
확통 빈칸 약 18제
(Feat. 교육청)

1.

다음은 자연수 $n$에 대하여 부등식 $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{k+1}\times{}_{n}\mathrm{C}_{k}\right)<100$을 만족시키는 $n$의 최댓값을 구하는 과정이다.

> 이항정리를 이용하여 $(1+x)^{n}$을 전개하면
>
> $(1+x)^{n}=\sum_{k=0}^{n}\left(\boxed{\text{(가)}}\times x^{k}\right)$ …… ㉠
>
> 위 식의 양변에 $x=1$을 대입하면
>
> $2^{n}={}_{n}\mathrm{C}_{0}+{}_{n}\mathrm{C}_{1}+{}_{n}\mathrm{C}_{2}+\cdots+{}_{n}\mathrm{C}_{n}$ …… ㉡
>
> ㉠의 양변을 0에서 1까지 적분하여
>
> $\frac{2^{n+1}}{n+1}-\frac{1}{n+1}={}_{n}\mathrm{C}_{0}+\frac{1}{2}{}_{n}\mathrm{C}_{1}+\frac{1}{3}{}_{n}\mathrm{C}_{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}{}_{n}\mathrm{C}_{n}$ …… ㉢
>
> 을 얻는다.
>
> ㉡과 ㉢에서
>
> $\boxed{\text{(나)}}+\frac{1}{n+1}=\frac{1}{2}{}_{n}\mathrm{C}_{1}+\frac{2}{3}{}_{n}\mathrm{C}_{2}+\frac{3}{4}{}_{n}\mathrm{C}_{3}+\cdots+\frac{n}{n+1}{}_{n}\mathrm{C}_{n}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{k+1}\times{}_{n}\mathrm{C}_{k}\right)$이므로
>
> 부등식 $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{k+1}\times{}_{n}\mathrm{C}_{k}\right)<100$을 만족시키는 $n$의 최댓값은
>
> $\boxed{\text{(다)}}$이다.

위의 과정에서 (가)에 알맞은 식에 대하여 $k=1$일 때의 식을 $f(n)$, (나)에 알맞은 식을 $g(n)$, (다)에 알맞은 수를 $p$라 할 때, $f(6)\times g(5)+p$의 값은? [4점]

2.

1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 6개의 공이 주머니에 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 1개의 공을 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 넣는다. 이와 같은 시행을 3번 반복할 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 수를 차례로 $x_1$, $x_2$, $x_3$이라 하고, 이 세 수 $x_1$, $x_2$, $x_3$ 중에서 최댓값과 최솟값의 차를 확률변수 $X$라 하자. 예를 들어 $\mathrm{P}(X=1)=\frac{5}{36}$이다. 다음은 확률변수 $X$의 평균 $\mathrm{E}(X)$를 구하는 과정의 일부이다.

> 세 수 $x_1$, $x_2$, $x_3$을 순서쌍 $(x_1, x_2, x_3)$과 같이 나타내자.
>
> 세 수 $x_1$, $x_2$, $x_3$ 중에서 최댓값을 $p$, 최솟값을 $q$라 하고
>
> $p-q=k$라 하자.
>
> (1) $k=0$일 때
>
> 순서쌍 $(x_1, x_2, x_3)$의 개수는 $\boxed{\text{(가)}}$이고,
>
> $\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{6^3}\times\boxed{\text{(가)}}$
>
> (2) $k\neq0$일 때
>
> ⅰ) $k=1$을 만족시키는 순서쌍 $(x_1, x_2, x_3)$의 개수는
>
> $5\times\left(\frac{3!}{2!}+\frac{3!}{2!}\right)$
>
> 이다.
>
> ⅱ) $k=2$를 만족시키는 순서쌍 $(x_1, x_2, x_3)$의 개수는
>
> $4\times\left(\frac{3!}{2!}+\frac{3!}{2!}+3!\right)$
>
> 이다.
>
> 그러므로 $1\leq k\leq5$일 때, 순서쌍 $(x_1, x_2, x_3)$의 개수는
>
> $(6-k)\times\left\{\frac{3!}{2!}+\frac{3!}{2!}+\left(\boxed{\text{(나)}}\right)\times3!\right\}$
>
> 이고
>
> $\mathrm{P}(X=k)=\frac{1}{6^3}\times(6-k)\times\left\{\frac{3!}{2!}+\frac{3!}{2!}+\left(\boxed{\text{(나)}}\right)\times3!\right\}$
>
> (1), (2)에 의하여 확률변수 $X$의 평균 $\mathrm{E}(X)$는 다음과 같다.
>
> $\mathrm{E}(X)=\sum_{k=0}^{5}\{k\times\mathrm{P}(X=k)\}=\frac{1}{6^2}\sum_{k=1}^{5}\left(\boxed{\text{(다)}}\right)=\frac{35}{12}$

위의 (가)에 알맞은 수를 $a$라 하고, (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 할 때, $\frac{f(5)\times g(3)}{a}$의 값은? [4점]

## 3.

1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 6개의 공이 주머니에 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 1개의 공을 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 넣는다. 이와 같은 시행을 3번 반복할 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 수를 차례로 $x_1$, $x_2$, $x_3$이라 하고, 이 세 수 $x_1$, $x_2$, $x_3$ 중에서 최댓값과 최솟값의 차를 확률변수 $X$라 하자. 예를 들어 $\mathrm{P}(X=1)=\frac{5}{36}$이다.

다음은 확률변수 $X$의 평균 $\mathrm{E}(X)$를 구하는 과정의 일부이다.

세 수 $x_1$, $x_2$, $x_3$을 순서쌍 $(x_1, x_2, x_3)$과 같이 나타내자.
세 수 $x_1$, $x_2$, $x_3$ 중에서 최댓값을 $p$, 최솟값을 $q$라 하고
$p-q=k$라 하자.
(1) $k=0$일 때
순서쌍 $(x_1, x_2, x_3)$의 개수는 $\boxed{(가)}$이고,
$\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{6^3}\times\boxed{(가)}$
(2) $k\neq0$일 때
ⅰ) $k=1$을 만족시키는 순서쌍 $(x_1, x_2, x_3)$의 개수는
$5\times\left(\frac{3!}{2!}+\frac{3!}{2!}\right)$이다.
ⅱ) $k=2$를 만족시키는 순서쌍 $(x_1, x_2, x_3)$의 개수는
$4\times\left(\frac{3!}{2!}+\frac{3!}{2!}+3!\right)$이다.
⋮
그러므로 $1\le k\le5$일 때, 순서쌍 $(x_1, x_2, x_3)$의 개수는
$(6-k)\times\left\{\frac{3!}{2!}+\frac{3!}{2!}+(\boxed{(나)})\times 3!\right\}$이고
$\mathrm{P}(X=k)=\frac{1}{6^3}\times(6-k)\times\left\{\frac{3!}{2!}+\frac{3!}{2!}+(\boxed{(나)})\times3!\right\}$
(1), (2)에 의하여 확률변수 $X$의 평균 $\mathrm{E}(X)$는 다음과 같다.
$\mathrm{E}(X)=\sum_{k=0}^{5}\{k\times\mathrm{P}(X=k)\}=\frac{1}{6^2}\sum_{k=1}^{5}(\boxed{(다)})=\frac{35}{12}$

위의 (가)에 알맞은 수를 $a$라 하고, (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 할 때, $\frac{f(5)\times g(3)}{a}$의 값은? [4점]

## 4.

2 이상의 자연수 $n$에 대하여 $1\le a<b\le n$, $1\le c<d\le n$을 만족하고, 좌표평면 위의 네 직선 $x=a$, $x=b$, $y=c$, $y=d$로 둘러싸인 직사각형의 둘레의 길이가 $2n$이 되도록 자연수 $a$, $b$, $c$, $d$를 택한다.

다음은 $b-a$의 값을 확률변수 $X$라 할 때 $\mathrm{E}(X)=\frac{n}{2}$임을 보이는 과정이다.

확률변수 $X$가 가질 수 있는 가장 작은 값은 1, 가장 큰 값은 $\boxed{(가)}$이다.
$X=k$일 때, $b-a=k$이므로 $1\le a\le n-k$이고,
$d-c=n-k$이므로 $1\le c\le\boxed{(나)}$이다.
그러므로 $\mathrm{P}(X=k)=\dfrac{(n-k)\times\boxed{(나)}}{\sum_{i=1}^{\boxed{(가)}}(n-i)\times i}$이다.
따라서
$\mathrm{E}(X)=\sum_{k=1}^{\boxed{(가)}}\{k\times\mathrm{P}(X=k)\}$
$=\frac{6}{\boxed{(다)}}\sum_{k=1}^{\boxed{(가)}}\{k\times(n-k)\times\boxed{(나)}\}$
$=\frac{n}{2}$
이다.

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(k)$, $h(n)$이라 할 때, $\frac{h(7)}{f(8)\times g(6)}$의 값은? [4점]


확통 빈칸 약 13제
(Feat. 평가원)

1.

다음은 $x$에 대한 다항식 $(x+a^2)^n$과 $(x^2-2a)(x+a)^n$의 전개식에서 $x^{n-1}$의 계수가 같게 되는 두 자연수 $a$와 $n(n \geq 4)$의 값을 구하는 과정의 일부이다.

$(x+a^2)^n$의 전개식에서 $x^{n-1}$의 계수는 $a^2n$이다.
$(x^2-2a)(x+a)^n = x^2(x+a)^n - 2a(x+a)^n$에서
$x^2(x+a)^n$을 전개하면
$x^{n-1}$의 계수는 $\boxed{\text{(가)}} \times a^3$이고,
$2a(x+a)^n$을 전개하면 $x^{n-1}$의 계수는 $2a^2n$이다.
따라서 $(x^2-2a)(x+a)^n$의 전개식에서
$x^{n-1}$의 계수는

$$\boxed{\text{(가)}} \times a^3 - 2a^2n$$

이다. 그러므로

$$a^2n = \boxed{\text{(가)}} \times a^3 - 2a^2n$$

이고, 이 식을 정리하여 $a$를 $n$에 관한 식으로 나타내면

$$a = \frac{18}{\boxed{\text{(나)}}}$$

이다. 여기서 $a$는 자연수이고 $n$은 4 이상의 자연수이므로

$n = \boxed{\text{(다)}}$ 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 하고, (다)에 알맞은 수를 $k$라 할 때, $f(k)+g(k)$의 값은? [4점]

2.

다음은 $n$명의 사람이 각자 세 상자 A, B, C 중 2개의 상자를 선택하여 각 상자에 공을 하나씩 넣을 때, 세 상자에 서로 다른 개수의 공이 들어가는 경우의 수를 구하는 과정이다. (단, $n$은 6의 배수인 자연수이고 공은 구별하지 않는다.)

세 상자에 서로 다른 개수의 공이 들어가는 경우는 '(i) 세 상자에 공이 들어가는 모든 경우'에서 '(ii) 세 상자에 모두 같은 개수의 공이 들어가는 경우'와 '(iii) 세 상자 중 두 상자에만 같은 개수의 공이 들어가는 경우'를 제외하면 된다.

(i)의 경우 :
$n$명의 사람이 각자 세 상자 중 공을 넣을 두 상자를 선택하는 경우의 수는 $n$명의 사람이 각자 공을 넣지 않을 한 상자를 선택하는 경우의 수와 같다. 따라서 세 상자에서 중복을 허락하여 $n$개의 상자를 선택하는 경우의 수인 (가)이다.

(ii)의 경우 :
각 상자에 $\frac{2n}{3}$개의 공이 들어가는 경우뿐이므로 경우의 수는 1이다.

(iii)의 경우 :
두 상자 A, B에 같은 개수의 공이 들어가면 상자 C에는 최대 $n$개의 공을 넣을 수 있으므로 두 상자 A, B에 각각 $\frac{n}{2}$개보다 작은 개수의 공이 들어갈 수 없다. 따라서 두 상자 A, B에 같은 개수의 공이 들어가는 경우의 수는 (나)이다.
그러므로 세 상자 중 두 상자에만 같은 개수의 공이 들어가는 경우의 수는 ${}_3C_2 \times ((\text{나})-1)$이다.

따라서 세 상자에 서로 다른 개수의 공이 들어가는 경우의 수는 (다)이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$, $h(n)$이라 할 때, $\frac{f(30)}{g(30)}+h(30)$의 값은? [4점]

3.

확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 0.121 | 0.221 | 0.321 | 합계 |
|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X=x)$ | $a$ | $b$ | $\frac{2}{3}$ | 1 |

다음은 $\mathrm{E}(X)=0.271$일 때, $\mathrm{V}(X)$를 구하는 과정이다.

$Y=10X-2.21$이라 하자. 확률변수 $Y$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| Y | -1 | 0 | 1 | 합계 |
|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(Y=y)$ | $a$ | $b$ | $\frac{2}{3}$ | 1 |

$\mathrm{E}(Y)=10\mathrm{E}(X)-2.21=0.5$이므로

$a=\boxed{\text{(가)}}$, $b=\boxed{\text{(나)}}$

이고 $\mathrm{V}(Y)=\frac{7}{12}$이다.

한편, $Y=10X-2.21$이므로

$\mathrm{V}(Y)=\boxed{\text{(다)}}\times\mathrm{V}(X)$이다.

따라서 $\mathrm{V}(X)=\frac{1}{\boxed{\text{(다)}}}\times\frac{7}{12}$이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 $p$, $q$, $r$라 할 때, $pqr$의 값은? (단, $a$, $b$는 상수이다.) [4점]

4.

자연수 $n$에 대하여 $2a+2b+c+d=2n$을 만족시키는 음이 아닌 정수 $a$, $b$, $c$, $d$의 모든 순서쌍 $(a, b, c, d)$의 개수를 $a_n$이라 하자. 다음은 $\sum_{n=1}^{8} a_n$의 값을 구하는 과정이다.

음이 아닌 정수 $a$, $b$, $c$, $d$가 $2a+2b+c+d=2n$을
만족시키려면 음이 아닌 정수 $k$에 대하여
$c+d=2k$이어야 한다.
$c+d=2k$인 경우는 (1) 음이 아닌 정수 $k_1$, $k_2$에 대하여
$c=2k_1$, $d=2k_2$인 경우이거나 (2) 음이 아닌 정수 $k_3$, $k_4$에
대하여 $c=2k_3+1$, $d=2k_4+1$인 경우이다.

(1) $c=2k_1$, $d=2k_2$인 경우 :
$2a+2b+c+d=2n$을 만족시키는 음이 아닌 정수
$a$, $b$, $c$, $d$의 모든 순서쌍 $(a, b, c, d)$개수는
$\boxed{\text{(가)}}$이다.

(2) $c=2k_3+1$, $d=2k_4+1$인 경우 :
$2a+2b+c+d=2n$을 만족시키는 음이 아닌 정수
$a$, $b$, $c$, $d$의 모든 순서쌍 $(a, b, c, d)$개수는
$\boxed{\text{(나)}}$이다.

(1), (2)에 의하여 $2a+2b+c+d=2n$을 만족시키는
음이 아닌 정수 $a$, $b$, $c$, $d$의 모든 순서쌍 $(a, b, c, d)$의
개수 $a_n$은

$$a_n=\boxed{\text{(가)}}+\boxed{\text{(나)}}$$

이다. 자연수 $m$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{m}\boxed{\text{(나)}}={}_{m+3}\mathrm{C}_4$$

이므로

$$\sum_{n=1}^{8}a_n=\boxed{\text{(다)}}$$

이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 하고, (다)에 알맞은 수를 $r$이라 할 때, $f(6)+g(5)+r$의 값은? [4점]


교육청 빠른 정답 및
교육청 해설


평가원 빠른 정답