2017 부산대학교 모의논술 (의학계열)

【문항 1】 다음 제시문을 근거로 하여 아래 논제에 답하시오.

[제시문]

[가] 함수 $f(x)$의 정의역 위의 점 a값에 대하여

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

가 존재할 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다고 한다.

[나] 정의역의 모든 점에서 미분가능한 함수 $f(x)$의 도함수는

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

이다.

[다] $\lim_{x\to 0}f(x)=\alpha, \lim_{x\to 0}g(x)=\beta$ (단, α, β는 실수)일 때, $\alpha=\beta$이고 a에 가까운 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\le g(x)\le h(x)$가 성립하면 $\lim_{x\to 0}h(x)=\alpha$

1-1. n을 2 이상의 자연수라고 할 때, 실수 전체에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^n\sin\frac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$$

가 $x=0$에서 미분가능한지 아니한지를 밝히시오. (10점)

※ 임의의 함수 $g(x)$와 임의의 양수 a, b에 대하여 두 부등식

$g(a)\le a, \qquad g(ab)\le g(a)+g(b)-1$

이 성립한다고 가정하였을 때, 다음 물음에 답하시오.

1-2. $x>0, h>0$일 때, 부등식 $\frac{h}{x+h}\le g(x+h)-g(x)\le\frac{h}{x}$가 성립함을 보이시오. (15점)

1-3. $g(x)$가 미분가능할 때, 논제1-2와 제시문 [나], [다]를 이용하여, $x>0$에서 도함수 $g'(x)$를 구하시오. (10점)

대학발표 예시답안

[1-1]

제시문 (가)에 의해 $x=0$에서 미분가능하기 위해서는 $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$의 값이 존재하여야 한다.

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^n \sin \frac{1}{x^2}}{x} = \lim_{x \to 0} x^{n-1} \sin \frac{1}{x^2}$$

이다. 여기서 $-|x^{n-1}| \le x^{n-1} \sin \frac{1}{x^2} \le |x^{n-1}|$이고, $\lim_{x \to 0} |x^{n-1}| = 0$ ($\because n \ge 2$)

제시문 (다)에 의해서 $\lim_{x \to 0} x^{n-1} \sin \frac{1}{x^2} = 0$이다. 따라서 $f'(0)=0$으로 존재하므로,

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

→ 서술과정

① $\sin, \cos$에 관련한 문제가 나오면 조임정리(sandwich 정리)를 생각하여 풀이합시다.

② 미분 가능성을 따질 때 연속성을 먼저 따져야 하나, 제시문에서 미분가능의 조건을 주었으니 그대로 따라가면 됩니다.

[1-2]

$a=x, ab=x+h$라 두면 $b=\frac{x+h}{a}=\frac{x+h}{x}$이고, a,b는 양수이다. 이를 부등식 $g(ab) \le g(a)+g(b)-1$에 대입하면, $g(x+h) \le g(x)+g\left(\frac{x+h}{x}\right)-1$이다. 여기서 부등식 $g(b) \le b$에 의하여 $g\left(\frac{x+h}{x}\right) \le \frac{x+h}{x}$이므로,

$g(x+h) \le g(x)+\frac{x+h}{x}-1 = g(x)+\frac{h}{x}$이 성립한다.

즉, $g(x+h)-g(x) \le \frac{h}{x}$ ------- ①

또한, $a=x+h, ab=x$라 두면 $b=\frac{x}{a}=\frac{x}{x+h}$이고, a,b는 양수이다. 이를 부등식 $g(ab) \le g(a)+g(b)-1$에 대입하면, $g(x) \le g(x+h)+g\left(\frac{x}{x+h}\right)-1$이다. 여기서 부등식 $g(b) \le b$에 의하여 $g\left(\frac{x}{x+h}\right) \le \frac{x}{x+h}$이므로,

$g(x) \le g(x+h)+\frac{x}{x+h}-1 = g(x+h)+\frac{h}{x+h}$이 성립한다.

즉, $\frac{h}{x+h} \le g(x+h)-g(x)$ ------- ②

최종적으로 ①, ②에서 $\frac{h}{x+h} \le g(x+h)-g(x) \le \frac{h}{x}$이다.

[1-3]

(ⅰ) $h>0$일 때, [5-2]의 결론에 의해 $\frac{1}{x+h} \le \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \le \frac{1}{x}$이고, 제시문 (다)에 의해

$\lim_{h \to 0+} \frac{g(x+h)-g(x)}{x} = \frac{1}{x}$이다.

(ⅱ) $h<0$일 때, $|h|$를 충분히 작게 하면, $x+h>0$이므로, [5-2]의 풀이과정과 같이 양수 a,b를 택할 수 있고, [5-2]과 똑같은 결론 $\frac{h}{x+h} \le g(x+h)-g(x) \le \frac{h}{x}$을 얻는다. 여기서 h가 음수이므로, 양변을 h로 나누면 $\frac{h}{x+h} \ge g(x+h)-g(x) \ge \frac{h}{x}$를 얻는다. 그러면 제시문 (다)에 의해 $\lim_{h \to 0-} \frac{g(x+h)-g(x)}{x} = \frac{1}{x}$

최종적으로 (ⅰ), (ⅱ)와 제시문 (나)에 의해서, $g'(x) = \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \frac{1}{x}$이다.

→ 서술과정

① [5-2]에서는 $x>0, h>0$ [5-3] 에서는 $x>0$ / 조건의 변화를 잘 인지하셔야 합니다.
케이스를 나누어 하나씩 생각하시면 됩니다. 디테일한 부분이 합격을 결정합니다.
대부분의 경우 크게 풀이의 차이가 없거나 새로운 풀이라면 제시문에서 주어졌을 것이므로
당황하지 마시고, 비슷하게 서술하시면 됩니다.

2017 부산대학교

[문항 2] 다음 제시문을 이용하여 아래 논제의 풀이 과정과 답을 논리적으로 서술하시오.

(가) 함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 미분가능하고, 이 구간의 모든 x에 대하여 $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.

(나) (합성함수의 미분법)
미분가능한 두 함수 $y=f(z), z=g(x)$에 대하여 합성함수 $y=f(g(x))$의 도함수는
$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}$ 또는 $y'=f'(g(x))g'(x)$이다.

(다) (치환적분법)
미분가능한 함수 $g(y)$에 대하여 $x=g(y)$로 놓으면
$\int f(x)dx=\int f(g(y))g'(y)dy$이다.

구간 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$에서 정의된 연속함수 $f(x)=\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$에 대하여 다음 논제에 답하시오.

2-1. 구간 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$에서 함수 $f(x)$의 값의 범위와 역함수를 구하시오. (15점)

2-2. 논제 2-1에서 구한 역함수와 제시문 (다)를 이용하여 $\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)dx$의 값을 구하시오. (20점)

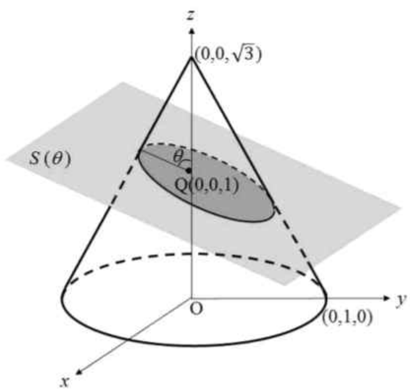
2018 서강대학교
문항 4
제시문을 참고하여 다음 물음에 답하여라.

(가) 점 $P(x_1, y_1, z_1)$을 지나고, 영벡터가 아닌 벡터 $\overrightarrow{n}=(a,b,c)$에 수직인 평면의 방정식은 $a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$이다.

(나) 선분 AB의 평면 α위로의 정사영을 선분 $A'B'$이라 하고, 직선 AB와 평면 α가 이루는 각의 크기를 $\theta\left(0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right)$라고 하면 $\overline{A'B'} \neq \overline{AB}cos\theta$이다.

(다) 함수 $f(x)$가 미분가능하고 $f(x) \neq 0$일 때, 로그함수의 미분법을 이용하여 여러 함수의 곱 또는 몫의 미분을 간단하게 계산할 수 있다. 예를 들어, $f(x)=\frac{u(x)}{v(x)w(x)}$의 도함수를 다음과 같이 구할 수 있다.
양변의 절댓값에 자연로그를 취하면
$\ln|f(x)|=\ln|u(x)|-\ln|v(x)|-\ln|w(x)|$이다.
양변을 x에 대하여 미분한 후 정리하면 $f'(x)$를 구할 수 있다.

아래 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 1이고 높이가 $\sqrt{3}$인 원뿔이 xy평면 위에 밑면의 중심이 원점 O에 오도록 놓여 있다. 원뿔 안의 점 $Q(0,0,1)$을 지나고 yz평면에 수직이며, xz평면과 이루는 각의 크기가 $\theta\left(\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$인 평면을 $S(\theta)$라 하자.



[4-1] 평면 $S(\theta)$의 방정식은 $(\cot\theta)y+z=1$임을 보여라.

[4-2] 좌표공간에 두 점 $A(0,1,2), B(0,3,3)$이 주어졌다. 평면 $S\left(\frac{\pi}{3}\right)$위의 점과 $P(x,y,z)$에 대하여 $D=2\overline{AP}^2-\overline{BP}^2$의 최솟값과 이 때의 점 P의 좌표를 구하여라.

[4-3] 원뿔과 yz평면 그리고 평면 $S(\theta)$의 교점 R_1과 R_2를 잇는 선분의 길이 $l(\theta)$를 구하여라.

[4-4] $\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $l(\theta)$의 역함수가 존재함을 보이고, $l'(\alpha)=\frac{\pi}{3}$를 만족하는 α에 대하여 $(l^{-1})'(\alpha)$의 값을 구하여라.

대학발표 예시답안

[4-1]

평면 $S(\theta)$는 점 $(0,0,1)$을 지나고 그림과 같이 법선벡터 $\overrightarrow{n}=(0,\cos\theta,\sin\theta)$이므로 평면 $S(\theta)$의 방정식은 $(\cos\theta)y+(\sin\theta)(z-1)=0$이다. $\sin\theta\neq 0\left(\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$이므로 양변을 $\sin\theta$로 나누면 $(\cot\theta)y+(z-1)=0$.

즉, $(\cot\theta)y+z=1$을 얻는다.

[4-2]

$$\begin{aligned} D &= 2\overline{AP}^2-\overline{BP}^2 \\ &= 2[x^2+(y-1)^2+(z-2)^2]-[x^2+(y-3)^2+(z-3)^2] \\ &= x^2+y^2+z^2+2y-2z-8 \\ &= x^2+(y+1)^2+(z-1)^2-10 \end{aligned}$$

그런데, $P(x,y,z)$가 평면 $S\left(\frac{\pi}{3}\right)$위의 점이므로 [4-1]에 의하여 $\left(\cot\frac{\pi}{3}\right)y+z=1$

즉, $\frac{y}{\sqrt{3}}+z=1$을 만족한다. 따라서

$D=x^2+(y+1)^2+\frac{y^2}{3}-10=x^2+\frac{4}{3}\left(y+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{39}{4}$이 되어

D의 최솟값은 $-\frac{39}{4}$이고 이 때의 점 P의 좌표는 $\left(0,-\frac{3}{4},1+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$이다.

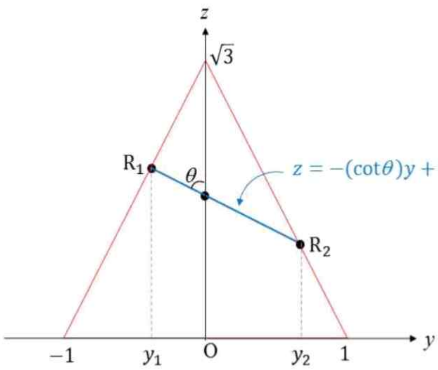
→ 서술과정

① 조건들을 놓치지 않게 조심하세요. $\frac{y}{\sqrt{3}}+z=1$의 식을 놓치면 답이 아예 틀립니다. 위의 문제를 괜히 준게 아닙니다.

② x,y,z가 서로 연관이 없다면, x,y,z가 각각 최소가 될 때 식의 최소가 됩니다.
→ x,y,z에 대한 이차식일 때 가능!

[4-3]

두 교점 R_1,R_2가 yz평면 위에 있으므로 $R_1(y_1,z_1),R_2(y_2,z_2)$라 하자. (단, $y_1<y_2$)



R_1은 $z=-(\cot\theta)y+1$과 $z=\sqrt{3}y+3$의 교점이므로 $y_1=-\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+\cot\theta}$이다.

한편, R_2는 $z=-(\cot\theta)y+1$과 $z=-\sqrt{3}y+\sqrt{3}$의 교점이므로 $y_2=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-\cot\theta}$이다.

따라서 $y_1-y_2=\frac{2(3-\sqrt{3})}{3-\cot^2\theta}$

제시문 [나]의 정사영의 정의를 활용하면 $l(\theta)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=y_2-y_1$이므로

$l(\theta)=\frac{y_2-y_1}{\sin\theta}=\frac{2(3-\sqrt{3})}{(3-\cot^2\theta)\sin\theta}$

→ 서술과정
① 설명이 어렵다면, 그림을 그려서 간단히 표현하는 것도 좋은 방법이 됩니다.

[4-4]

$\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$에서 $y = \cot\theta$는 감소함수 $y = \sin\theta$는 증가함수이므로 $l(\theta) = \frac{2(3-\sqrt{3})}{(3-\cot^2\theta)\sin\theta}$은 감소함수가 되어 일대일대응이다. 따라서 $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$에서 $l(\theta)$의 역함수가 존재한다. $l'(\alpha) = \frac{\pi}{3}$이므로 $l\left(\frac{\pi}{3}\right) = \alpha$이다.

따라서 역함수의 미분법에 의하여 $(l^{-1})'(\alpha) = \frac{1}{l'\left(\frac{\pi}{3}\right)}$이다. 이제 $l'\left(\frac{\pi}{3}\right)$을 구해보자.

제시문 [다]를 사용하여, 양변에 자연로그를 취하면

$\ln l(\theta) = \ln(2(3-\sqrt{3})) - \ln(3-\cot^2\theta) - \ln(\sin\theta)$이고 이 식의 양변을 미분하면

$\frac{l'(\theta)}{l(\theta)} = \frac{-2\cot\theta\csc^2\theta}{3-\cot^2\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = -\cot\theta\left(\frac{2\csc^2\theta}{3-\cot^2\theta}+1\right)$이다.

따라서 $l'\left(\frac{\pi}{3}\right) = l\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\sqrt{3}(3-\sqrt{3})}{2}\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \sqrt{3}-3$이고

$(l^{-1})'(\alpha) = \frac{1}{l'\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{\sqrt{3}-3}$

→ 서술과정
① 문제가 2문제 있습니다. 일대일 대응을 다루는 원칙은 미분하여 증감을 따지는 것이지만, 여기서 미분하여 증감을 따지기에는 너무 어렵습니다. 뒷 문제는 대입하는 것이라 조금 풀기가 나은데, 일단 풀 수 있는 것만이라도 푸는 것을 추천드립니다. 부분점수의 싸움입니다. 내가 어려우면 남들도 어렵습니다.
② 해설지의 증명을 조금 자세히 설명하면
$\cot^2\theta$는 $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$에서 1에서 0으로 감소합니다. 그러므로 $(3-\cot^2\theta)$는 증가하고, $\sin\theta$도 증가하므로 $(3-\cot^2\theta)\sin\theta$도 증가합니다. 따라서 $\frac{1}{(3-\cot^2\theta)\sin\theta}$은 감소합니다.

[문항 3] 제시문 (ㄱ) ~ (ㄹ)을 읽고 문제(논제1, 논제2)에 답하시오. (40점)

(ㄱ) [사건의 독립과 종속] 두 사건 A, B에 대하여 $P(B \mid A) = P(B)$일 때, 두 사건 A와 B는 서로 독립이라고 한다. 한편 두 사건 A와 B가 서로 독립이 아닐 때 두 사건 A와 B는 서로 종속이라고 한다.

(ㄴ) [확률의 곱셈 정리] 두 사건 A, B에 대하여 다음이 성립한다. (단, $P(A) > 0, P(B) > 0$)

$$P(A \cap B) = P(A)P(B \mid A) = P(B)P(A \mid B)$$

(ㄷ) [독립사건의 곱셈 정리] 두 사건 A, B가 서로 독립이기 위한 필요충분조건은 다음과 같다. (단, $P(A) > 0, P(B) > 0$)

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

(ㄹ) 1에서 n까지의 자연수 중에서 임의로 하나의 수를 택할 때 택한 수가 2의 배수인 사건을 A, 3의 배수인 사건을 B라고 한다.

논제 1. (20점) 제시문 (ㄹ)에서 n=10일 때 사건 A와 사건 B가 서로 독립인지 종속인지를 말하고 그 근거를 논술하시오.

논제 2. (50점) 제시문 (ㄹ)의 사건 A와 사건 B가 서로 독립인 자연수 n중에서 10부터 100까지의 모든 짝수들의 합을 구하고 그 근거를 논술하시오.

대학발표 예시답안

논제 1.

n=10 이므로 사건 $A, B, A\cap B$는

$A=\{2,4,6,8,10\}$, $B=\{3,6,9\}$, $A\cap B=\{6\}$임을 알 수 있다.

이 때, 사건 $A, B, A\cap B$의 확률은 각각 $P(A)=\frac{1}{2}, P(B)=\frac{3}{10}, P(A\cap B)=\frac{1}{10}$이다.

$P(A)P(B)=\frac{3}{20}\neq\frac{1}{10}=P(A\cap B)$이므로 두 사건 A, B는 서로 종속이다.

→ 서술과정

① $A, B, A\cap B$ 원소의 서술 → 그래야 정확히 어떤 이유로 확률을 계산했는지 설명할 수 있습니다.

② 독립의 조건인 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$임을 이용하여 종속임을 적는다.

⇒ $P(A)P(B)=\frac{3}{20}\neq\frac{1}{10}=P(A\cap B)$ 이런 식으로 간결하게 적으시는 게 좋습니다.

논제 2.

임의의 n에 대하여 $A, B, A\cap B$는 각각 2의 배수, 3의 배수, 6의 배수이고, 사건의 원소의 개수는 각각 $\frac{n}{2}, \frac{n}{3}, \frac{n}{6}$를 넘지 않는 최대 정수이다.

ⅰ) $n=6k$일 때, $P(A)P(B)=\frac{3k}{6k}\times\frac{2k}{6k}=\frac{k}{6k}=P(A\cap B)$이므로, 두 사건 A, B는 서로 독립이다.

ⅱ) $n=6k+2$일 때, $P(A)P(B)=\frac{3k+1}{6k+2}\times\frac{2k}{6k+2}=\frac{k}{6k+2}=P(A\cap B)$이므로, 두 사건 A, B는 서로 독립이다.

ⅲ) $n=6k+4$일 때, $P(A)P(B)=\frac{3k+2}{6k+4}\times\frac{2k+1}{6k+4}\neq\frac{k}{6k+4}=P(A\cap B)$이므로, 두 사건 A, B는 서로 종속이다.

ⅰ), ⅱ), ⅲ)에 의해 두 사건 A, B가 서로 독립인 10에서 100까지의 짝수 n은 $12, 18, \cdots, 96$과 $14, 20, \cdots, 98$이다.

구하는 합은 $26+\cdots+194=\frac{15\times 220}{2}=1650$

→ 서술과정

① $A, B, A\cap B$ 원소의 서술 → 2, 3, 6의 배수임을 생각하여 집합을 설정합니다.

② 2, 3, 6의 배수임을 감안하여 case 분류

② case 분류를 했다면 마지막 서술시 “ⅰ), ⅱ), ⅲ)에 의해”라고 서술하고 결과를 써주는 것이 좋습니다.