

2020학년도 랑데뷰 실전 모의고사 문제지-시즌3 제3회

제 2 교시

수 학 영 역 (가 형)

5지 선 다 형

1. 6종류의 시계 중 3종류를 고르는 방법의 수는? [2점]
① 20 ② 15 ③ 12 ④ 6 ⑤ 2

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+4x)}{2x}$ 의 값은? [2점]
① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

3. 좌표평면에서 두 직선 $l_1 : x+1 = \frac{y}{2k-1}$, $l_2 : x-5 = \frac{3-y}{3}$ 이 서로 평행할 때, 실수 k 의 값은? [2점]
① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

4. 남학생 3명과 여학생 3명이 원탁에 둘러앉을 때, 여학생끼리 서로 이웃하지 않는 경우의 수는? [3점]
① 18 ② 16 ③ 14 ④ 12 ⑤ 10

5. 곡선 $y^2+2xy+8=0$ 위의 점 $(-3, 4)$ 에서의 접선의 기울기는? [3점]
- ① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

6. 한 개의 주사위를 16번 던질 때, 4의 약수의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X 라 하자. $V(X)$ 의 값은? [3점]
- ① 8 ② 7 ③ 6 ④ 5 ⑤ 4

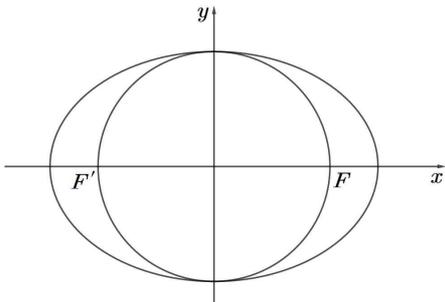
7. 이차방정식 $4x^2-kx+1=0$ 의 두 근이 $\sin\theta, \cos\theta$ 일 때, 양수 k 의 값은? [3점]
- ① 4 ② $2\sqrt{5}$ ③ $2\sqrt{6}$ ④ 5 ⑤ $2\sqrt{7}$

8. 7명의 학생을 2명, 2명, 3명으로 나누는 방법의 수는?

[3점]

- ① 210 ② 105 ③ 70 ④ 50 ⑤ 40

9. 다음 그림과 같이 어떤 타원의 단축을 지름으로 하는 원을 그리면 그 원은 타원의 두 초점 F, F' 을 지난다고 한다. 타원의 단축의 길이가 2일 때, 타원의 장축의 길이는? [3점]



- ① $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ② $\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{6}$ ④ $\sqrt{7}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

10. 좌표공간의 두 점 $P(3, 0, 5), Q(1, -2, 4)$ 에 대하여

$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OQ}$ 일 때, $|\overrightarrow{OR}|$ 의 값은? (단, O 는 원점) [3점]

- ① 10 ② $\sqrt{101}$ ③ $\sqrt{102}$ ④ $\sqrt{103}$ ⑤ $2\sqrt{26}$

11. $1 \leq a \leq 5$ 인 임의의 실수 a 에 대하여 이차방정식 $x^2 + 2ax + 3a = 0$ 이 실근을 가질 확률은? [3점]

- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

12. 연속함수 $f(x)$ 가 $f(x) = 2e^{x^2} + \int_0^1 tf(t)dt$ 를 만족시킬 때, $\int_0^1 xf(x)dx$ 의 값은? [3점]

- ① $2e-2$ ② $e-2$ ③ $\frac{e}{2}-1$ ④ $e-1$ ⑤ $\frac{e+1}{2}$

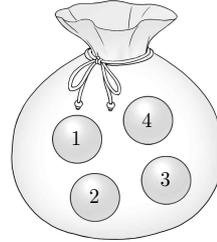
13. 두 점 $A(\sqrt{7}, 3, \sqrt{3})$, $B(2\sqrt{7}, 6, a)$ 를 지나는 직선 AB가 xy 평면과 이루는 각의 크기가 60° 일 때, 양수 a 의 값은?

[3점]

- ① $2\sqrt{3}$ ② $3\sqrt{3}$ ③ $4\sqrt{3}$ ④ $5\sqrt{3}$ ⑤ $6\sqrt{3}$

14. 주머니 속에 네 개의 숫자 1, 2, 3, 4이 각각 하나씩 적혀 있는 공 4개가 들어 있다. 이 주머니에서 1개의 공을 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 넣는다. 이 과정을 3번 반복할 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 수를 차례로 a, b, c 라 하자. $\frac{bc}{a}$ 가 정수가 되도록 하는 모든 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는?

[4점]

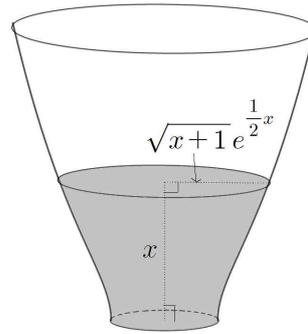


- ① 39 ② 41 ③ 43 ④ 45 ⑤ 47

15. 좌표공간의 점 $P(2, 1, 0)$ 에서 xy 평면에 접하고 반지름의 길이가 4인 구 S 위를 움직이는 점 Q 가 있다. 두 점 P, Q 에서 평면 $\alpha: 3x+4z+18=0$ 에 내린 수선의 발을 각각 P', Q' 이라 할 때, $|P'Q'|$ 의 최댓값은? [4점]
(단, 구 S 의 중심의 z 좌표는 0보다 크다.)

- ① $\frac{24}{5}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{5}+4$ ③ $\frac{21\sqrt{2}}{25}+4$
- ④ $\frac{4\sqrt{10}}{5}+4$ ⑤ $\frac{32}{5}$

16. 그림과 같이 어떤 용기에 깊이가 x ($x > 0$)가 되도록 물을 넣으면 그때의 수면은 반지름의 길이가 $\sqrt{x+1}e^{\frac{1}{2}x}$ 인 원이 된다고 한다. 물의 깊이가 2일 때, 용기에 담긴 물의 부피는? [4점]

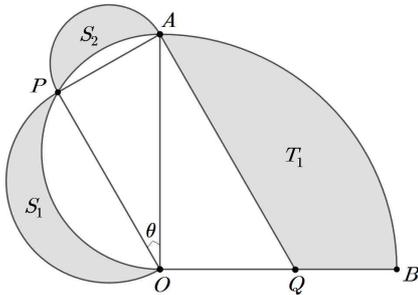


- ① $2e^2\pi$ ② $2e^3\pi$ ③ $3e^2\pi$ ④ $3e^3\pi$ ⑤ $2e^2\pi+e\pi$

17. 다음 그림과 같이 사분원 AOB 와 \overline{AO} 를 지름으로 하는 반원이 있다. \overline{AO} 를 지름으로 하는 반원의 호 위에 $\angle AOP = \theta$ 인 점 P 가 있고 \overline{PA} 와 \overline{OP} 를 각각 지름으로 하는 두 반원이 있는 도형이다. 두 반원에서 \overline{AO} 를 지름으로 하는 반원과 겹치는 부분을 제외한 부분의 넓이를 각각 S_1, S_2 라 하자. 점 A 를 지나고 직선 PO 와 평행한 직선이 선분 OB 와 만나는 점을 Q 라 할 때 도형 AQB 의 넓이를 T_1 이라 하자.

$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{(\pi + S_1 + S_2) - 4T_1}{\theta}$ 의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$, $\overline{AO} = 1$)

[4점]



- ① $\frac{5}{2}$ ② $5 - \frac{\pi}{2}$ ③ $\frac{7}{2}$ ④ 2π ⑤ $5 + \frac{\pi}{2}$

18. 좌표평면 위에 원 $x^2 + y^2 = 1$ 와 직선 $x = 2$ 가 있다.

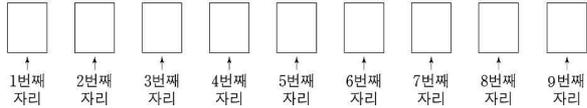
$t \neq -1, t \neq 1$ 인 실수 t 에 대하여 직선 $x = 2$ 위의 점 $P(2, t)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 그은 두 접선의 기울기의 역수의 합을 $f(t)$ 라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

보기

- ㄱ. $f(4) > 1$
 ㄴ. 구간 $(-1, 0) \cup (1, \infty)$ 에서 $f''(t) < 0$ 이다.
 ㄷ. 방정식 $f'(0)f(x) + x = 0$ 의 가장 큰 근을 β , 가장 작은 근을 α 라 할 때, $\beta - \alpha > 8$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

19. 1부터 9까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 9장의 카드가 있다. 이 카드를 모두 한 번씩 사용하여 그림과 같은 9개의 자리에 각각 한 장씩 임의로 놓을 때, 9이하의 자연수 k 에 대하여 k 번째 자리에 놓은 카드에 적힌 수가 k 이상인 사건을 A_k 라 하자.



다음은 두 자연수 $m, n (1 \leq n < m \leq 9)$ 에 대하여 두 사건 A_m 과 A_n 이 서로 독립이 되도록 하는 m, n 의 모든 순서쌍 (m, n) 의 개수를 구하는 과정이다.

A_k 는 k 번째 자리에 k 이상의 자연수 중 하나가 적힌 카드가 놓여 있고, k 번째 자리를 제외한 8개의 자리에 나머지 8장의 카드가 놓여 있는 사건이므로

$P(A_k) = \frac{7}{9}$ 이다.

$A_m \cap A_n (m > n)$ 은 m 번째 자리에 m 이상의 자연수 중 하나가 적힌 카드가 놓여 있고, n 번째 자리에 n 이상의 자연수 중 m 번째 자리에 놓인 카드에 적힌 수가 아닌 자연수가 적힌 카드가 놓여 있고, m 번째와 n 번째 자리를 제외한 7개의 자리에 나머지 7장의 카드가 놓여 있는 사건이므로

$P(A_m \cap A_n) = \frac{1}{9}$ 이다.

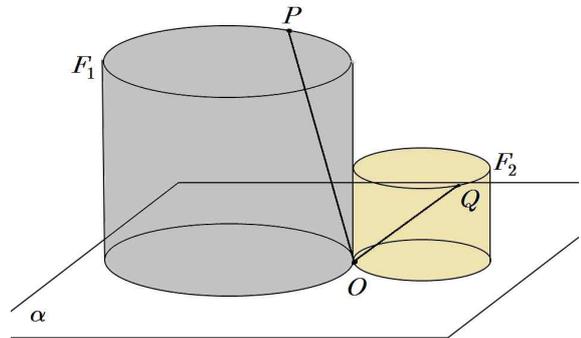
한편, 두 사건 A_m 과 A_n 이 서로 독립이기 위해서는 $P(A_m \cap A_n) = P(A_m)P(A_n)$ 을 만족시켜야 한다.

따라서 두 사건 A_m 과 A_n 이 서로 독립이 되도록 하는 m, n 의 모든 순서쌍 (m, n) 의 개수는 $\frac{1}{9}$ 이다.

위의 (가)에 알맞은 식에 $k=7$ 를 대입한 값을 p , (나)에 알맞은 식에 $m=5, n=3$ 를 대입한 값을 q , (다)에 알맞은 수를 r 라 할 때, $p \times q \times r$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{7}{9}$
- ② 1
- ③ $\frac{10}{9}$
- ④ $\frac{5}{4}$
- ⑤ $\frac{11}{8}$

20. 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 각각 2, 1이고 밑면의 지름의 길이와 높이의 길이가 같은 두 원기둥 F_1, F_2 가 서로 접하면서 두 원기둥의 밑면이 평면 α 위에 놓여 있다. F_1, F_2 의 밑면이 만나는 점을 O 라 하고, 점 P 는 F_1 의 평면 α 위에 있지 않은 밑면인 원의 둘레 위의 점이고, 점 Q 는 F_2 의 평면 α 위에 있지 않은 밑면인 원의 둘레 위의 점이다. $\overline{OP} = 2\sqrt{5}$ 이고 선분 OP, OQ 의 평면 α 위로의 정사영을 각각 선분 OP', OQ' 이라 할 때, 두 직선 OP', OQ' 이 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{6}$ 이다. 이 때, 사각형 $PP'Q'Q$ 의 넓이는?



- ① 7
- ② $2\sqrt{13}$
- ③ 10
- ④ $3\sqrt{13}$
- ⑤ 12

21. 양수 a 에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 다음 조건을 만족한다.

(가) $f(x) = e^x + \left\{ \int_0^a g(t) dt \right\} (2x)^3$

(나) $g(x) = \frac{x \int_0^1 f(t) dt}{x^2 + 1} - \frac{e-1}{a^2} x$

(단, $a \neq \sqrt{e-1}$ 이다.)

$\int_0^2 f(x) dx$ 의 값은? [4점]

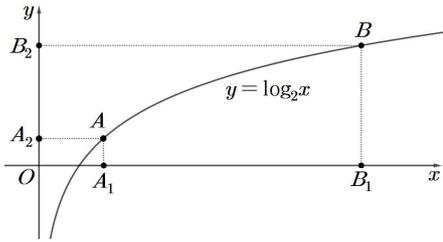
- ① $15-16e$ ② e^2-16e ③ $2e^2-16e$
 ④ $e^2+16-16e$ ⑤ $e^2+15-16e$

단 답 형

22. 함수 $f(x) = (2x^2 + 2)e^x$ 에 대하여 $f'(0)$ 의 값을 구하시오. [3점]

23. 두 사건 A, B 가 서로 독립이고 $P(A) = \frac{2}{5}$, $P(B) = \frac{7}{10}$ 일 때, $50P(A \cup B)$ 를 구하시오. [3점]

24. 함수 $y = \log_2 x$ 의 그래프 위의 두 점 A, B 가 있다. 두 점 A, B 에서 x 축으로 내린 수선의 발을 각각 A_1, B_1 이라 하고 y 축으로 내린 수선의 발을 각각 A_2, B_2 라 하자. 점 A_1, B_1 의 좌표를 각각 $(a, 0), (b, 0)$ 이라 한다. $\overline{A_2 B_2} = 3$ 일 때, $\frac{b}{a}$ 의 값을 구하시오. [3점]



25. 구간 $-1 \leq X \leq 1$ 에서 모든 실수 값을 취하는 확률변수 X 의 확률밀도함수가 $f(x) = -|x| + 1$ 일 때, $P\left(-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{2}\right) = k$ 이다. $100k$ 의 값을 구하시오. [3점]

26. 좌표평면 위를 움직이는 점 P 의 시간 t ($t \geq 0$)에서의 위치 (x, y) 가 $x = \cos t, y = 1$ 일 때, 시간 $t=0$ 에서 시간 $t=2\pi$ 까지 점 P 가 움직인 거리와 점 P 가 나타내는 곡선의 길이의 합을 구하시오. [4점]

27. 점근선의 방정식이 $y = \pm \sqrt{15}x$ 이고 두 초점이 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ ($c > 0$)인 쌍곡선이 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 쌍곡선 위의 한 점 P 에 대하여 $\overline{PF'} = 20$, $7 \leq \overline{PF} \leq 9$ 이다.
- (나) x 좌표가 양수인 꼭짓점 A 에 대하여 선분 AF 의 길이는 자연수이다.

이 쌍곡선의 주축의 길이가 자연수일 때, 그 길이를 구하시오. [4점]

28. 좌표평면 위에 세 점 $A(3, 6)$, $B(7, 6)$, $C(7, 2)$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC 가 있다. 1부터 8까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 8개의 공이 들어 있는 주머니에서 공을 임의로 한 개씩 두 번 꺼낼 때, 나오는 공에 적힌 수를 차례로 a , b 라 하자. 점 $D(a, b)$ 와 삼각형 ABC 의 세 변위의 임의의 점 사이의 거리의 최솟값을 l 이라 할 때, l 이 정수가 될 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. [4점]

(단, 한 번 꺼낸 공은 주머니에 다시 넣지 않고, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

29. 좌표평면에서 세 직선 l, m, n 의 임의의 점을 각각 P, Q, R 이라 하자. 원점 O 를 시점으로 하는 세 점 P, Q, R 의 위치벡터 $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ 은 원점 O 를 시점으로 하는 두 위치벡터 \vec{a}, \vec{b} 와 세 실수 s, t, u 에 대하여 다음을 만족시킨다.

$$\vec{p} = (1-s)\vec{a} + s\vec{b}, \quad \vec{q} = t(\vec{a}-4\vec{b}) + 4\vec{b}, \quad \vec{r} = u(\vec{b}-3\vec{a}) + (1-u)\vec{b}$$

두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 의 종점이 각각 A, B 이고 삼각형 OAB 의 넓이가 10일 때, 세 직선 l, m, n 으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S 라 하자. $8S$ 의 값을 구하시오. [4점]

30. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 와 최고차항의 계수가 2인 이차함수 $g(x)$ 에 대하여 $p(x) = e^x f(x), q(x) = e^x g(x)$ 라 할 때, $p(x)$ 와 $q(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $p(\alpha) = q(\alpha) = 32e^\alpha$ 이고 $p'(\alpha) = q'(\alpha) = 16e^\alpha$ 인 실수 α 가 존재한다.
- (나) $q'(\beta) - p'(\beta) = 8q(\beta)$ 이고 $p'(\beta) + 7q'(\beta) = 128e^\beta$ 인 실수 β 가 존재한다.

$p(\beta) + 7q(\beta) = 0$ 일 때, $q(\beta-1) - p(\beta-1)$ 의 값을 k 라 하자.

$\frac{k}{e^{\beta-1}}$ 의 값을 구하시오. (단, k 는 상수이다.) [4점]

※ 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.