

[18년 시행 9월 평가원 가형-30번]

1. 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$ 이고 최솟값이 0인 사차함수 $f(x)$ 와 함수 $g(x)=2x^4e^{-x}$ 에 대하여
합성함수 $h(x)=(f \circ g)(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 방정식 $h(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.
(나) 함수 $h(x)$ 는 $x=0$ 에서 극소이다.
(다) 방정식 $h(x)=8$ 의 서로 다른 실근의 개수는 6이다.

$f'(5)$ 의 값을 구하시오. (단, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)=0$) [4점]

[상세풀이]

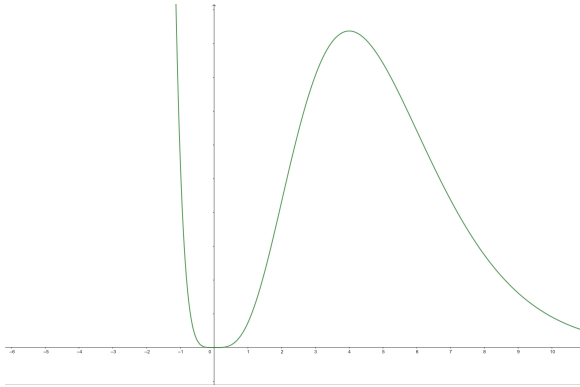
1. [풀이]

① 함수 $g(x)=2x^4e^{-x}$ 의 개형을 그려보면

$$g'(x)=(8x^3-2x^4)e^{-x}, \quad g'(x)=x^3(8-2x)e^{-x}=0 \text{이므로}$$

$x=0$ 또는 $x=4$ 을 갖는다.

즉, 0을 지나고 $x=4$ 에서 극댓값을 갖는 개형임을 알 수 있다.



위의 그림에 의해 함수 $g(x) \geq 0$ 인 함수임을 알 수 있다.

② 조건

합성함수 $h(x)=(f \circ g)(x)=f(g(x))$, $g(x)=\alpha$ 로 놓는다.

$h(x)=f(\alpha)$ 로 나타낼 수 있다.

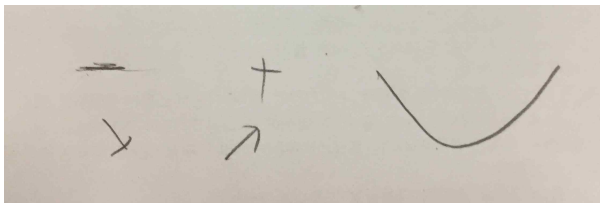
①에서 $g(x) \geq 0$ 이므로 $\alpha \geq 0$ 임을 알 수 있다.

(가) 방정식 $h(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

: $h(x)=f(\alpha)$, $f(\alpha)=0$ 에서 적어도 2개 이상의 실근이 존재함을 알 수 있다.

(나) 함수 $h(x)$ 는 $x=0$ 에서 극소이다.

: 함수 $h(x)$ 는 다음 그림과 같은 일부분의 개형이 존재한다.



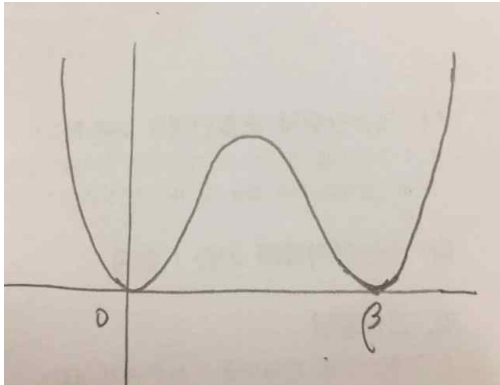
③ ②에 의해서 아래로 볼록이면서 2개 이상의 실근의 개형이라면

(가) $h(x) = f(\alpha)$, $h(x) = \frac{1}{2}(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$ 로 나타낼 수 있는데

$f(\alpha) \geq 0$ 에서 $\alpha \geq 0$ 이므로 $\alpha = 0$ 로 놓을 수 있다.

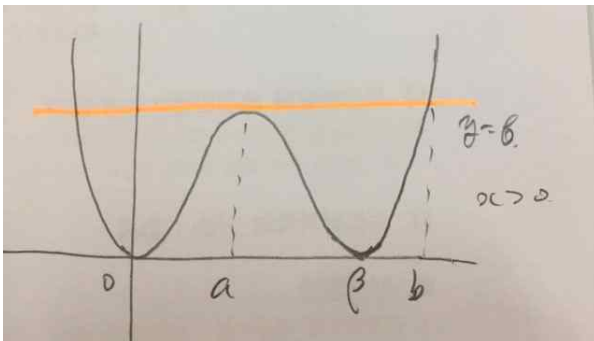
즉, $h(x) = \frac{1}{2}(x-\alpha)^2(x-\beta)^2 = \frac{1}{2}x^2(x-\beta)^2$, $h(x) = \frac{1}{2}x^2(x-\beta)^2$ 이다.

$f(x) = \frac{1}{2}x^2(x-\beta)^2$ 로 나타낼 수 있으므로 함수 $f(x)$ 의 사차함수의 개형은 다음과 같다.



④ 조건 (다) 방정식 $h(x) = 8$ 의 서로 다른 실근의 개수는 6이다.

: $h(x) = f(g(x))$ 이므로 함수 $f(x)$ 와 $y = 8$ 과의 교점에서 $x > 0$ 경우에서의 그림은 다음과 같다.



즉, $g(x) = a$ 와 $g(x) = b$ 로 놓을 수 있으므로 조건을 만족하는 그림은 다음과 같다.

