

Go into Science



고전역학 기초

1 고전역학 기초

2 전자기학

3 광학

4 현대물리

5 고전역학 심화

6 유체역학

7 열역학

8 통합형

아래 그림 (가)와 같이 높이 H 인 곳에서 질량 M 인 물체를 자유 낙하시켰다. 낙하하는 물체가 높이 $\frac{H}{2}$ 인 곳을 지날 때의 속력을 v_1 , 지면에 닿는 순간의 속력을 v_2 라고 한다. (단, 중력 가속도는 g 이고, 공기 저항은 무시한다)

[1]

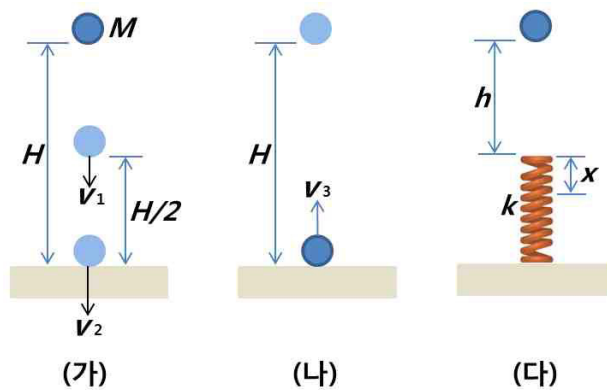
이때, 속력의 비, $\frac{v_1}{v_2}$ 를 구하고, 그 이유를 논하시오.

[2]

이 물체를 원위치로 등속력 v_3 으로 다시 올려놓았다. 이때 H 까지 물체가 올라가는 데 걸린 시간을 구하고, 이를 이용하여 시간당 한 일의 양을 구하시오.

[3]

아래 그림 (다)와 같이 용수철 상수가 k 인 용수철이 바닥에 놓여 있다. 용수철 위쪽 끝단에서의 높이 h 에서 물체를 자유 낙하시켜 용수철을 압축시켰다. 이때 용수철이 압축된 길이를 x 라고 할 때, x 를 M, h, k, g 를 이용하여 나타내고, 그 근거를 제시하시오.





[1]

역학적 에너지 보존법칙에 따르면, 감소한 위치에너지만큼 운동에너지가 증가한다.

$\frac{H}{2}$ 만큼 높이에서의 운동에너지는 다음과 같이 수식으로 표현할 수 있다.

$$\frac{1}{2}Mv_1^2 = Mg\frac{H}{2}$$

$$\therefore v_1 = \sqrt{gH}$$

바닥에 도달하기 직전의 운동에너지는 다음과 같이 수식으로 표현할 수 있다.

$$\frac{1}{2}Mv_2^2 = MgH$$

$$\therefore v_2 = \sqrt{2gH}$$

구하는 속도의 비는 다음과 같다.

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sqrt{gH}}{\sqrt{2gH}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

[2]

높이 H 까지 올라가는데 걸리는 시간은 다음과 같다.

$$t = \frac{H}{v_3}$$

시간당 한 일의 양 P 는 H 에서의 총 역학적 에너지에서 걸린 시간으로 나눈 값이다.

$$P = \frac{W}{t} = \frac{MgH}{\frac{H}{v_3}} = Mgv_3$$

[3]

역학적 에너지 보존법칙에 따르면, 물체의 중력에 의한 위치 에너지가 용수철의 탄성 퍼텐셜

에너지로 전환되었음을 알 수 있다. x 를 용수철의 압축된 길이라 하자.

$$Mg(h+x) = \frac{1}{2}kx^2$$

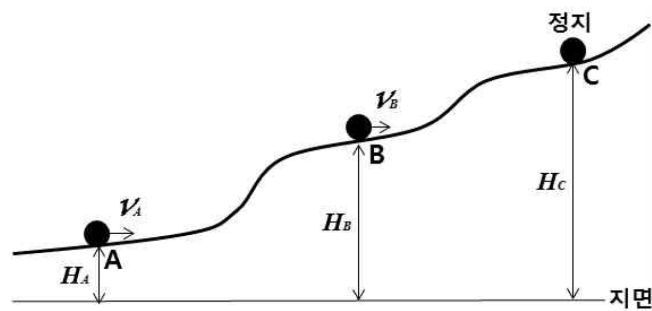
$$x^2 - \frac{2Mg}{k}x - \frac{2Mgh}{k} = 0$$

압축된 길이 x 는 항상 양의 값을 가지므로 근의 공식에 의해 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$x = \frac{Mg}{k} + \sqrt{\left(\frac{Mg}{k}\right)^2 + \frac{2Mgh}{k}}$$

아래 그림은 궤도를 따라 운동하는 물체가 지면으로부터 높이가 H_A 인 A 지점을 속도 v_A 로 통과하여, B 지점을 속도 v_B 로 지나 최고점 C 에 도달하여 일시 정지한 모습이다.

(단, 지면에서 물체의 중력에 의한 퍼텐셜 에너지는 0이며, 물체의 크기, 마찰 및 공기 저항은 무시한다.)



[1]

각 지점에서의 높이가 $H_B = 2H_A$, $H_C = 3H_A$ 를 만족할 때, 물체의 속도의 비 $\frac{v_A}{v_B}$ 를 구하고, 그 이유를 논하시오.

[2]

B 지점에서 물체의 중력에 의한 퍼텐셜 에너지는 운동 에너지의 2배일 때, 높이의 비 $\frac{H_C}{H_B}$ 를 구하고, 그 근거를 논하시오.



[1]

역학적 에너지는 운동에너지와 퍼텐셜 에너지의 합으로 정의되며, 이는 보존 된다.

A, B, C 지점에서의 역학적 에너지는 각각 다음과 같다.

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + mgH_A, \quad \frac{1}{2}mv_B^2 + mgH_B, \quad mgH_C$$

주어진 조건 $H_B = 2H_A$, $H_C = 3H_A$ 을 이용하면 역학적 에너지는 각각 다음과 같다.

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + mgH_A, \quad \frac{1}{2}mv_B^2 + 2mgH_A, \quad 3mgH_A$$

이 세 값은 동일하다.

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + mgH_A = 3mgH_A \text{ 이므로 } \frac{1}{2}mv_A^2 = 2mgH_A$$

$$\frac{1}{2}mv_B^2 + 2mgH_A = 3mgH_A \text{ 이므로 } \frac{1}{2}mv_B^2 = mgH_A$$

물체의 속력의 비는 다음과 같다.

$$\frac{v_A}{v_B} = \sqrt{2}$$

[2]

B 지점에서 물체의 중력에 의한 퍼텐셜 에너지는 운동 에너지의 2배이다.

B 지점에서 역학적 에너지는 다음과 같다.

$$\frac{1}{2}mv_B^2 + mgH_B = \frac{1}{2}mgH_B + mgH_B = \frac{3}{2}mgH_B$$

C 지점에서 역학적 에너지는 mgH_C 이다.

두 지점의 역학적 에너지는 같다.

$$\frac{3}{2}mgH_B = mgH_C$$

따라서 높이의 비는 다음과 같다.

$$\frac{H_C}{H_B} = \frac{3}{2}$$

편평한 직선도로에서 자동차 A가 자동차 B를 따라가고 있다. 이 때 A의 속력은 108km/h 이고 B의 속력은 72km/h 이다. B가 갑자기 감속을 하기 시작했고 1초 후 A도 감속하기 시작했다. 감속하여 정지할 때까지 A와 B의 가속도의 방향은 속도와 반대 방향이고 크기는 10m/s^2 이다. 두 자동차가 충돌을 피하기 위해서는 B가 감속하기 직전에 자동차 사이의 거리 d 가 최소한 얼마가 되어야 하는지 제시하시오. (단, 지면과의 마찰과 공기 저항은 무시하시오.)



처음속도 72km/h로 달리던 자동차 B가 시간 t 동안 감속을 할 때의 속도 v_B 는 다음과 같이 주어진다. 처음속도는 72km/h로 주어졌는데 이는 20m/s와 동일하다.

$$v_B = 20 - 10t$$

B가 정지하는데 걸리는 시간은 $v_B = 0$ 로부터 구할 수 있고 2초로 계산된다.

B가 정지할 때까지 변위 x_B 는 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$x_B = 20 \times 2 - \frac{1}{2} \times 10 \times 2^2 = 20\text{m}$$

한편 처음속도 108km/s=30m/s로 달리던 자동차 A는 B가 감속한 후 1초 동안은 처음속도로 계속 움직였으므로 그 동안 간 거리는 30m/s×1s= 30m가 된다. 그 이후 감속하는 시간 t 동안 속도 v_A 는 다음과 같이 주어진다.

$$v_A = 30 - 10t$$

A가 정지하는데 걸리는 시간은 마찬가지로 $V_A = 0$ 로부터 구할 수 있고 3초로 계산된다.

따라서 A가 정지할 때까지의 변위 x_A 는 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$x_A = 30 \times 3 - \frac{1}{2} \times 10 \times 3^2 = 45\text{m}$$

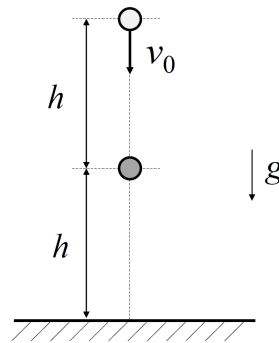
B가 감속을 시작했을 때 A와 B사이의 거리를 d 라고 하면 A와 B가 충돌을 피하기 위해서는 다음과 같은 관계가 성립해야 한다.

$$d + 20 \geq 45 + 30$$

$$d \geq 55$$

결과적으로 d 의 최솟값은 55m가 된다.

다음 그림과 같이 두 개의 공이 지표면에 수직인 직선 상의 높이 h 와 $2h$ 에 각각 놓여 있다. 높이 $2h$ 에 있던 공이 v_0 의 초기 속도로 지표면으로 낙하를 시작하고, 그와 동시에 높이 h 에 정지해 있던 공이 낙하를 시작한다. 지표면에 도달하기 전에 두 공이 충돌하기 위한 조건을 구하시오. (단, 두 공의 질량은 지구의 질량보다 매우 작고, 공의 크기는 무시하며, 지구의 중력 가속도는 g 로 일정하고, 공기저항이나 마찰은 없다고 가정한다.)





지표에서 $2h$ 높이에 있던 공(공1)은 초기 속도가 v_0 인 등가속도 직선 운동을 하므로, 두 공이 충돌하는 시점 t 에서 공 1의 이동 거리는 $s_1 = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$ 로 주어진다.

h 높이에 있던 공(공 2)은 초기 속도가 0인 등가속도 직선 운동을 하므로, 시간 t 에 공 2의 이동 거리는 $s_2 = \frac{1}{2} g t^2$ 로 주어진다.

두 공이 충돌할 때 $s_1 = s_2 + h$ 이므로, 두 공이 충돌하는 시점은 $t = \frac{h}{v_0}$ 로 주어진다.

충돌하기 전에 공 2의 이동거리는 $s_2 = \frac{1}{2} g t^2 < h$ 를 만족해야 하므로, 지표면에 도달하기 전에 두 공이 충돌하기 위한 조건은 $v_0 > \sqrt{\frac{1}{2} g h}$ 이다.

건물의 옥상에 있는 학생 A 가 지면으로부터 높이 20 (m) 위치에서 공을 가만히 놓았다. 가만히 놓은 공이 지면에 닿는 순간의 속력을 v_f 라고 하자. 학생 B 가 공을 지면에서 초기 속력 v_f 로 연직 윗방향으로 던져 올리는 순간, A 가 처음과 같은 위치에서 두 번째 공을 가만히 놓았다. 이때부터 서로 반대 방향으로 운동하는 두 공이 같은 높이에 도달할 때까지 걸리는 시간과 그때까지 두 번째 공이 움직인 거리를 구하시오.

(단, 공의 크기와 공기 저항은 무시한다. 중력 가속도의 크기는 $10\text{ (m/s}^2\text{)}$ 이다.)



A가 가만히 놓은 첫 번째 공의 초기 속력과 A와 지면 사이의 높이를 각각 v_0 와 h 라고 하자.

첫 번째 공은 $v_0 = 0$ 인 자유 낙하 운동을 하며, 이 때의 가속도는 $a = -g$ 로 쓸 수 있다.

지면에 대해 연직 윗방향을 양(+)의 방향으로 정하였다.

A를 기준으로 첫 번째 공이 지면까지 움직인 거리 $s = -h$ 이므로

$$\begin{aligned} v_f^2 &= v_0^2 + 2as = 0 + 2(-g)(-h) \\ v_f &= \sqrt{2gh} \end{aligned}$$

B가 지면에서 공을 연직 윗방향으로 던져 올리고, A가 두 번째 공을 가만히 놓은 상황을 고려하자.

학생 A가 가만히 놓은 공의 높이는

$$\begin{aligned} y_A - h &= (0)t + \frac{1}{2}(-g)t^2 \\ y_A &= h - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

학생 B가 던져 올린 공의 높이는

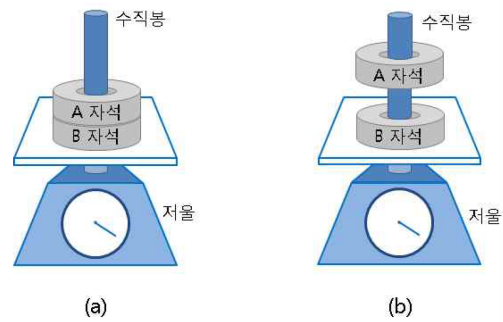
$$\begin{aligned} y_B &= (\sqrt{2gh})t + \frac{1}{2}(-g)t^2 \\ y_B &= \sqrt{2gh}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{2}$$

두 공이 같은 높이에 도달할 때 $y_A = y_B$ 가 되므로, ①과 ②를 연립하면

$$\begin{aligned} h - \frac{1}{2}gt^2 &= \sqrt{2gh}t - \frac{1}{2}gt^2 \\ h &= \sqrt{2gh}t \\ \therefore t &= \frac{h}{\sqrt{2gh}} = \sqrt{\frac{h}{2g}} = \sqrt{\frac{20}{2 \times 10}} = 1 \text{ (s)} \\ y_A &= h - \frac{1}{2}gt^2 = h - \frac{1}{2}g \times \frac{h}{2g} = h - \frac{h}{4} = \frac{3h}{4} = \frac{3}{4} \times 20 = 15 \text{ (m)} \end{aligned}$$

따라서 두 번째 공이 움직인 거리는 $20 - 15 = 5(m)$ 이다.

[그림]과 같이 두 개의 고리자석 A, B를 수직봉에 끼워 세우고 저울 위에 올려 무게를 재는 실험을 하였다. (a) 실험에서는 두 개의 자석을 다른 극끼리 서로 마주 보게 붙여 수직봉에 끼워 세우고 저울 위에 올려놓는다. (b) 실험에서는 두 개의 자석을 같은 극끼리 서로 마주 보게 하여 A 자석이 공중에 떠 있도록 수직봉에 끼워 세우고 저울 위에 올려놓는다. 실험 (a)와 (b)에서 사용한 자석과 수직봉은 같은 종류이고, 두 자석의 질량은 각각 50g, 수직 봉의 질량은 10g이다. 자석과 자석이 서로 밀어 내는 힘의 크기는 $F = \frac{k}{x^2}$ 으로 표현된다고 가정한다. 이때, k 는 $0.025 \text{ kg} \cdot \text{m}^3/\text{s}^2$ 상수이고 x 는 자석 사이 간격이다. 실험한 장소의 중력 가속도는 10 m/s^2 이다.



[그림]

[1]

[그림]의 (a) 실험에서 저울이 측정한 무게를 구하고 설명하시오.

[2]

[그림]의 (b) 실험에서 자석 사이의 간격을 구하고 설명하시오.

[3]

[그림]의 (b) 실험에서 B 자석에 작용하는 세 가지 힘의 종류와 크기를 모두 적고 힘의 방향을 화살표로 표시하시오.

[4]

[그림]의 (b) 실험에서 저울이 측정한 무게를 구하고 설명하시오.



[1]

저울이 측정하는 무게는 저울 바닥이 떠받치는 힘이고, 작용 반작용 법칙에 의하여 저울이 떠받치는 힘은 저울을 누르는 힘과 같다. 두 자석은 서로 다른 극을 마주하며 붙어있으므로, 질량이 100g인 하나의 물체로 간주할 수 있다.

$$\begin{aligned}\text{저울이 측정하는 무게} &= \text{두 자석이 누르는 힘} + \text{수직봉이 누르는 힘} \\ &= 0.1 \times 10 + 0.01 \times 10 = 1.1 \text{ N}\end{aligned}$$

[2]

두 자석 사이의 밀어내는 힘 때문에 간격 x 만큼의 거리를 두고 A 자석이 떠있다. 이때 A 자석이 누르는 힘과 밀어내는 힘이 서로 반대방향으로 작용하며 평형을 이루고 있다.

$$\begin{aligned}mg &= \frac{k}{x^2} \\ \therefore x &= \sqrt{\frac{k}{mg}} = \sqrt{\frac{0.025}{0.05 \times 10}} = \frac{\sqrt{5}}{10} m\end{aligned}$$

[3]

힘의 종류	힘의 크기	힘의 방향
지구가 B 자석을 당기는 힘 (B 자석의 무게)	$mg = 0.05 \times 10 = 0.5 \text{ N}$	↓
A 자석에 의해 밀어내는 힘 (자기력)	$\frac{k}{x^2} = 0.025 \times 20 = 0.5 \text{ N}$	↓
저울이 떠받치는 힘 (항력)	$0.5 + 0.5 = 1 \text{ N}$	↑

[4]

저울과 접촉하고 있는 물체는 자석 B와 수직봉 두 개다.

저울이 자석 B를 미는 힘 = 1 N

저울이 수직봉을 미는 힘 = 0.1 N

작용 반작용에 의해서 저울이 측정한 무게는 자석 B와 수직봉이 저울에 미치는 힘은 위 두 힘의 합력이다.

[3]에서 구한 저울이 떠받치는 힘 + 수직봉을 떠받치는 힘 = $1 + 0.1 = 1.1 \text{ N}$