

5.

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$f'(x^2 + x + 1) = \pi f(1) \sin \pi x + f(3)x + 5x^2$$

을 만족시킬 때, $f(7)$ 의 값을 구하시오.

[2020학년 9월 평가원 가형 30번]

6.

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 모든
실수 x 에 대하여

$$\frac{f'(x)}{2\{f(x)\}^3} = \frac{f'(2x-1)}{\{f(2x-1)\}^3} + \frac{1}{2\{f(2)\}^2} \pi \sin \pi x + \frac{1}{2\{f(3)\}^2} x$$

을 만족시킨다. $f(5) = \frac{\sqrt{3}}{9}$ 일 때,

$\left\{ \frac{f(3)}{f(9)} \right\}^2$ 의 값을 구하시오.

[2020학년 9월 평가원 가형 30번]-변형

7.

함수 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 와 양의 실수 t 에 대하여 기울기가 t 인 직선이 곡선 $y = f(x)$ 에 접할 때 접점의 x 좌표를 $g(t)$ 라 하자. 원점에서 곡선 $y = f(x)$ 에 그은 접선의 기울기가 a 일 때, 미분가능한 함수 $g(t)$ 에 대하여 $a \times g'(a)$ 의 값은?

- ① $-\frac{\sqrt{e}}{3}$ ② $-\frac{\sqrt{e}}{4}$ ③ $-\frac{\sqrt{e}}{5}$
④ $-\frac{\sqrt{e}}{6}$ ⑤ $-\frac{\sqrt{e}}{7}$

[2020학년 6월 평가원 가형 21번]

8.

함수 $f(x) = (x+1)e^x$ 와 양의 실수 t 에 대하여 기울기가 t 인 직선이 곡선 $y=f(x)$ 에 접할 때 접점의 x 좌표를 $g(t)$ 라 하자. 원점에서 곡선 $y=f(x)$ 에 그은 접선의 기울기가 a 일 때, 미분가능한 함수 $g(t)$ 에 대하여 모든 $g'(a)$ 의 값의 값은?

- ① $\frac{e}{3}$ ② $\frac{e}{4}$ ③ $\frac{e}{5}$ ④ $\frac{e}{6}$ ⑤ $\frac{e}{7}$

[2020학년 6월 평가원 가형 21번]-변형

9.

좌표평면에서 곡선 $C: y = \sqrt{8-x^2} \ (2 \leq x \leq 2\sqrt{2})$ 위의 점 P 에 대하여

$\overline{OQ}=2$, $\angle POQ = \frac{\pi}{4}$ 를 만족시키고 직선 OP 의 아래부분에 있는 점을 Q 라 하자.

점 P 가 곡선 C 위를 움직일 때, 선분 OP 위를 움직이는 점 X 와 선분 OQ 위를 움직이는 점 Y 에 대하여

$$\overrightarrow{OZ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY}$$

를 만족시키는 점 Z 가 나타내는 영역을 D 라 하자.

영역 D 에 속하는 점 중에서 y 축과의 거리가 최소인 점을 R 라 할 때, 영역 D 에 속하는 점 Z 에 대하여 $\overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{OZ}$ 의 최댓값과 최솟값의 합이 $a+b\sqrt{2}$ 이다. $a+b$ 의 값을 구하시오. (단, O 는 원점이고, a 와 b 는 유리수이다.)

[2020학년 6월 평가원 가형 29번]

10.

좌표평면에서 곡선 $C: y = \sqrt{4-x^2} (\sqrt{3} \leq x \leq 2)$ 위의 점 P 에 대하여

$\overline{OQ}=2$, $\angle POQ = \frac{\pi}{3}$ 를 만족시키고 직선 OP 의 윗 부분에 있는 점을 Q 라 하자.

점 P 가 곡선 C 위를 움직일 때, 선분 OP 위를 움직이는 점 X 와 선분 OQ 위를 움직이는 점 Y 에 대하여

$$\overrightarrow{OZ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY}$$

를 만족시키는 점 Z 가 나타내는 영역을 D 라 하자. 영역 D 에 속하는 점 중에서 y 축과의 거리가 최소인 점들 중 y 좌표가 최대인 점을 R 라 할 때, 영역 D 에 속하는 점 Z 에 대하여 $\overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{OZ}$ 의 최댓값과 최솟값의 합이 $a+b\sqrt{3}$ 이다. $a+b$ 의 값을 구하시오. (단, O 는 원점이고, a 와 b 는 유리수이다.)

[2020학년 6월 평가원 가형 29번]-변형1

11.

좌표평면 위를 움직이는 두 점

$$A(2+2\sqrt{3}\cos\theta, 3-2\cos\theta),$$

$$B(-2+2\sin\theta, -3+2\sqrt{3}\sin\theta)$$

에 대하여 선분

AB의 중점을 M이라 하자.
M이 나타내는 곡선을 C라 할 때, 곡선 C 위의 점 P에 대하여

$$\overline{OQ}=1, \angle POQ=\frac{\pi}{3}$$

를 만족시키고 직선 OP의 아

랫부분에 있는 점을 Q라 하자.
점 P가 곡선 C 위를 움직일 때, 선분 OP위를 움직이는 점 X와 선분 OQ위를 움직이는 점 Y에 대하여

$$\overrightarrow{OZ}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OX}+\overrightarrow{OY}$$

를 만족시키는 점 Z가 나타내는 영역을 D라 하자.

영역 D에 속하는 점 중에서 y축과의 거리가 최소인 점을 R라 할 때, 영역 D에 속하는 점 Z에 대하여 $\overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{OZ}$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오.

(단, O는 원점이고, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$)

[2020학년 6월 평가원 가형 29번]-변형2

12.

좌표공간에서 부피가 27인 정육면체

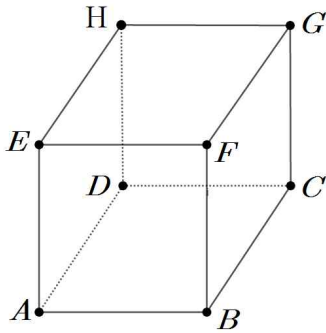
$ABCD-EFGH$ 의 세 모서리 AB , AD , CG 위를 움직이는 점을 각각 P , Q , R 라 할 때,

$$\overrightarrow{AT} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AP} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AQ} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AR}$$

를 만족시키는 점 T 가 나타내는 입체의 영역을 Y 라 하자.

영역 Y 에 속하는 점 중 정육면체의 꼭짓점 B 와의 거리가 최대인 점을 X 라 할 때, 영역 Y 에 속하는 점 T 에 대하여 $\overrightarrow{AX} \cdot \overrightarrow{AT}$ 의 최댓값과 최솟값의 합은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)



[2020학년 6월 평가원 가형 29번]-변형3

13.

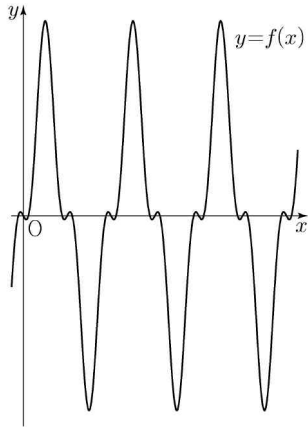
상수 a, b 에 대하여 함수 $f(x) = a\sin^3 x + b\sin x$ 가

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3\sqrt{2}, \quad f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 5\sqrt{3}$$

을 만족시킨다. 실수 t ($1 < t < 14$)에 대하여 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = t$ 가 만나는 점의 x 좌표 중 양수인 것을 작은 수부터 크기순으로 모두 나열할 때, n 번째 수를 x_n 이라 하고

$$c_n = \int_{3\sqrt{2}}^{5\sqrt{3}} \frac{t}{f'(x_n)} dt$$

라 하자. $\sum_{n=1}^{101} c_n = p + q\sqrt{2}$ 일 때, $q - p$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 유리수이다.)



[2020학년 6월 평가원 가형 30번]

14.

상수 a, b 에 대하여 실수 전체에서 연속인 함수 $f(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \ f(x) = f(x+2)$$

$$(나) \ f(x) = \begin{cases} e^{ax} & (0 \leq x < 1) \\ e^{bx+2} & (1 \leq x \leq 2) \end{cases}$$

실수 t ($1 < t < e$)에 대하여 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=t$ 가 만나는 점의 x 좌표 중 양수인 것을 작은 수부터 크기순으로 모두 나열할 때, n 번째 수를 x_n 이라 하고

$$c_n = \int_{\frac{1}{e}}^{e^{\frac{3}{4}}} \frac{t}{f'(x_n)} dt$$

라 하자. $\sum_{n=1}^{99} c_n = e^p(e^q - 1)$ 일 때, $\frac{q}{p}$ 의 값을 구하시오.

(단, p 와 q 는 유리수이다.)

[2020학년 6월 평가원 가형 30번]-변형1

15.

구간 $[0, 2)$ 에서 함수 $f(x)$ 가 모든 자연수 k 에 대하여 각 구간 $\left[2 - \frac{1}{2^{k-2}}, 2 - \frac{1}{2^{k-1}}\right)$ 에서 $f(x) = \sin(2^k \pi x)$ 로 정의된다.

실수 t ($0 < t < 1$)에 대하여 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = t$ 가 만나는 점의 x 좌표 중 양수인 것을 작은 수부터 크기순으로 모두 나열할 때, n 번째 수를 x_n 이라 하고

$$c_n = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{t}{f'(x_n)} dt$$

라 하자.

$\sum_{n=1}^{51} c_n = \frac{\sqrt{b}-1}{2^a \pi}$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하시오.

(단, a 와 b 는 자연수이다.)

[2020학년 6월 평가원 가형 30번]-변형2

16.

함수 $f(x)$ 는 다음 조건을 만족한다.

$$(가) \quad -1 \leq x \leq 1 \text{ 일 때 } f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

(나) 모든 실수 x 에 대하여

$$\int_{x-1}^{x+1} f(a) da = 2x \text{ 이다.}$$

실수 t 에 대하여 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=t$ 가 만나는 점의 x 좌표를 x_t 라 하고,
함수 $g(s)$ 를

$$g(s) = \int_0^s \frac{t}{f'(x_t)} dt - \frac{1}{2}x_s^2$$

라 할 때, 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$ 의
최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 하자.

방정식 $g(x)=0$ 의 근 중 양수인 것을 작은 수부터
크기순으로 모두 나열할 때, n 번째 수를 x_n 이라 하

자. $x_{25} \times \pi \left(M - m + \frac{1}{2} \right)$ 의 값을 구하시오.

[2020학년 6월 평가원 가형 30번]-변형3

21.

최고차항의 계수가 6π 인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x) = \frac{1}{2 + \sin(f(x))}$ 이 $x = \alpha$ 에서 극대 또는 극소이고, $\alpha \geq 0$ 인 모든 α 를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \dots$ 라 할 때, $g(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\alpha_1 = 0$ 이고 $g(\alpha_1) = \frac{2}{5}$ 이다.

(나) $\frac{1}{g(\alpha_5)} = \frac{1}{g(\alpha_2)} + \frac{1}{2}$

$g'\left(-\frac{1}{2}\right) = a\pi$ 라 할 때, a^2 의 값을 구하시오.

(단, $0 < f(0) < \frac{\pi}{2}$)

[2019학년도 11월 수능 가형 30번]

22. [2019학년도 11월 수능 가형 30번 변형]-1

최고차항의 계수가 3π 인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x) = \frac{1}{2 - \cos(f(x))}$ 이 $x = \alpha$ 에서 극대 또는 극소이고, $\alpha \geq 0$ 인 모든 α 를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \dots$ 라 할 때, $g(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\alpha_1 = 0$ 이고 $g(\alpha_1) = \frac{2}{3}$ 이다.

(나) $\frac{1}{g(\alpha_4)} = \frac{1}{g(\alpha_2)} + \frac{1}{2}$

$g'(-1) = a\pi$ 라 할 때, a^2 의 값을 구하시오.

(단, $0 < f(0) < \frac{\pi}{2}$)

23. [2019학년도 11월 수능 가형 30번 변형]-2

최고차항의 계수가 π 인 이차함수 $f(x)$ 에 대하여

함수 $g(x) = \frac{2}{3 - \sin(f(x))}$ 이 $x = \alpha$ 에서 극대 또는

극소일 때, $g(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(\alpha) = \frac{4}{5}$

(나) $g'(-1) + g'(3) = 0$

$\frac{g'(3)}{g'(0)} = \frac{q}{p}$ 라 할 때, $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, $0 < f(\alpha) < \frac{\pi}{2}$, p, q 는 서로소인 자연수)

24. [2019학년도 11월 수능 가형 30번 변형]-3

최고차항의 계수가 π 인 사차함수 $f(x)$ 에 대하여

함수 $g(x) = \frac{3}{4 - \sin(f(x))}$ 이 $x = \alpha$ 에서 극대이고

$\alpha \geq 0$ 인 모든 α 를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \dots$

$x = \beta$ 에서 극소이고 $\beta > 0$ 인 모든 β 를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \dots$ 라 할 때, $g(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\alpha_1 = 0, \beta_9 = 2$ 이고 $g(\alpha_1) = g(\beta_9) = \frac{6}{7}$

(나) $m \neq 1, n \neq 9$ 인 모든 자연수 m, n 에

대하여 $g(\alpha_m) - g(\beta_n) = \frac{2}{5}$ 이 성립한다.

$g'(-1) = a\pi$ 라 할 때, $a^2 = \frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, $0 < f(0) < \frac{\pi}{2}$, p, q 는 서로소인 자연수)

32.

열린 구간 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ 에서 정의된 함수

$$f(x) = \begin{cases} 2\sin^3 x & \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{4}\right) \\ \cos x & \left(\frac{\pi}{4} \leq x < \frac{3\pi}{2}\right) \end{cases}$$

가 있다. 실수 t 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 실수 k 의 개수를 $g(t)$ 라 하자.

(가) $-\frac{\pi}{2} < k < \frac{3\pi}{2}$

(나) 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$ 는 $x=k$ 에서 미분가능하지 않다.

함수 $g(t)$ 에 대하여 합성함수 $(h \circ g)(t)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $h(x)$ 가 있다.

$g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = a, g(0) = b, g(-1) = c$ 라 할 때,

$h(a+5) - h(b+3) + c$ 의 값은?

- ① 96 ② 97 ③ 98 ④ 99 ⑤ 100

[2019학년도 6월 평가원 가형 21번]

33. [2019학년도 6월 모평 가형 21번 변형]-1

열린 구간 $(-1, 5)$ 에서 정의된 함수

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & (-1 < x < 1) \\ \frac{2}{3}(x-2)^3 + \frac{8}{3} & (1 \leq x < 3) \\ -\frac{5}{3}(x-5) & (3 \leq x < 5) \end{cases}$$

가 있다. 실수 t 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 실수 k 의 개수를 $g(t)$ 라 하자.

(가) $-1 < k < 5$

(나) 함수 $|f(x) - t|$ 는 $x = k$ 에서 미분가능하지 않다.

함수 $g(t)$ 에 대하여 합성함수 $(h \circ g)(t)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $h(x)$ 가 있다.

$$g(1) = a, \quad g\left(\frac{8}{3}\right) = b, \quad g(3) = c \text{라 할 때,}$$

$h(a+3) - h(b+2) + 100c$ 의 값을 구하시오.

34. [2019학년도 6월 모평 가형 21번 변형]-2

열린 구간 $(-1, 4)$ 에서 정의된 함수

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & (-1 < x < 1) \\ \cos^3\left(\frac{\pi}{2}x\right) & (1 \leq x < 4) \end{cases}$$

가 있다. 실수 t 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 실수 k 의 개수를 $g(t)$ 라 하자.

(가) $-1 < k < 4$

(나) 함수 $\sqrt{|f(x) - t|}$ 는 $x = k$ 에서 미분가능하지 않다.

함수 $g(t)$ 에 대하여 합성함수 $(h \circ g)(t)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $h(x)$ 가 있다.

$g(1) = a, g(0) = b, g(-1) = c$ 라 할 때,

$h(a+3) - h(b+5) + 100c$ 의 값은?

- ① 104 ② 103 ③ 102 ④ 101 ⑤ 100

35. [2019학년도 6월 모평 가형 21번 변형]-3

$x \neq 0$ 인 실수에서 정의된 $f(x)$ 가 미분가능하고

$$xf(x) = (\sin^3 \theta + 2)x^3 - \int_1^x f(t) dt$$

을 만족한다. 함수 $f(x)$ 의 최솟값을 $g(\theta)$ 라 하자.

열린 구간 $(0, 2\pi)$ 에서 정의된 $g(\theta)$ 에 대하여 실수 t 에 대한 함수 $\sqrt{|g(\theta) - t|}$ 는 $\theta = k$ 에서 미분가능하지 않는다. 이때, 모든 실수 k 의 개수를 $h(t)$ 라 하자. 함수 $h(t)$ 에 대하여 합성함수 $(s \circ h)(t)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $s(x)$ 가 있다.

$$h\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = a, \quad h(\sqrt{3}) = b, \quad h\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right) = c \text{라 할 때,}$$

$s(a+3) - s(b+2) + c$ 의 값을 구하시오.

58.

실수 a 와 함수

$$f(x) = \ln(x^4 + 1) - c \quad (c > 0 \text{인 상수})$$

에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \int_a^x f(t) dt$$

라 하자. 함수 $y = g(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 서로 다른 점의 개수가 2가 되도록 하는 모든 a 의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열하면

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ (m 은 자연수)이다.

$a = \alpha_1$ 일 때, 함수 $g(x)$ 와 상수 k 는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$ 는 $x = 1$ 에서 극솟값을 갖는다.

$$(나) \int_{\alpha_1}^{\alpha_m} g(x) dx = k \alpha_m \int_0^1 |f(x)| dx$$

$mk \times e^c$ 의 값을 구하시오.

[2018학년도 6월 모평 가형 30번]

[추가 문제]

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 와 실수 a 에 대하여 함수 $g(x)$ 를 $g(x) = \int_a^x f(t) dt$ 라 하자.

함수 $f(x)$ 와 함수 $g(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) f(x) + f(-x) = 0$$

(나) 함수 $y = g(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 서로 다른 점의 개수가 3이 되도록 하는 a 는 3개다.

모든 실수 x 에 대하여 $g(x) \geq -\frac{1}{4}$ 일 때, $f(2)$ 의 최솟값을 구하시오.

59. [2018학년도 6월 모평 가형 30번 변형]

실수 a 와 함수 $f(x) = e^{-x^2+3} - c$ ($c > 0$ 인 상수)

에 대하여 함수 $g(x)$ 를 $g(x) = \int_a^x f(t) dt$

라 하자. 함수 $y = g(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 서로 다른 점의 개수가 2가 되도록 하는 모든 a 의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열하면

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ (m 은 자연수)이다.

$a = \alpha_1$ 일 때, 함수 $g(x)$ 와 상수 k 는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$ 는 $x = -1$ 에서 극솟값을 갖는다.

$$(나) \int_{\alpha_1}^{\alpha_m} g(x) dx = k \alpha_m \int_0^1 f(x) dx$$

$k^m \times \ln c$ 의 값을 구하시오.

64.

$x > a$ 에서 정의된 함수 $f(x)$ 와 최고차항의 계수가 -1 인 사차함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.
(단, a 는 상수이다.)

- (가) $x > a$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $(x-a)f(x) = g(x)$ 이다.
 (나) 서로 다른 두 실수 α, β 에 대하여 함수 $f(x)$ 는 $x = \alpha$ 와 $x = \beta$ 에서 동일한 극댓값 M 을 갖는다. (단, $M > 0$)
 (다) 함수 $f(x)$ 가 극대 또는 극소가 되는 x 의 개수는 함수 $g(x)$ 가 극대 또는 극소가 되는 x 의 개수보다 많다.

$\beta - \alpha = 6\sqrt{3}$ 일 때, M 의 최솟값을 구하시오.
[2017학년도 11월 수능 가형 30번]

[추가 문제]

실수 전체 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $x \neq a$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $(x-a)f(x) = \sin x$ 이다.
 (나) 함수 $f(x)$ 의 $x > 0$ 에서의 첫 번째 극값을 m 이라 할 때, 방정식 $f(x) - m = 0$ 의 실근의 개수는 12개다.

$\int_0^a |\sin x| dx = k$ 일 때, k^2 의 최솟값을 구하시오.

(단, 중근은 1개의 근이다.)

65. [2017학년도 11월 수능 가형 30번 변형]-1

$x > a$ 에서 정의된 함수 $f(x)$ 와 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.
(단, a 는 상수이다.)

- (가) $x > a$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $(x-a)f(x) = g(x)$ 이다.

(나) 서로 다른 두 실수 α, β 에 대하여 함수 $f(x)$ 는 $x = \alpha$ 와 $x = \beta$ 에서 동일한 극솟값 m 을 갖는다. (단, $m < 0$)

(다) 함수 $f(x)$ 가 극대 또는 극소가 되는 x 의 개수는 함수 $g(x)$ 가 극대 또는 극소가 되는 x 의 개수보다 많다.

$\alpha - \beta = 6$ 일 때, m 의 최댓값을 M 이라 할 때 $-\sqrt{3}M$ 의 값을 구하시오.

66. [2017학년도 11월 수능 가형 30번 변형]-2

실수 a 에 대하여 $f(a) > 0$ 이고, 최고차항의 계수가 -1 인 삼차함수 $f(x)$ 가 있다. 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \frac{f(x)}{x-a} \quad (\text{단, } x > a)$$

라 할 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{5}{3}$ 에서 극솟값을 갖는다.

(나) 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$ 에서의 접선과 점 $(5, f(5))$ 에서의 접선은 점 $(a, 0)$ 을 지난다.

(다) 방정식 $|g(x)| + g(t) = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 갖게 하는 실수 t 의 값은 2개다.

$f(1) < 0$ 일 때, $f(a) - f'(a)$ 의 값을 구하시오.

67. [2017학년도 11월 수능 가형 30번 변형]-3

최고차항의 계수가 양수이고 모든 계수가 유리수인 삼차함수 $f(x)$ 와 $x \neq 0$ 인 모든 실수에서 정의된 함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $x \neq 0$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) = xg(x) + 36$ 이다.
(나) $f'(0) = 0$ 이고 방정식 $f(x) = 0$ 은 두 실근을 갖고 두 실근의 차는 6이다.
(다) $x < 0$ 에서 $g(x)$ 의 극솟값이 최소일 때의 값은 $g(1 - \sqrt{3})$ 이다.

이 때, $x > 0$ 에서 $g(x) = k$ 가 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 k 값을 p, q 라 할 때 $\sqrt{3}pq$ 의 값을 구하시오.

83.

$0 < t < 41$ 인 실수 t 에 대하여 곡선

$y = x^3 + 2x^2 - 15x + 5$ 와 직선 $y = t$ 가 만나는

세 점 중에서 x 좌표가 가장 큰 점의 좌표를

$(f(t), t)$, x 좌표가 가장 작은 점의 좌표를

$(g(t), t)$ 라 하자. $h(t) = t \times \{f(t) - g(t)\}$ 라 할

때, $h'(5)$ 의 값은?

① $\frac{79}{12}$ ② $\frac{85}{12}$ ③ $\frac{91}{12}$

④ $\frac{97}{12}$ ⑤ $\frac{103}{12}$

[2016학년도 11월 수능 가형 21번]

[추가 문제]

$0 < t < \frac{5}{2}$ 인 실수 t 에 대하여 곡선 $y = \left| \frac{5x}{x^2 + 1} \right|$ 와 직선 $y = t$ 가 만

나는 점 중에서 x 좌표가 가장 큰 점의 좌표를 $(f(t), t)$, x 좌표가

가장 작은 점의 좌표를 $(g(t), t)$ 라 하자. $h(t) = \ln|f(t)g(t)|$ 라 할

때, $h'(2)$ 의 값은?

① $\frac{5}{6}$ ② $\frac{5}{3}$ ③ 0 ④ $-\frac{5}{6}$ ⑤ $-\frac{5}{3}$

84. [2016학년도 11월 수능 가형 21번 변형]

실수 t 에 대하여 곡선 $y = \frac{1}{\sqrt{3}} \tan 2x$ 와 직선 $y = t$ 가 만나는 네 점 중에서 x 좌표가 가장 큰 점의 좌표를 $(f(t), t)$, x 좌표가 가장 작은 점의 좌표를 $(g(t), t)$ 라 하자. $h(t) = \ln\left(\frac{f(t)}{g(t)}\right)$ 라 할 때, $h'(1)$ 의 값은? (단, $0 \leq x < 2\pi$)

- ① $-\frac{27\sqrt{3}}{40\pi}$ ② $\frac{51\sqrt{3}}{40\pi}$ ③ $-\frac{27\sqrt{3}}{40\pi}$
 ④ $\frac{27\sqrt{3}}{5\pi}$ ⑤ $-\frac{108\sqrt{3}}{5\pi}$

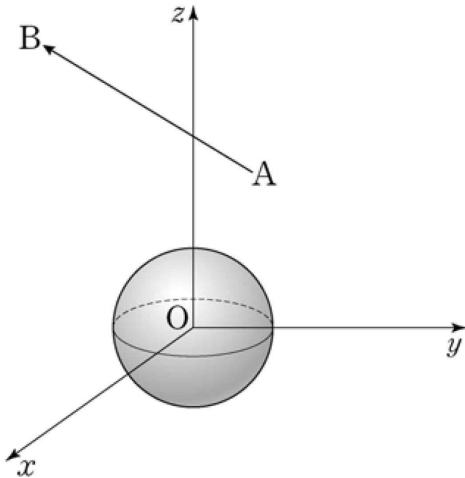
85.

좌표공간의 두 점 $A(2, \sqrt{2}, \sqrt{3})$,
 $B(1, -\sqrt{2}, 2\sqrt{3})$ 에 대하여 점 P 는 다음 조건을
 만족시킨다.

(가) $|\overrightarrow{AP}| = 1$

(나) $\overrightarrow{AP}$ 와 $\overrightarrow{AB}$ 가 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{6}$ 이
 다.

중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 구 위의
 점 Q 에 대하여 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ}$ 의 최댓값이
 $a+b\sqrt{33}$ 이다. $16(a^2+b^2)$ 의 값을 구하시오.
 (단, a, b 는 유리수이다.)



[2016학년도 11월 수능 가형 29번]

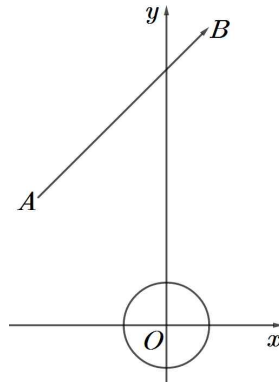
[추가 문제]

좌표평면의 두 점 $A(-3, 3)$, $B(1, 7)$ 에 대하여 점 P 는 다음 조건
 을 만족시킨다.

(가) $|\overrightarrow{AP}| = 1$

(나) $\overrightarrow{AP}$ 와 $\overrightarrow{AB}$ 가 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{4}$ 보다 작거나 같다.

중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원 위의 점 Q 에 대하여
 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ}$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 하자. $M-m$ 의 값을
 구하시오.



하루 중 90%는 겸손하게 10%는 자신있게...

다. $\rightarrow \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1 \leftarrow P_1(0, 2) \dots \textcircled{A}$

$2a=8$ 이면 $a=4$, $a^2-b^2=4$ 에서 $b^2=12$ 이다.

$\rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1 \leftarrow P_2(-2, 3)$

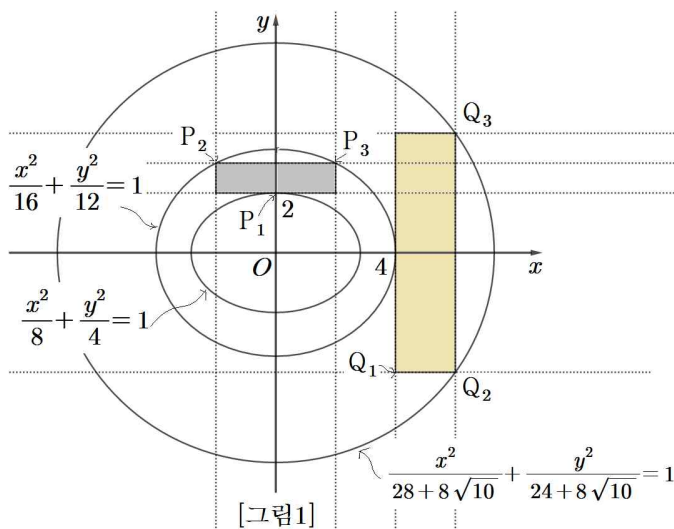
즉, 그림[1]과 같이 점 P는 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} \geq 1$,

$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} \leq 1$ 의 영역에 포함되는 직사각형 위를 움직인다.

①에서 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ 위의 점 $P_1(0, 2)$ 가 타원의 꼭짓점이므로 접선의 방정식은 $y=2$ 이다.

따라서 타원 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ 위의 점 $P_2(-2, 3)$ 를 지나며 직선 $y=2$ 와 평행한 직선인 $y=3$ 이 타원 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ 와 만나는 점 $P_3(2, 3)$ 이 직사각형 S의 넓이가 최대일 때의 꼭짓점이 된다. (P_1 은 직사각형 변 위에 있고 P_2, P_3 는 직사각형 꼭짓점이다.)

따라서 $\alpha = 4 \times 1 = 4$



$\overline{QA} + \overline{QB} = k$ 라 하면 k 값이 일정할 때, 점 Q는 타원 위의 점이다.

Q의 좌표가 $Q_1(4, 0)$ 일 때, $k = \sqrt{(6)^2} + \sqrt{2^2} = 8$

Q의 좌표가 $Q_2(6, -4)$ 일 때,

$k = \sqrt{8^2 + (-4)^2} + \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{5} + 4\sqrt{2}$

이므로 점 Q는 중심이 원점 O이고 두 초점의 좌표가 $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$ 인 타원 중

장축의 길이가 $8(k=8)$ 인 타원과 장축의 길이가 $4\sqrt{5} + 4\sqrt{2}(k=4\sqrt{5} + 4\sqrt{2})$ 인 타원 사이에 있는 직사각형 위의 점이 된다.

x 축에 두 초점이 있으므로 타원의 방정식

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 에서 장축의 길이는 $2a$ 이다.

$2a=8$ 이면 $a=4$, $a^2-b^2=4$ 에서 $b^2=12$ 이다.

$\rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1 \leftarrow Q_1(4, 0) \dots \textcircled{B}$

$2a=4\sqrt{5} + 4\sqrt{2}$ 이면 $a=2\sqrt{5} + 2\sqrt{2}$, $a^2-b^2=4$ 에서 $b^2=24+8\sqrt{10}$ 이다.

$\rightarrow \frac{x^2}{28+8\sqrt{10}} + \frac{y^2}{24+8\sqrt{10}} = 1 \leftarrow Q_2(6, -4)$

즉, 그림[1]과 같이 점 Q는 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} \geq 1$,

$\frac{x^2}{28+8\sqrt{10}} + \frac{y^2}{24+8\sqrt{10}} \leq 1$ 의 영역에 포함되는 직사각형 위를 움직인다.

②에서 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ 위의 점 $Q_1(4, 0)$ 가 타원의 꼭짓점이므로 접선의 방정식은 $x=4$ 이다.

따라서 타원 $\frac{x^2}{28+8\sqrt{10}} + \frac{y^2}{24+8\sqrt{10}} = 1$ 위의 점

$Q_2(6, -4)$ 를 지나며 직선 $x=4$ 와 평행한 직선인

$x=6$ 이 타원 $\frac{x^2}{28+8\sqrt{10}} + \frac{y^2}{24+8\sqrt{10}} = 1$ 와 만나

는 점 $Q_3(6, 4)$ 이 직사각형 T의 넓이가 최대일 때의 꼭짓점이 된다. (Q_1 은 직사각형 변 위에 있고 Q_2, Q_3 는 직사각형 꼭짓점이다.)

따라서 $\beta = 2 \times 8 = 16$

$\alpha + \beta = 20$

3) 정답 86

점 P의 좌표를 (a, b, c) 라 두면 $\overrightarrow{OA} = (4, 0, 0)$,
 $\overrightarrow{AP} = (a-4, b, c)$ 이다.

(나)에서 $4(a-4)=6$ 이므로 $a = \frac{11}{2}$ 이다.

따라서 $\overrightarrow{OP} = \left(\frac{11}{2}, b, c\right)$ 이고 점 P가

$x+y+\sqrt{2}z=0$ 위에 있으므로 $b+\sqrt{2}c = -\frac{11}{2}$ 이다.

$(1+2)(b^2+c^2) \geq (b+\sqrt{2}c)^2$ (코시부등식)에서

$$b^2+c^2 \geq \frac{121}{12}$$

한편,

$$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{\frac{121}{4} + b^2 + c^2} \geq$$

$$\sqrt{\frac{121}{4} + \frac{121}{12}} = \frac{11}{2} \sqrt{1 + \frac{1}{3}} = \frac{11}{\sqrt{3}}$$

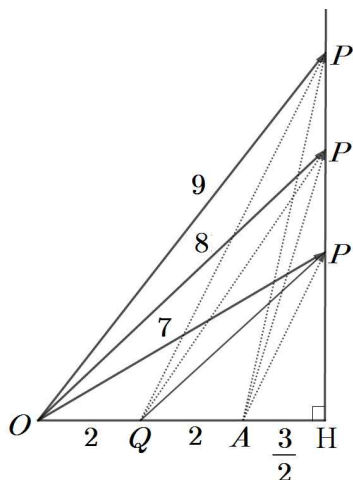
$6 < \frac{11}{\sqrt{3}} < 7$ 이므로 (가)에서 $|\overrightarrow{OP}|$ 의 값은 7, 8, 9이다.

$\overrightarrow{OA}$ 와 $\overrightarrow{AP}$ 가 이루는 각을 θ 라 할 때, (나)에서 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AP} = 4|\overrightarrow{AP}|\cos\theta = 6$ 이므로

$|\overrightarrow{AP}|\cos\theta = \frac{3}{2}$ 이다. P에서 직선 OA에 내린 수선의

발을 H라 하면 $\overline{AH} = |\overrightarrow{AP}|\cos\theta = \frac{3}{2}$

다음 그림과 같다.



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{AP} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}) \\ &= \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{OA} + |\overrightarrow{AP}|^2 \\ &= 6 + |\overrightarrow{AP}|^2 \text{에서}\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{AP}^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + PH^2 = \frac{9}{4} + \overrightarrow{OP}^2 - \left(\frac{11}{2}\right)^2 = \overrightarrow{OP}^2 - 28$$

$$\text{따라서 } \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP}^2 - 22$$

$$m = 7^2 - 22 = 27, \quad M = 9^2 - 22 = 59$$

$$M+m=86$$

[다른 풀이]

$\overrightarrow{OA}$ 의 중점을 Q라 하면

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PO} \\ &= (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QA}) \cdot (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QO}) \\ &= (\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{QO}) \cdot (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QO}) \\ &= \overrightarrow{PQ}^2 - \overrightarrow{QO}^2 = \overrightarrow{PQ}^2 - 4\end{aligned}$$

삼각형 PQH에서

$$\overrightarrow{PQ}^2 = \overrightarrow{QH}^2 + \overrightarrow{PH}^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2 + \overrightarrow{PO}^2 - \left(\frac{11}{2}\right)^2 = \overrightarrow{PO}^2 - 18$$

$$\text{따라서 } \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{PO}^2 - 22$$

$$m = 7^2 - 22 = 27, \quad M = 9^2 - 22 = 59$$

$$M+m=86$$

하루 중 90%는 점순하게 10%는 자신있게...

변곡점선의 기울기는 $f'\left(\frac{\alpha}{\sqrt{3}}\right) = \frac{8\sqrt{3}}{9}\alpha^3 + \frac{1}{2}$

한편, $x = \frac{\alpha}{\sqrt{3}}$ 에서의 변곡점선은

$$\begin{aligned} y &= \left(\frac{8\sqrt{3}}{9}\alpha^3 + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{\alpha}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{\alpha}{\sqrt{3}}\right) \\ &= \left(\frac{8\sqrt{3}}{9}\alpha^3 + \frac{1}{2}\right)x - \frac{8}{9}\alpha^4 - \frac{\sqrt{3}}{6}\alpha - \frac{4}{9}\alpha^2 + \frac{\sqrt{3}\alpha}{6} + 4 \\ &= \left(\frac{8\sqrt{3}}{9}\alpha^3 + \frac{1}{2}\right)x - \frac{4}{3}\alpha^4 + 4 \end{aligned}$$

(가)에서 두 변곡점선이 서로 만날 때 교점이 $y = \frac{1}{2}x + a_1$ 위에 있고 두 변곡점선이 사차함수와 변곡점이 아닌 두 교점을 가지고 그 두 교점이 $y = \frac{1}{2}x + a_2$ 위에 있을 때, $g(t)$ 의 불연속인 점이 각각 2개이므로 $h(a_1) = h(a_2) = 2$ 로 최솟값을 갖는다.

$a_1 = -8$ 이므로 $y = \frac{1}{2}x - 8$ 의 y 절편과 만나야 한다.

$$-\frac{4}{3}\alpha^4 + 4 = -8 \Rightarrow \alpha^4 = 9 \text{ 따라서 } \alpha = \sqrt{3}$$

따라서 변곡점선은 $y = \frac{17}{2}x - 8$ 이고

$$f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 4\right) = -(x + \alpha)^2(x - \alpha)^2 \text{에서}$$

$$f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 4\right) = -(x^2 - 3)^2$$

$$\text{따라서 } f(x) = -(x^2 - 3)^2 + \frac{1}{2}x + 4$$

$$\frac{17}{2}x - 8 = -(x^2 - 3)^2 + \frac{1}{2}x + 4 \text{에서}$$

$$(x^2 - 3)^2 + 8x - 12 = 0 \Rightarrow x^4 - 6x^2 + 8x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (x + 3)(x - 1)^3 = 0$$

따라서 변곡점선과 사차함수의 교점중 하나가 $\left(-3, -\frac{67}{2}\right)$ 이다.

이 점이 $y = \frac{1}{2}x + a_2$ 위의 있으므로

$$-\frac{67}{2} = -\frac{3}{2} + a_2 \Rightarrow a_2 = -32$$

$$f(2) = 4 \text{이므로 } f(2) - a_2 = 4 - (-32) = 36$$

108) 정답 ▶ 26

$$f(x) = ax^2 + bx \text{라 두면 } f'(x) = 2ax + b, f''(x) = 2a$$

이고 $g(x) = f(x)\ln x$ 에서

$$g'(x) = f'(x)\ln x + \frac{f(x)}{x} = (2ax + b)\ln x + (ax + b)$$

$$g''(x) = 2a\ln x + \frac{2ax + b}{x} + a \text{에서}$$

$$g''\left(e^{-\frac{3}{2}}\right) = -3a + 2a + \frac{b}{e^{-\frac{3}{2}}} + a = 0 \text{이므로 } b = 0$$

따라서 $g(x) = ax^2 \ln x$ 이다.

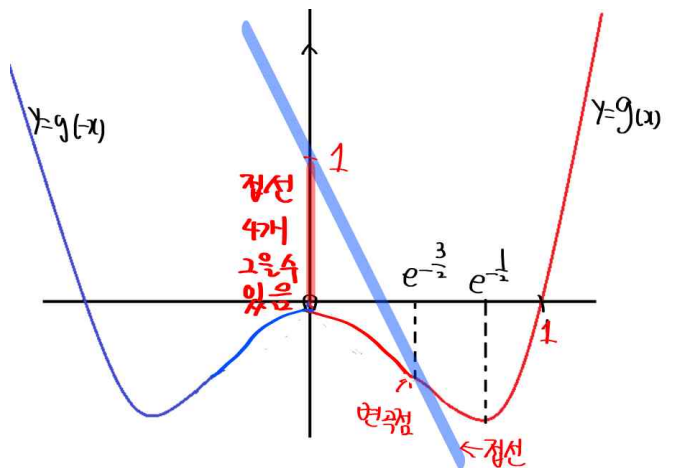
$$g'(x) = 2ax \ln x + ax = ax(2\ln x + 1) = 0$$

$x > 0$ 이므로 $g'(x) = 0$ 을 만족하는 $x = e^{-\frac{1}{2}}$

(i) $a > 0$ 일 때 증감표는 다음과 같다.

x	0	...	$e^{-\frac{3}{2}}$	...	$e^{-\frac{1}{2}}$	...
$g'(x)$		-	-	-	0	+
$g''(x)$		-	0	+	+	+
$g(x)$		↘	변곡점	↘	극소	

따라서 $y = g(|x|)$ 의 그래프 개형은 다음 그림과 같다.



변곡점 $\left(e^{-\frac{3}{2}}, -\frac{3a}{2e^3}\right)$ 에서의 점선의 기울기는

$$g'\left(e^{-\frac{3}{2}}\right) = -2ae^{-\frac{3}{2}} \text{이므로 점선의 방정식은 다음과}$$

$$\text{같다. } y = -2ae^{-\frac{3}{2}}x + \frac{a}{2e^3}$$

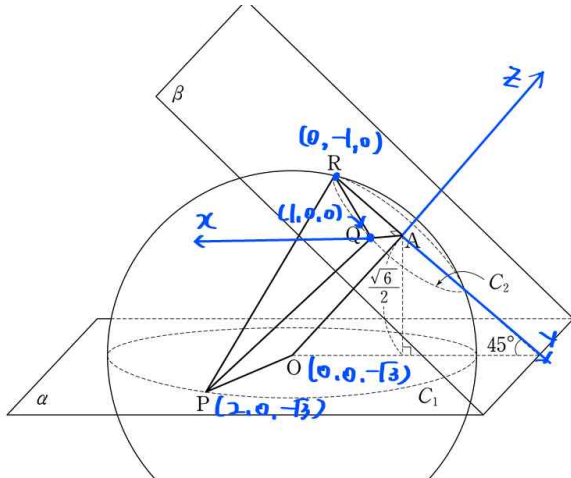
위와 같은 개형의 곡선에서는 위로 볼록인 부분과 변곡점선 사이 영역에서 4개의 점선을 그을 수 있다. 따라서 점 $(0, k)$ 에서 곡선 $y = g(|x|)$ 에 그은 점선의 개수가 4인 k 의 값의 범위는 $0 < k < 1$ 이므로 변곡점선의 y 절편이 1이다. 따라서 $a = 2e^3$

(ii) $a < 0$ 일 때 성립하지 않는다.

$$(i), (ii) \text{에서 } \therefore g(x) = 2e^3 x^2 \ln x$$

$$g(e) \times g(e^3) = 2e^5 \times 6e^9 = 12e^{14}$$

$$p = 12, q = 14 \text{이므로 } p + q = 26$$



평면 $AQPO$ 는 xz 평면의 일부이므로 법선벡터가 $\vec{a} = (0, 1, 0) \dots \textcircled{\ominus}$ 이다.

평면 PQR 는 세 점 $P(2, 0, -\sqrt{3})$, $Q(1, 0, 0)$, $R(0, -1, 0)$ 을 지나므로 평면 PQR 의 법선벡터는 다음과 같이 구할 수 있다.

[방법1]

평면 PQR 의 방정식을 $ax + by + cz + d = 0$ 이라 할 때 P, Q, R 의 좌표를 대입하면

$$2a - \sqrt{3}c + d = 0, \quad a + d = 0, \quad -b + d = 0$$

에서 $a = -d, b = d, c = -\frac{d}{\sqrt{3}}$ 이므로

$$\text{평면 } PQR \text{의 법선벡터는 } \vec{b} = \left(-1, 1, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = (\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 1) \dots \textcircled{\ominus}$$

[방법2]

$\overline{PQ}$ 의 연장선이 z 축과 만나는 좌표 S 를 구하자.

$$\overline{AQ} : \overline{OP} = \overline{SA} : \overline{SO} = 1 : 2 \text{이므로 } S(0, 0, \sqrt{3})$$

따라서 평면 PQR 의 각 절편이 $1, -1, \sqrt{3}$ 이므로

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{\sqrt{3}} = 1 \text{에서 평면 } PQR \text{의 법선벡터는}$$

$$\vec{b} = (\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 1) \dots \textcircled{\ominus}$$

[방법3]

$$\overrightarrow{PR} = (-2, -1, \sqrt{3}), \quad \overrightarrow{PQ} = (-1, 0, \sqrt{3}) \text{에서}$$

$$\overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{PQ} = (-\sqrt{3}, \sqrt{3}, 1) \text{ (by 벡터의 외적) 이므로}$$

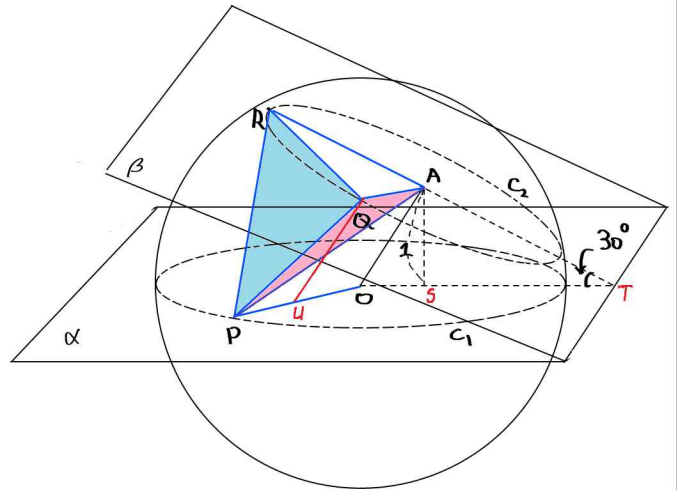
평면 PQR 의 법선벡터는

$$\vec{b} = (\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 1) \dots \textcircled{\ominus}$$

$$\text{따라서 } \textcircled{\ominus}, \textcircled{\omin�} \text{에서 } \cos \theta = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{|-\sqrt{3}|}{1 \times \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$

$$\therefore \cos^2 \theta = \frac{3}{7} \therefore p + q = 10$$

110) 정답 10



$\triangle PQR$ 을 평면 $AQPO$ 에 정사영한 도형은 $\triangle PQA$

$$\text{따라서 } \cos \theta = \frac{\triangle PQA \text{의 넓이}}{\triangle PQR \text{의 넓이}}$$

따라서 두 삼각형의 넓이를 구하자.

구의 중심 O 에서 평면 β 에 내린 수선의 발이 원의 중심 A 이다.

따라서 $\overline{OA} \perp \beta$ 에서 $\angle OAT = 90^\circ$ 이므로 $\angle AOS = 60^\circ$ 이다.

$\triangle AOS$ 는 $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ 인 직각삼각형이고

$$\overline{AS} = 1 \text{에서 } \overline{OA} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\text{직각삼각형 } OAQ \text{에서 } \overline{OA} = \frac{2}{\sqrt{3}}, \overline{OQ} = \frac{4}{3} \text{이므로}$$

$$\overline{QA} = \frac{2}{3}$$

조건 (나)에서 $\overline{AQ} \parallel \overline{OP}$ 이므로 점 Q 에서 $\overline{OP}$ 에 내린 수선의 발을 U 라 하면

$$\overline{QU} = \overline{OA} = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{이므로 } \triangle PQA \text{는 밑변이 } \overline{QA},$$

높이가 $\overline{QU}$ 인 삼각형이므로

$$\triangle PQA = \frac{1}{2} \times \overline{AQ} \times \overline{QU} = \frac{2\sqrt{3}}{9} \dots \textcircled{\omin�}$$