적이지 않으면
함수 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.



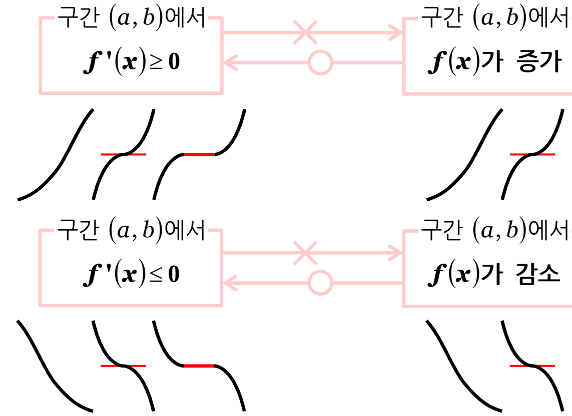
② – 2. 구간 (a,b)에서 $f'(x)\le 0$이고,
$f'(x)=0$인 점이 연속적이지 않으면
함수 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다.



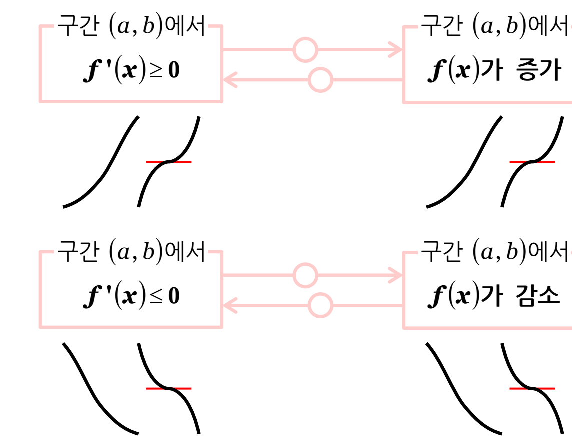
★ $f'(x)=0$인 점이 연속적이지 않은 함수 $f(x)$에는 여러 가지가 있는데, 가장 대표적인 것이 바로 다항함수다. (단, 상수함수 제외)

★ 지금까지 살펴봤듯이 도함수의 부호 – 함수의 증가·감소 사이의 관계는 등호 유무 때문에 헷갈리기 쉽다. 따라서 $f'(x)=0$인 점이 연속적으로 나타날 수 있는 함수와 그렇지 않은 함수를 구분하고, 도함수의 부호에 따라 나타날 수 있는 그래프 개형을 기억해두도록 하자.

▹ 미분가능한 함수 $f(x)$의 경우



▹ 상수함수 아닌 다항함수 $f(x)$의 경우



예제1 다음은 구간 (a,b)에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대한 명제들이다. 옳은 것을 모두 고르시오.

ㄱ. 구간 (a,b)에서 $f'(x)\geq 0$이면, 함수 $f(x)$는 그 구간에서 증가한다.
ㄴ. 구간 (a,b)에서 $f'(x)<0$이면, 함수 $f(x)$는 그 구간에서 감소한다.
ㄷ. 구간 (a,b)에서 $f'(x)\geq 0$이고 방정식 $f'(x)=0$의 근이 유한 개이면, 함수 $f(x)$는 그 구간에서 증가한다.
ㄹ. 구간 (a,b)에서 $f'(x)\leq 0$이고 방정식 $f'(x)=0$의 근이 무한 개이면, 함수 $f(x)$는 그 구간에서 감소한다.
ㅁ. $f(x)$가 삼차함수이고 구간 (a,b)에서 $f'(x)\leq 0$를 만족하면, 함수 $f(x)$는 그 구간에서 감소한다.
ㅂ. 함수 $f(x)$가 구간 (a,b)에서 증가하면 그 구간에서 $f'(x)>0$이 성립한다.

풀이 ㄱ. 구간 (a,b)에서 $f'(x)\geq 0$이면 $f'(x)=0$인 점이 연속적으로 나타날 수 있다. 그러면 함수 $f(x)$의 그래프에 함숫값이 일정한 구간이 생기기 때문에 함수 $f(x)$는 증가한다고 할 수 없다. (거짓)

ㄴ. (참)

ㄷ. 구간 (a,b)에서 $f'(x)=0$인 점이 유한 개라는 것은 $f'(x)=0$인 점이 불연속적이라는 의미다. 따라서 함수 $f(x)$의 그래프에 함숫값이 일정한 구간이 나타나지 않으며, 함수 $f(x)$는 증가한다. (참)

ㄹ. 구간 (a,b)에서 $f'(x)=0$인 점이 무한 개이면 $f'(x)=0$인 점이 불연속적으로 나타날 수도 있지만, 연속적으로 나타날 수도 있다. 따라서 함수 $f(x)$가 감소한다고 할 수 없다. (거짓)

ㅁ. 상수함수를 제외한 다항함수에서는 $f'(x)=0$인 점이 불연속적으로 나타난다. 그러므로 구간 (a,b)에서 $f'(x)\leq 0$이면 삼차함수 $f(x)$는 감소한다. (참)

ㅂ. 구간 (a,b)에서 함수 $f(x)$가 증가하면 $f'(x)>0$이 항상 성립하는 경우도 있지만, $f'(x)=0$인 점이 불연속적으로 끼는 경우도 있다. 이를 모두 포함하려면 $f'(x)\geq 0$이 성립해야 한다. (거짓)

예제2 다음은 구간 $(0,1)$에서 두 함수 $f(x)=x^3-2x^2+4x-4$와 $g(x)=x^2-2x-3$의 그래프가 오직 한 점에서 만남을 증명한 것이다.

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면 $h(x)=x^3-3x^2+6x-1$은 모든 실수 x에 대하여 연속이다.
$h(0)\cdot h(1)$ $\boxed{(가)}$ 0이므로, 사이값의 정리에 의해 방정식 $h(x)=0$은 0과 1 사이에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.
모든 실수 x에 대하여 $h'(x)$ $\boxed{(나)}$ 0이므로 $h(x)$는 $\boxed{(다)}$이다.
따라서 $h(x)=0$은 0과 1 사이에서 오직 하나의 실근을 갖게 된다.
즉, 구간 $(0,1)$에서 $f(x)$, $g(x)$의 그래프는 오직 한 점에서 만난다.

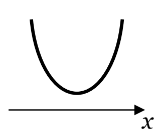
위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?

	(가)	(나)	(다)		(가)	(나)	(다)
①	$<$	$>$	증가함수	②	$<$	$>$	감소함수
③	$<$	$<$	감소함수	④	$>$	$<$	감소함수
⑤	$<$	$>$	증가함수				

풀이 $h(0)\cdot h(1)=(-1)\times 3=-3<0$이므로 $\boxed{(가)}$에는 '$<$'가 들어간다.
또한 $h'(x)=3x^2-6x+6=3(x-1)^2+3>0$이므로 $h(x)$는 증가함수가 된다.
따라서 $\boxed{(나)}$에는 '$>$', $\boxed{(다)}$에는 '증가함수'가 들어가야 한다.

☆ 완전제곱꼴 대신 이차함수 $h'(x)=3x^2-6x+6$이

$(x^2$ 계수$)>0$ → 그래프가 아래로 볼록
$D/4<0$ → 그래프가 x축과 만나지 않음



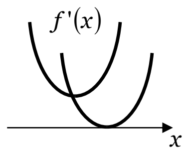
을 만족한다는 사실로부터 $h'(x)=3x^2-6x+6>0$임을 알 수도 있다. (p.226 참고)

<u>예제3</u> 삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+2ax$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가하도록 하는 실수 a의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M-m$의 값을 구하여라.

<u>풀이</u> 삼차함수 $f(x)$의 그래프에서는 $f'(x)=0$인 점이 불연속적으로 나타난다. 따라서 삼차함수 $f(x)$가 증가함수이기 위한 필요충분조건은 모든 실수 x에 대해

$$f'(x)=3x^2+2ax+2a\ge 0$$

가 성립하는 것이며, 이를 위해서는 $f'(x)$의 그래프가 오른쪽 그림처럼 x축과 만나지 않거나 x축에 접해야 한다. 그러므로



$$D/4=a^2-6a=a(a-6)\le 0 \;\Rightarrow\; 0\le a\le 6$$

이며, $M=6$, $m=0$, $M-m=6$이다.

<u>예제4</u> 함수 $f(x)=x^3+3x^2+ax+2$가 다음을 만족한다.

$\boxed{\text{임의의 실수 } x_1,\ x_2\text{에 대하여 } f(x_1)=f(x_2)\text{이면 } x_1=x_2\text{이다.}}$

이때, 실수 a값의 범위를 구하여라.

<u>풀이</u> 문제에 주어진 조건부터 파악하면 다음과 같다.

① 임의의 실수 x_1, x_2에 대한 명제 「$f(x_1)=f(x_2)$이면 $x_1=x_2$이다」의 대우는 「$x_1\ne x_2$이면 $f(x_1)\ne f(x_2)$이다」이며, 함수 $f(x)$가 일대일함수임을 의미한다.

② 다항함수 $f(x)$는 모든 실수에서 연속이므로 이 함수가 일대일함수이려면 증가함수 또는 감수함수가 되어야 한다.

③ 삼차함수 $f(x)$의 삼차항 계수가 양수이므로 그래프는 좌표평면 왼쪽 아래에서 오른쪽 위로 향한다.

①~③으로부터 함수 $f(x)$는 증가함수이므로 모든 실수 x에 대해

$$f'(x)=3x^2+6x+a\ge 0$$

가 성립해야 한다. 그러므로

$$D/4=9-3a\le 0 \;\Rightarrow\; a\ge 3$$

★ 문제의 올바른 이해를 위해 수학II에서 배웠던 관련 개념을 정리하고 넘어가도록 하자.

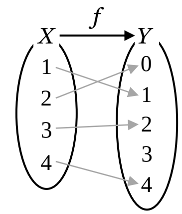
▷ 일대일함수

– 정의역의 각 원소들에 대응되는 함숫값이 중복되지 않는 함수를 말한다.

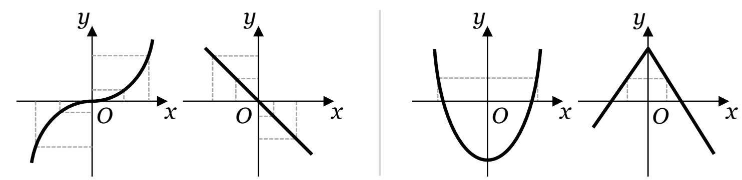
– 함수 $f: X\to Y$와 정의역 X의 임의의 원소 x_1, x_2에 대하여

$$x_1\ne x_2\text{이면 } f(x_1)\ne f(x_2)$$

가 항상 성립하면 함수 f는 일대일함수다.



– 구간 I에서 연속인 함수가 일대일함수이려면 증가함수 또는 감소함수여야 한다.



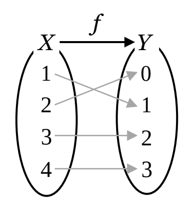
증가함수(좌)와 감소함수(우)는 정의역의 각 원소들에 대응되는 함숫값이 중복되지 않으므로 일대일함수

정의역의 서로 다른 원소가 같은 함숫값을 가질 수 있으므로 일대일함수 아님

▷ 일대일대응

– 일대일함수 가운데 공역과 치역이 일치하는 함수를 말한다.

– 함수 $f: X\to Y$와 정의역 X의 임의의 원소 x_1, x_2에 대하여



① $x_1\ne x_2$이면 $f(x_1)\ne f(x_2)$ ② $f(X)=Y$

가 동시에 성립하면 함수 f는 일대일대응이다.

$f(X)$는 함수 $f: X\to Y$의 치역을 의미한다.

앞에서 함수의 증가·감소가 어떻게 정의되는지, 그리고 도함수의 부호와 어떤 관계에 있는지를 공부했다. 그런데 함수의 그래프 개형을 그리려면 함수가 특정 구간에서 증가하는지, 감소하는지의 여부가 아니라 증가하는 구간이 어디서부터 어디까지인지, 감소하는 구간이 어디서부터 어디까지인지를 파악해야 한다.

여기서는 함수의 증가·감소의 경계인 극대·극소가 무엇인지, 그리고 도함수를 이용해서 극대·극소의 위치를 어떻게 찾아내는지 공부할 것이다.

함수의 최대·최소와 극대·극소

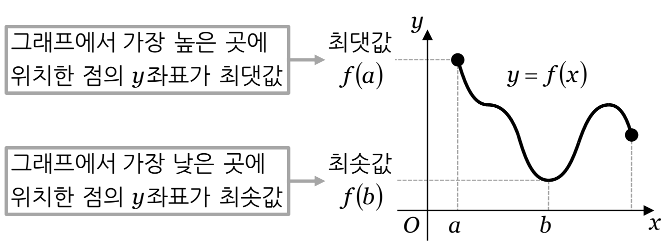
● 함수의 최대·최소

▷ 함수 $f(x)$의 정의역에 속하는 모든 x에 대하여 $f(a) \geq f(x)$가 항상 성립하면(즉, 모든 함숫값들 가운데 $f(a)$가 가장 크면) 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 최대라 하며, 이때의 함숫값 $f(a)$를 함수 $f(x)$의 최댓값이라 한다.

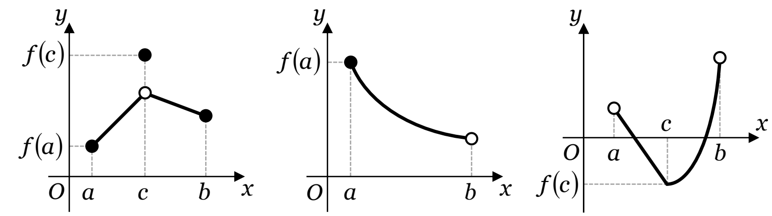
▷ 함수 $f(x)$의 정의역에 속하는 모든 x에 대하여 $f(a) \leq f(x)$가 항상 성립하면(즉, 모든 함숫값들 가운데 $f(a)$가 가장 작으면) 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 최소라 하며, 이때의 함숫값 $f(a)$를 함수 $f(x)$의 최솟값이라 한다.

★ 함수 $f(x)$가 닫힌 구간에서 연속이면 최대·최소 정리(p.98 참고)에 따라 그 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

[예1] 다음과 같은 그래프를 갖는 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 최대이며, 최댓값은 $f(a)$, $x=b$에서 최소이며 최솟값은 $f(b)$이다.



★ 함수 $f(x)$가 열린 구간에서 정의되거나, 닫힌 구간에서 정의되더라도 불연속점을 가지면 그 구간에서 최댓값 또는 최솟값을 가질 수도 있고, 갖지 않을 수도 있다.



최댓값 $f(c)$
최솟값 $f(a)$

최댓값 $f(a)$
최솟값 없음

최댓값 없음
최솟값 $f(c)$

$f(x)$의 최솟값은 $f(b)$보다 크면서 $f(b)$에 한없이 가깝지만 특정할 수 없기 때문에 최솟값이 없다고 한다.

$f(x)$의 최댓값은 $f(b)$보다 작으면서 $f(b)$에 한없이 가깝지만 특정할 수 없기 때문에 최댓값이 없다고 한다.

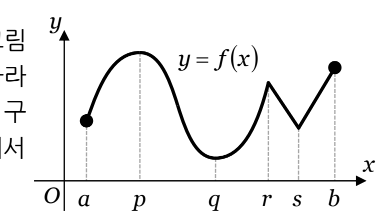
● 함수의 극대·극소 – I

▷ 어떤 열린 구간 I에 속하는 모든 x에 대하여 $f(a) \geq f(x)$가 항상 성립하면(즉, 열린 구간 I에서 나타나는 모든 함숫값들 가운데 $f(a)$가 가장 크면) 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대라 하며, 이때의 함숫값 $f(a)$를 극댓값, 점 $(a, f(a))$를 극대점이라 한다. (단, $a \in I$)

▷ 어떤 열린 구간 I에 속하는 모든 x에 대하여 $f(a) \leq f(x)$가 항상 성립하면(즉, 열린 구간 I에서 나타나는 모든 함숫값들 가운데 $f(a)$가 가장 작으면) 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극소라 하며, 이때의 함숫값 $f(a)$를 극솟값, 점 $(a, f(a))$를 극소점이라 한다. (단, $a \in I$)

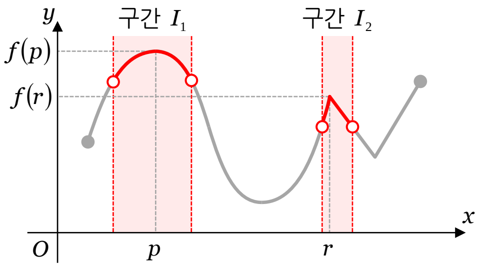
▷ 함수의 극댓값과 극솟값을 통틀어 극값, 극대점과 극소점을 통틀어 극점이라 한다.

[예2] 함수 $f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 극대·극소를 정의에 따라 찾으려면 다음 페이지와 같이 열린 구간 $I_1 \sim I_7$을 잡고, 각각의 구간 안에서 최대·최소를 따지면 된다.



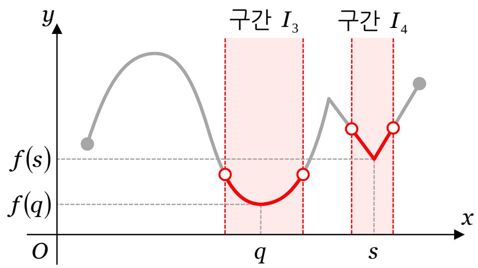
$\boxed{\text{구간 } I_1}$ $x=p$에서 최대이므로 함수 $f(x)$는 $x=p$에서 극대, $f(p)$가 극댓값

$\boxed{\text{구간 } I_2}$ $x=r$에서 최대이므로 함수 $f(x)$는 $x=r$에서 극대, $f(r)$이 극댓값



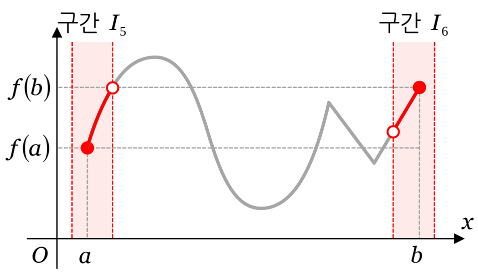
$\boxed{\text{구간 } I_3}$ $x=q$에서 최소이므로 함수 $f(x)$는 $x=q$에서 극소, $f(q)$가 극솟값

$\boxed{\text{구간 } I_4}$ $x=s$에서 최소이므로 함수 $f(x)$는 $x=s$에서 극소, $f(s)$가 극솟값

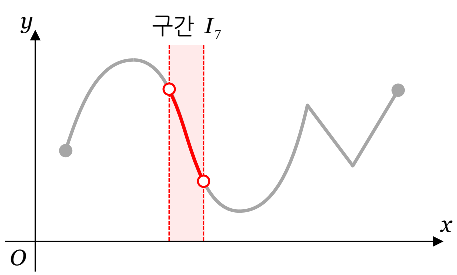


$\boxed{\text{구간 } I_5}$ $x=a$에서 최소이므로 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극소, $f(a)$가 극솟값

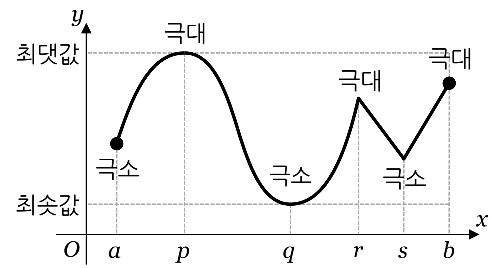
$\boxed{\text{구간 } I_6}$ $x=b$에서 최대이므로 함수 $f(x)$는 $x=b$에서 극대, $f(b)$이 극댓값



$\boxed{\text{구간 } I_7}$ 이 구간에서 최대·최소가 존재하지 않으므로 극대·극소도 존재하지 않음



따라서 함수 $f(x)$는 $x=p,\ r,\ b$에서 극대, $x=a,\ q,\ s$에서 극소다. 또한 극댓값 $f(p)$, $f(r)$, $f(b)$ 가운데 최대인 $f(p)$는 함수 $f(x)$의 최댓값과 같고 극솟값 $f(a)$, $f(q)$, $f(s)$ 가운데 최소인 $f(q)$는 함수 $f(x)$의 최솟값과 같음을 알 수 있다.



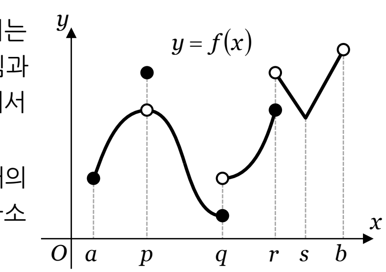
★ 간단히 말하면 함수의 최댓값과 최솟값은 모든 함숫값 가운데 가장 큰 것과 가장 작은 것을 의미하고, 극댓값과 극솟값은 특정 열린 구간에 속하는 함숫값 가운데 가장 큰 것과 가장 작은 것을 가리킨다.

최댓값을 global maximum, 최솟값을 global minimum, 극댓값을 local maximum, 극솟값을 local minimum이라고 하는 것도 같은 맥락이다.

★ 극대·극소는 연속함수 뿐만 아니라 불연속점을 갖는 함수에도 존재한다.

[예3] 반닫힌 구간 $[a,b)$에서 정의되는 함수 $f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 이 함수는 $x=p,\ q,\ r$에서 불연속이다.

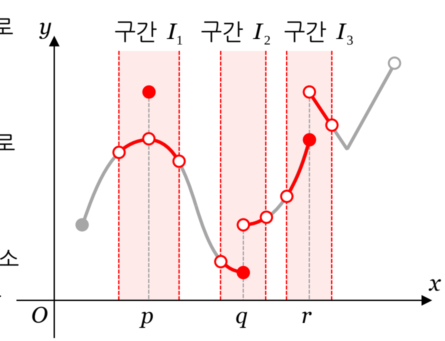
각각의 불연속점을 포함하는 세 개의 열린 구간 $I_1 \sim I_3$을 잡으면 극대·극소를 정의에 따라 찾을 수 있다.



$\boxed{\text{구간 } I_1}$ $x=p$에서 최대이므로 함수 $f(x)$는 $x=p$에서 극대, $f(p)$가 극댓값

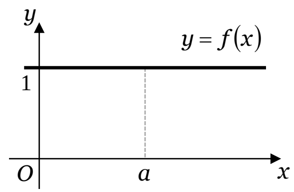
$\boxed{\text{구간 } I_2}$ $x=q$에서 최소이므로 함수 $f(x)$는 $x=q$에서 극소, $f(q)$가 극솟값

$\boxed{\text{구간 } I_3}$ 이 구간에서 최대·최소가 존재하지 않으므로 극대·극소도 존재하지 않음



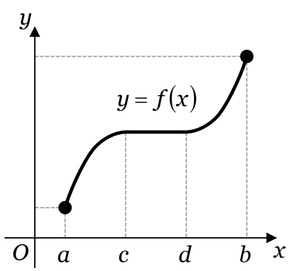
따라서 함수 $f(x)$는 $x=p$에서 극대, $x=a,\ q,\ s$에서 극소다. 또한 극솟값 $f(a),\ f(q),\ f(s)$ 가운데 최소인 $f(q)$는 함수 $f(x)$의 최솟값과 같지만, 최댓값이 존재하지 않기 때문에 극댓값 $f(p)$는 최댓값이 아니다.

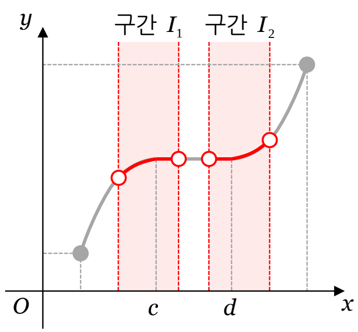
★ 함숫값이 일정한 상수함수에서도 최대·최소 및 극대·극소가 존재한다.
예를 들어 함수 $f(x)=1$은 최댓값, 최솟값이 모두 1이고, 임의의 실수 a에 대하여 부등식 $f(a)\geq f(x)$와 $f(a)\leq f(x)$를 동시에 만족하므로 $x=a$에서 극대면서 극소가 된다. 따라서 그래프 위의 임의의 점이 극대점이면서 극소점이다.



마찬가지로 함숫값이 일정한 구간을 갖는 함수에 대해서도 극대·극소를 생각할 수 있다.

[예4] 닫힌 구간 $[a, b]$에서 정의되는 함수 $f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 이 함수는 닫힌 구간 $[c, d]$에서 함숫값이 일정하며, 열린 구간 (c, d) 위의 모든 점이 극대점이면서 극소점이다.
그리고 c를 포함하는 열린 구간 I_1, d를 포함하는 열린 구간 I_2를 잡으면 $x=c$에서 극대, $x=d$에서 극소임을 알 수 있다.





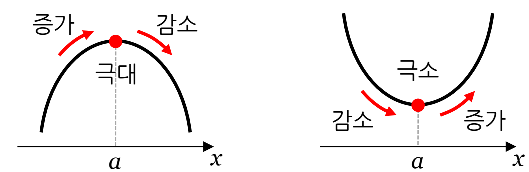
$\boxed{\text{구간 } I_1}$ $x=c$에서 최대이므로 함수 $f(x)$는 $x=c$에서 극대이고, $f(c)$가 극댓값

$\boxed{\text{구간 } I_2}$ $x=d$에서 최소이므로 함수 $f(x)$는 $x=d$에서 극소이고, $f(d)$가 극솟값

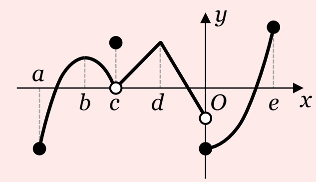
따라서 함수 $f(x)$는 반닫힌 구간 $[c, d)$에 속하는 임의의 점에서 극대, 반닫힌 구간 $(c, d]$에 속하는 임의의 점에서 극소다.

지금까지 살펴봤듯이 함수의 극대·극소는 연속함수인지 아닌지, 함숫값이 일정한 구간이 있는지 없는지에 따라 복잡하게 나타난다. 때문에 교육 과정에서 다루는 대부분의 극대·극소 문제는 p.159 [예2]처럼 연속함수면서 함숫값이 일정한 구간이 없는 함수를 대상으로 하고 있다.
이런 함수에 맞춰서 함수의 극대·극소를 보다 쉽게 정의하면 다음과 같다.

• 함수의 극대·극소 – Ⅱ
연속함수 $f(x)$가 함숫값이 일정한 구간을 갖지 않을 때
▷ $x=a$를 경계로 증가에서 감소로 바뀌면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대다.
▷ $x=a$를 경계로 감소에서 증가로 바뀌면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극소다.



예제5 오른쪽 그림은 닫힌 구간 $[a, e]$에서 정의된 함수 $f(x)$의 그래프를 나타낸 것이다. 극대점과 극소점의 개수를 각각 구하여라.



★ p.159에서 설명했던 극대·극소의 일반적인 정의(함수의 극대·극소 – Ⅰ)에 따라 다음과 같이 풀 수 있다.

풀이 ▷ a를 포함하는 열린 구간에서 $f(a)\leq f(x)$이므로 $x=a$일 때 극소
▷ b를 포함하는 열린 구간에서 $f(b)\geq f(x)$이므로 $x=b$일 때 극대
▷ c를 포함하는 열린 구간에서 $f(c)\geq f(x)$이므로 $x=c$일 때 극대
▷ d를 포함하는 열린 구간에서 $f(d)\geq f(x)$이므로 $x=d$일 때 극대
▷ 0을 포함하는 열린 구간에서 $f(0)\leq f(x)$이므로 $x=0$일 때 극소
▷ e를 포함하는 열린 구간에서 $f(e)\geq f(x)$이므로 $x=e$일 때 극대
따라서 극대점은 4개, 극소점은 2개다.