

제 2 교시

수 학 영 역 (가 형)

5지 선 다 형

1. 확률변수 X 가 이항분포 $B\left(6, \frac{2}{3}\right)$ 를 따를 때, $E(X)$ 의 값은? [2점]
 ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}$ 의 값은? [2점]
 ① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

3. 중심의 좌표가 $(-2, 3, 4)$ 이고, 점 $(-2, 6, 0)$ 을 지나는 구의 반지름의 길이는? [2점]
 ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

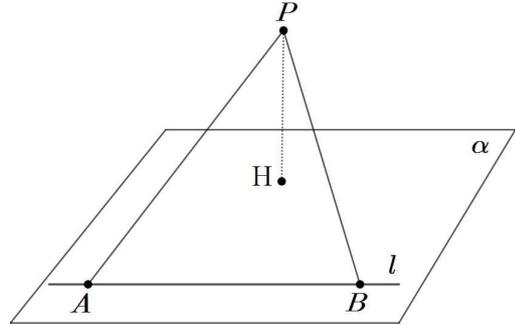
4. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P 의 시간 t 에서의 위치가 $x(t) = t^3 - 2t^2 + 3t$ 이다. $t = 2$ 에서의 가속도는? [3점]
 ① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

5. 연속함수 $f(x)$ 에 대하여 $\int_0^1 f(x)dx=1$ 일 때, $\int_0^1 f(1-x)dx$ 의 값은? [3점]
- ① 1 ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3

6. 랑데뷰모의고사의 7개의 문자를 일렬로 나열할 때, 세 문자 랑, 데, 뷰를 반드시 랑, 데, 뷰 순서로 나열하는 방법의 수는? [3점]
- ① 840 ② 630 ③ 420 ④ 210 ⑤ 105

7. 평면 α 위에 있는 서로 다른 두 점 A, B를 지나는 직선을 l 이라 하고, 평면 α 위에 있지 않은 점 P에서 평면 α 에 내린 수선의 발을 H라 하자. $\overline{AB}=12$, $\overline{PA}=\overline{PB}=10$, $\overline{PH}=6$ 일 때, 점 H와 직선 l 사이의 거리는? [3점]

- ① $2\sqrt{6}$ ② 5 ③ $\sqrt{26}$ ④ $3\sqrt{3}$ ⑤ $2\sqrt{7}$



8. 불량품이 4개, 합격품이 8개 들어 있는 상자에서 한 개씩 두 번 제품을 꺼낼 때, 두 개의 제품이 모두 불량품일 확률은?
(단, 꺼낸 제품은 다시 넣지 않는다.) [3점]

- ① $\frac{5}{11}$ ② $\frac{4}{11}$ ③ $\frac{3}{11}$ ④ $\frac{2}{11}$ ⑤ $\frac{1}{11}$

9. 평면 위의 점 P 와 $\triangle ABC$ 에 대하여 $\overrightarrow{3AP} = \overrightarrow{2AB} + \overrightarrow{AC}$ 가 성립한다. 이때, $\overrightarrow{BP} = k\overrightarrow{BC}$ 를 만족시키는 k 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{4}{3}$

10. 함수 $f(x) = (x^2 + ax + 5)e^x$ 이 극값을 갖지 않도록 하는 정수 a 의 개수는? [3점]

- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

11. 두 사건 A, B 에 대하여

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6}, P(B^c | A) = 2P(B | A)$$

일 때, $P(A)$ 의 값은? (단, B^c 은 B 의 여사건이다.) [3점]

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

12. 좌표공간에 네 점 $A(1, 2, 4), B(4, 1, 9), C(-3, 5, -7),$

$D(a, b, c)$ 가 있다. 두 직선 AB 와 CD 가 서로 수직이고 점 D 는 직선 AB 위에 있다. $a+b+c$ 의 값은? (단, a, b, c 는 실수이다.) [3점]

- ① 7 ② -7 ③ 5 ④ -5 ⑤ 6

13. 어떤 공장에서 생산되는 제품 중에서 100 개를 임의 추출하여 검사하였더니 불량품이 10 개이었다. 이 제품 전체의 불량률에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간이 $[a, b]$ 일 때, $b-a$ 의 값은?

(단, $P(0 \leq Z \leq 2.58) = 0.495$)

[3점]

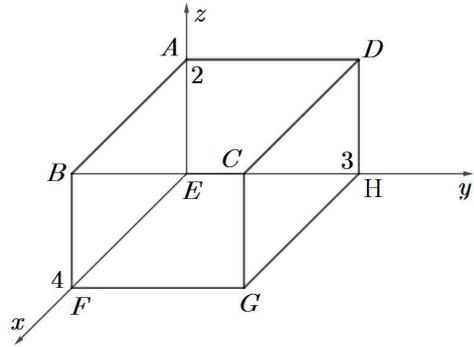
- ① 0.0774 ② 0.1264 ③ 0.1548 ④ 0.2598 ⑤ 0.3048

14. 다음 그림과 같이 가로, 세로의 길이와 높이가 각각 4, 3, 2인

직육면체 $ABCD-EFGH$ 가 있다. 점 P 가 $\overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{AG} + t\overrightarrow{AH}$

($0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1$)를 만족하면서 움직일 때, 점 P 가

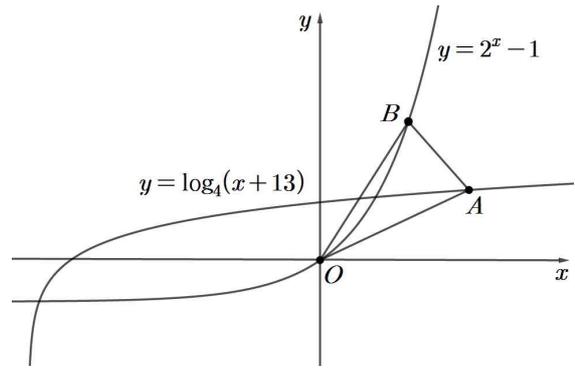
존재하는 영역의 넓이는? [4점]



- ① $8\sqrt{5}$ ② $8\sqrt{3}$ ③ 12 ④ $2\sqrt{13}$ ⑤ $4\sqrt{13}$

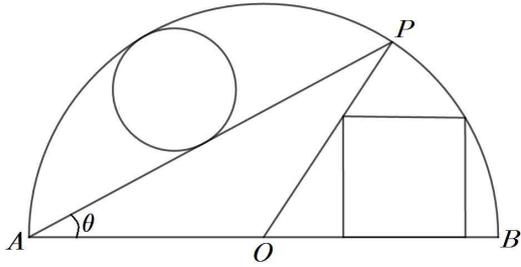
15. 학생 A_1, A_2, A_3, A_4 을 포함한 20명의 학생이 있는 반이 있다. 점심시간 좌석번호가 1번부터 20번까지 있는 급식실에 앉는 좌석번호를 정할 때, 학생 A_1, A_2, A_3, A_4 의 좌석번호를 a_1, a_2, a_3, a_4 라 한다. $a_1 - a_2 \geq 4, a_2 - a_3 \geq 4, a_3 - a_4 \geq 4$ 을 만족시키도록 좌석번호를 정하는 모든 순서쌍 (a_1, a_2, a_3, a_4) 의 개수는? [4점]
- ① 56 ② 126 ③ 186 ④ 260 ⑤ 330

16. 그림과 같이 함수 $y = \log_4(x+13)$ 의 그래프 위의 점 $A(a, b)$ 에 대하여 점 $B(b, a)$ 는 함수 $y = 2^x - 1$ 의 그래프 위의 점이다. 삼각형 OAB 의 넓이는? [4점]



- ① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$ ④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

17. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하고 중심이 O인 반원의 호 위의 한 점을 P라 하자.
 $\angle PAB = \theta$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{4}$)라 하고 부채꼴 OBP에 내접하는 정사각형의 넓이를 $f(\theta)$, 선분 AP에 접하고 원 O에 내접하는 작은 원의 넓이를 $g(\theta)$ 라 할 때, $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{f(\theta)g(\theta)}{\theta^2}$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{\pi}{4}$ ② $\frac{\pi}{3}$ ③ $\frac{\pi}{2}$ ④ $\frac{2}{3}\pi$ ⑤ π

18. 타원 $\frac{x^2}{9a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ 과 직선 $l_1: y = mx$ 의 교점 중 제1사분면 위의 점을 P라 하고, 점 P에서 타원에 접하는 직선을 l_2 라 하자. 직선 l_1 과 직선 l_2 가 이루는 예각의 크기를 $\theta(m)$ 이라 할 때, $\theta(m)$ 이 최소가 되도록 하는 m의 값은? (단, $a > 0$, $m > 0$ 이다.)

- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

19. 1부터 n 까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 n 장의 카드가 주머니에 들어 있다. 한 번에 1장에서 n 장까지 카드를 반복해서 꺼내려고 한다. 주머니에 남은 카드가 없도록 n 장의 카드를 다음과 같은 시행을 통해 주머니 속에 있는 모든 카드를 꺼낸다.

i 번째 꺼낸 카드의 개수가 m 이면 $(i+1)$ 번째 꺼내는 카드의 개수는 $\frac{m+1}{2}$ 이하이다.

다음은 이와 같은 과정을 통해 8장의 카드를 모두 꺼내는 방법의 수를 구하는 과정이다.

X 를 주머니 속에 있는 카드를 꺼낸 횟수라 하면

(i) $X=1$ 일 때, 8장의 카드를 한 번에 모두 꺼내야 하므로 구하는 경우의 수는 1(가지)이다.

(ii) $X=2$ 일 때, 8을 2개의 자연수로 분할한 것 중 만족하는 경우의 수는

(가) (가지)이다.

(iii) $X=3$ 일 때, 8을 3개의 자연수로 분할한 것 중 만족하는 경우의 수는

(나) (가지)이다.

(iv) $X=4$ 일 때, 8을 4개의 자연수로 분할한 것 중 만족하는 경우의 수는

(다) (가지)이다.

(v) $X=5$ 일 때, 8을 5개의 자연수로 분할한 것 중 만족하는 경우는 $8=4+1+1+1+1=3+2+1+1+1$ 이다. 따라서 구하는 경우의 수는

$${}_8C_4 \times {}_4C_1 \times {}_3C_1 \times {}_2C_1 \times {}_1C_1 \times \frac{1}{4!} + {}_8C_3 \times {}_5C_2 \times {}_3C_1 \times {}_2C_1 \times {}_1C_1 \times \frac{1}{3!}$$

$= 70 + 560 = 630$ (가지)이다.

(vi) $X=6$ 일 때, 8을 6개의 자연수로 분할한 것 중 만족하는 경우는 $8=3+1+1+1+1+1$ 이다. 따라서 구하는 경우의 수는 ${}_8C_3 = 56$

(vii) $X=7$ 일 때, 8을 7개의 자연수로 분할한 것 중 만족하는 경우는 $8=2+1+1+1+1+1+1$ 이다. 따라서 구하는 경우의 수는 ${}_8C_2 = 28$

(viii) $X=8$ 일 때, 8을 8개의 자연수로 분할한 것 중 만족하는 경우는 $8=1+1+1+1+1+1+1+1$ 이다. 따라서 구하는 경우의 수는 1이다.

그러므로 주어진 조건을 만족하는 개수는

$1 + \text{ (가) } + \text{ (나) } + \text{ (다) } + 630 + 56 + 28 + 1 = \text{ }$

(가지)이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r 이라 할 때, $p+q+r$ 의 값은? [4점]

① 704 ② 724 ③ 744 ④ 764 ⑤ 784

20. 이계 도함수를 갖는 함수 $f(x)$ 가 닫힌 구간 $[0, 1]$ 에서 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $f(x) > 0$
- (나) $\{f'(x)\}^2 \geq f''(x)$
- (다) $f(0) = 2\ln 2, f(1) = \ln 2$

$g(x) = e^{-f(x)}$ 라 할 때, **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

- | 보기 | —**
- ㄱ. 닫힌 구간 $[0, 1]$ 에서 $g''(x) \geq 0$ 이다.
 - ㄴ. 닫힌 구간 $[0, 1]$ 에서 $\{g(1) - g(0)\}x \geq g(x) - g(0)$ 이다.
 - ㄷ. 닫힌 구간 $[0, 1]$ 에서 $f(x) \geq 2\ln 2 - \ln(x+1)$ 이다.

- ① ㄱ
- ② ㄴ
- ③ ㄱ, ㄴ
- ④ ㄱ, ㄷ
- ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족한다.

(가) 모든 실수 x 에 대하여 $3f'(x) = (x+1)f''(x)$ 이다.
 (나) $\int_{-2}^0 \left\{ \tan\left(\frac{x+1}{2}\right) + 1 \right\} f(x) dx = 0$

$f(1)$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{78}{5}$ ② $\frac{79}{5}$ ③ 16
 ④ $\frac{81}{5}$ ⑤ $\frac{82}{5}$

단답형

22. 등식 ${}_n C_3 = 35$ 을 만족하는 자연수 n 의 값을 구하시오. [3점]

23. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + a}{x} = b$ 을 만족하는 상수 a, b 에 대하여 $a^2 + b^2$ 의 값을 구하시오. [3점]

24. 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하며 $f(1)=3, f'(1)=15$ 일 때, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-x^2 f(1)}{\ln x}$ 의 값을 구하시오. [3점]

25. 포물선

$$C_1: x^2 = ay - 3$$

에 초점의 좌표가 $F(0, c)$ 와 $F'(0, -c)$ 인 쌍곡선

$$C_2: \frac{x^2}{3} - y^2 = -1$$

의 점근선이 접할 때, $a+c$ 의 값을 구하시오. (단, a, c 는 양수이다.) [3점]

26. 확률변수 X 가 정규분포

$N\left(m, \frac{16}{(4m+1)^2}\right)$ 를 따른다고 한다.

$P(X \leq 10) = 0.9938$ 일 때, 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 $4m$ 의 값을 구하시오. (단, $m > 0$)

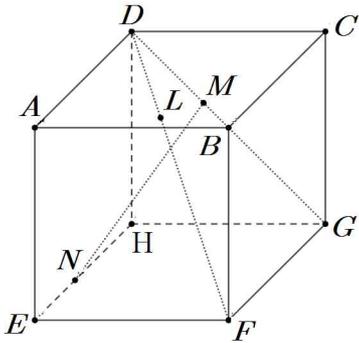
[4점]

표준정규분포표

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938
3.0	0.4987

27. 그림과 같이 한 모서리의 길이가 6인 정육면체

$ABCD-EFGH$ 에서 선분 DG 위에 $\overline{DM} : \overline{MG} = 1 : 2$ 인 점 M , 모서리 EH 위에 $\overline{EN} : \overline{NH} = 1 : 2$ 인 점 N 과 선분 DF 위에 $\overline{DL} : \overline{LF} = 1 : 2$ 인 점 L 이 있다. 두 점 P, Q 는 각각 M, L 를 출발하여 선분 MN, LF 을 따라 각각 일정한 속도로 움직여 4초 후에 각각 N, F 에 도착했다. 두 점 P, Q 사이의 거리의 최솟값을 구하시오. [4점]



28. 열 두 개의 면 중 k 개의 면에는 검정색이 각각 칠해져 있고, 나머지 면에는 흰색이 각각 칠해져 있는 정십이면체 모양의 물체가 있다. 이 물체를 n 번 던져서 지면에 닿는 면이 검정색이 되는 횟수를 X 라 하자. 확률변수 X 가 다음의 조건을 만족시킬 때, k 와 n 의 곱 nk 의 값을 구하시오. (단, 각각의 면에는 한 가지 색만 칠해져 있다.) [4점]

- | |
|--|
| (가) $3E(X) = 4V(X)$
(나) $P(X = 1) = 24P(X = 0)$ |
|--|

29. 중심이 0 이고 반지름의 길이가 1인 원이 있다.
 양수 x 에 대하여 원 위의 서로 다른 네 점 A, B, C, D가
 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $x\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OD} = \vec{0}$
- (나) $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD} = -\frac{1}{12}$

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ 의 값이 최대일 때, $\angle BOC = \alpha$, $\angle AOD = \beta$ 라 하면,
 $\sin(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{p} + \sqrt{q}}{24}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와
 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

30. 이차함수 $f(x)$ 와 음이 아닌 두 실수 a, b 에 대하여 실수 전체
 집합에서 정의된 함수 $g(x)$ 는

$$g(x) = \ln(f(x) + a) + e^{-f(x)} - b$$

이다. 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 다음의 조건을 동시에 만족시킨다.

- (가) $f(1) = f'(1) = 0$
- (나) 모든 $x_1, x_2 \in [c, \infty)$ 에 대하여 $(x_1 - x_2)(g(x_1) - g(x_2)) \geq 0$
 을 만족시키는 상수 c 의 최솟값은 2이다.
- (다) 모든 실수 x 에 대하여 $g(x) \geq 0$

이때, a 와 b 의 곱 ab 의 최댓값이 $p\left(c^2 - \frac{1}{c^2}\right) + q$ 이다.

$f(pq)$ 의 값을 구하시오.
 (단, $f(x)$ 의 최고차항의 계수와 p, q 는 정수이다.) [4점]

- ※ 확인 사항
- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)
 했는지 확인하시오.