[20년 6월 평가원 30번]

4. 상수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=a\sin^3 x+b\sin x$가

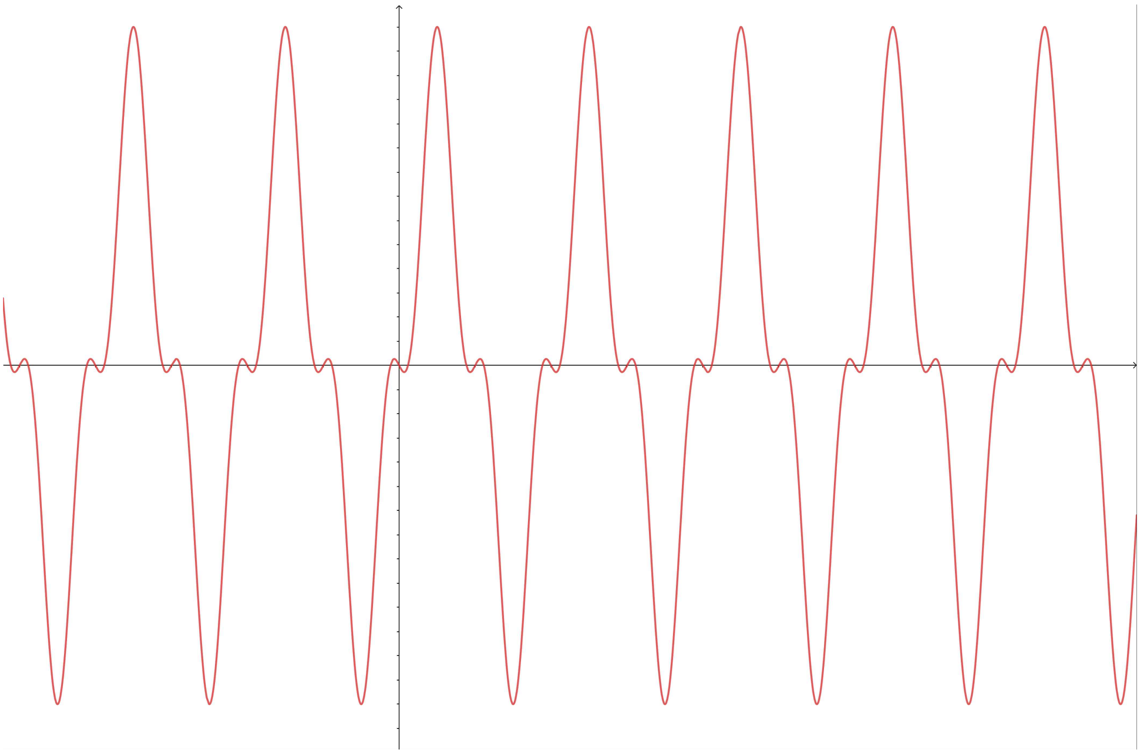
$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=3\sqrt{2},\ f\left(\frac{\pi}{3}\right)=5\sqrt{3}$$

을 만족시킨다. 실수 $t(1<t<14)$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 x좌표 중 양수인 것을 작은 수부터 크기순으로 모두 나열할 때, n번째 수를 x_n이라 하고

$$c_n=\int_{3\sqrt{2}}^{5\sqrt{3}}\frac{t}{f'(x_n)}dt$$

라 하자. $\sum_{n=1}^{101}c_n=p+q\sqrt{2}$일 때, $q-p$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

다음 그림은 원점 $(0,\ 0)$을 지나는 함수 $f(x)$의 그래프의 개형이다.



4. [풀이]

① $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}a+\frac{\sqrt{2}}{2}b=3\sqrt{2}$, $a+2b=12$

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{8}a+\frac{\sqrt{3}}{2}b=5\sqrt{3}$, $3a+4b=40$

$a+2b=12$, $3a+4b=40$에서 $b=-2$, $a=16$

함수 $f(x)=16\sin^3 x-2\sin x$, $f(x)=2\sin x\left(8\sin^2 x-1\right)$

$f'(x)=2\cos x\left(8\sin^2 x-1\right)+2\sin x(16\sin x\cos x)=16\sin^2 x\cos x-2\cos x+32\sin^2 x\cos x$

$f'(x)=48\sin^2 x\cos x-2\cos x=2\cos x\left(24\sin^2 x-1\right)=0$

$\cos x=0$ 또는 $\sin x=\pm\frac{1}{2\sqrt{6}}=\pm\frac{\sqrt{6}}{12}$

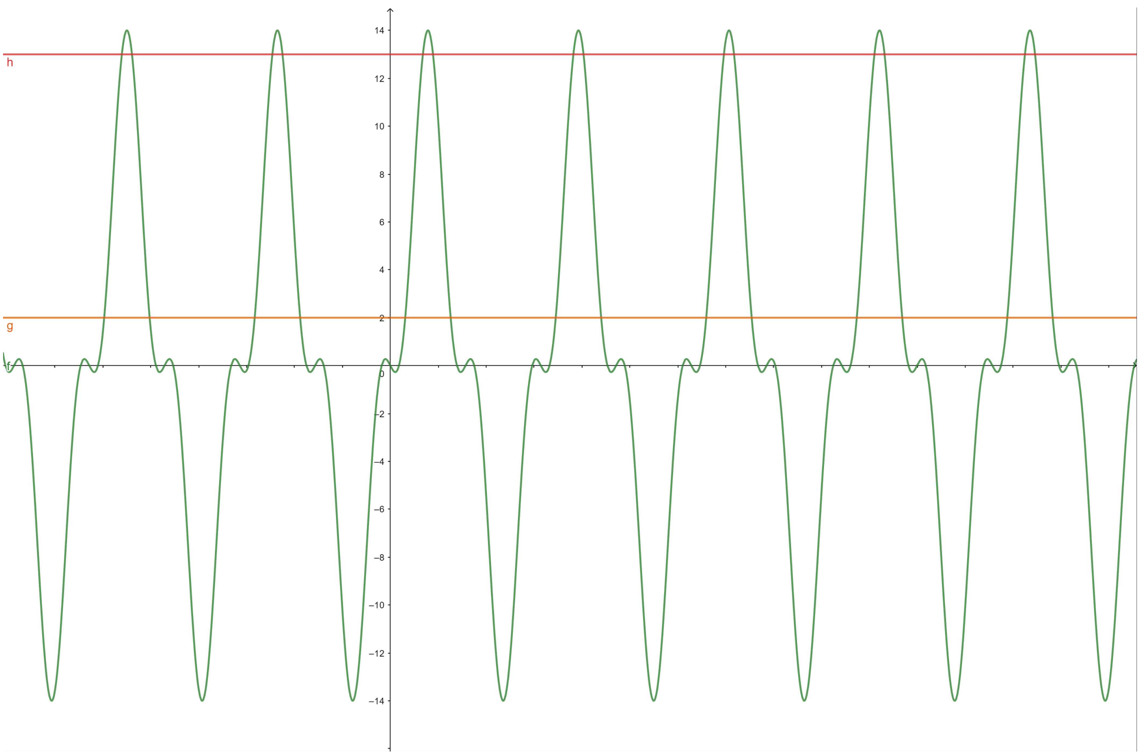
② 문제에서 실수 $t(1<t<14)$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 x좌표 중 양수인 것을 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 x_n이라 했는데

다음 그림과 같이 $x=\frac{\pi}{3}$을 함수 $f(x)=16\sin^3 x-2\sin x$에 대입하면

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=16\times\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right)-2\times\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=16\times\frac{1}{8}-2\times\frac{1}{2}=2-1=1$,

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=16\times\sin^3\left(\frac{\pi}{2}\right)-2\times\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=16-2=14$

이므로 실수 t의 경계는 다음 그림과 같이 나타낼 수 있다.



함수 $f(x)$의 그래프는 주기 2π인 함수이고, $y=t$와 만나는 점의 x좌표들은 위와 같이 $\frac{\pi}{2}$

를 중심으로 x축의 좌표를 α와 β로 놓으면 $\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{\pi}{2}$, $\alpha+\beta=\pi$

$\sin\pi=0$이므로 x축 좌표들의 합들은 짝수 항까지의 합은 0이 됨을 알 수 있다.

문제의 조건 $\displaystyle\sum_{n=1}^{101}c_n$에서 $c_1+c_2=c_3+c_4=\ \cdots\ =c_{99}+c_{100}=0$이므로

c_{101}이 남는다. 그래프에서 $c_{101}=c_1$이라 놓을 수 있다.

즉, $\displaystyle\sum_{n=1}^{101}c_n=c_1$의 값을 구하면 된다.

③ $y=f(x)$, $y=t$에서 $t=f(x)$이므로 조건에서

$t=3\sqrt{2}$은 $x=\dfrac{\pi}{4}$

$t=5\sqrt{3}$은 $x=\dfrac{\pi}{6}$

$t=f(x)=y$을 t에 관해 미분하면 $1=\dfrac{dy}{dt}$, $dt=dy$

$y=f(x)$을 x에 관해 미분하면 $\dfrac{dy}{dx}=f'(x)$, $dx=\dfrac{dy}{f'(x)}=\dfrac{dt}{f'(x)}$이므로

$$c_1=\int_{3\sqrt{2}}^{5\sqrt{3}}\frac{t}{f'(x_1)}dt=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}y\,dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}f(x_1)dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left(16\sin^3x_1-2\sin x_1\right)dx$$

x_1을 x로 놓아도 관계없으므로

$$c_1=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left(16\sin^3x-2\sin x\right)dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left(16\sin^2x\sin x-2\sin x\right)dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left\{16\left(1-\cos^2x\right)\sin x-2\sin x\right\}dx$$

$$c_1=14\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\sin x\,dx-16\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\cos^2x\sin x\,dx=14\left[-\cos x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}-16\left[-\frac{1}{3}\cos^3x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=-7+7\sqrt{2}+\frac{2}{3}-\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$c_1=\frac{-19}{3}+\frac{17\sqrt{2}}{3}$$

문제에서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{101}c_n=p+q\sqrt{2}$

$p=-\dfrac{19}{3}$, $q=\dfrac{17}{3}$이므로 $q-p=\dfrac{17}{3}-\left(-\dfrac{19}{3}\right)=\dfrac{17}{3}+\dfrac{19}{3}=\dfrac{36}{3}=12$