1.

함수 $y=e^x$의 그래프 위의 x좌표가 양수인 점 A와 함수 $y=-\ln x$의 그래프 위의 점 B가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{\mathrm{OA}}=2\overline{\mathrm{OB}}$ (나) $\angle \mathrm{AOB}=90°$

직선 OA의 기울기는? (단, O는 원점이다.)

① e ② $\dfrac{3}{\ln 3}$ ③ $\dfrac{2}{\ln 2}$ ④ $\dfrac{5}{\ln 5}$ ⑤ $\dfrac{e^2}{2}$

[2020학년 9월 평가원 가형 15번]

2.

함수 $y=x^2+1$의 그래프 위의 x좌표가 양수인 점 A와 함수 $y=-\sqrt{x-1}$의 그래프 위의 점 B가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{\mathrm{OA}}=4\overline{\mathrm{OB}}$ (나) $\angle \mathrm{AOB}=90°$

직선 OA의 기울기는? (단, O는 원점이다.)

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\dfrac{3}{2}$ ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\dfrac{5}{2}$

[2020학년 9월 평가원 가형 15번]-변형

3.

빨간 공 6개, 파란색 공 3개, 노란색 공 3개가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내는 시행을 하여, 다음 규칙에 따라 세 사람 A, B, C가 점수를 얻는다. (단, 한 번 꺼낸 공은 다시 주머니에 넣지 않는다.)

> • 빨간색 공이 나오면 A는 3점, B는 1점, C는 1점을 얻는다.
> • 파란색 공이 나오면 A는 2점, B는 6점, C는 2점을 얻는다.
> • 노란색 공이 나오면 A는 2점, B는 2점, C는 6점을 얻는다.

이 시행을 계속하여 얻은 점수의 합이 처음으로 24점 이상인 사람이 나오면 시행을 멈춘다. 다음은 얻은 점수의 합이 24점 이상인 사람이 A뿐일 확률을 구하는 과정이다.

> 꺼낸 빨간색 공의 개수를 x, 파란색 공의 개수를 y, 노란색 공의 개수를 z라 할 때, 얻은 점수의 합이 24점 이상인 사람이 A뿐이기 위해서는 x, y, z가 다음 조건을 만족시켜야 한다.
>
> $$x=6,\ 0<y<3,\ 0<z<3,\ y+z\geq 3$$
>
> 이 조건을 만족시키는 순서쌍 (x, y, z)는
>
> $$(6, 1, 2),\ (6, 2, 1),\ (6, 2, 2)\text{이다.}$$
>
> (i) $(x, y, z)=(6, 1, 2)$인 경우의 확률은 $\boxed{(가)}$ 이다.
>
> (ii) $(x, y, z)=(6, 2, 1)$인 경우의 확률은 $\boxed{(가)}$ 이다.
>
> (iii) $(x, y, z)=(6, 2, 2)$인 경우는 10번째 시행에서 빨간색 공이 나와야 하므로 그 확률은 $\boxed{(나)}$ 이다.
>
> (i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 확률은
>
> $2\times\boxed{(가)}+\boxed{(나)}$ 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 수를 각각 p, q라 할 때, $p+q$의 값은?

① $\dfrac{13}{110}$ ② $\dfrac{27}{220}$ ③ $\dfrac{7}{55}$ ④ $\dfrac{29}{220}$ ⑤ $\dfrac{3}{22}$

[2020학년 9월 평가원 가형 18번]

4.

빨간색 공 5개. 파란색 공 4개, 노란색 공 3개가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내는 시행을 하여, 다음 규칙에 따라 세 사람 A, B, C가 점수를 얻는다. (단, 한 번 꺼낸 공은 다시 주머니에 넣지 않는다.)

- 빨간색 공이 나오면 A는 3점, B는 2점, C는 1점을 얻는다.
- 파란색 공이 나오면 A는 1점, B는 3점, C는 2점을 얻는다.
- 노란색 공이 나오면 A는 2점, B는 1점, C는 4점을 얻는다.

이 시행을 계속하여 얻은 점수의 합이 처음으로 20점 이상인 사람이 나오면 시행을 멈춘다. 다음은 얻은 점수의 합이 20점 이상인 사람이 A뿐일 확률을 구하는 과정이다.

꺼낸 빨간색 공의 개수를 x, 파란색 공의 개수를 y, 노란색 공의 개수를 z라 할 때, 얻은 점수의 합이 20점 이상인 사람이 A뿐이기 위해서는 x, y, z가 다음 조건을 만족시켜야 한다.

$$x=5,\ 0\le y<4,\ 2\le z\le 3$$

이 조건을 만족시키는 순서쌍 (x, y, z)는

$$(5, 0, 3),\ (5, 1, 2),\ (5, 2, 2)$$

이다.

(i) $(x, y, z)=(5, 0, 3)$인 경우의 확률은 $\boxed{(가)}$ 이다.

(ii) $(x, y, z)=(5, 1, 2)$인 경우의 확률은 $\boxed{(나)}$이다.

(iii) $(x, y, z)=(5, 2, 2)$인 경우의 확률은 $\boxed{(다)}$이다.

(i), (ii)에 의하여 구하는 확률은 $\boxed{(가)}+\boxed{(나)}+\boxed{(다)}$이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r라 할 때, $495p+165q+110r$의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

[2020학년 9월 평가원 가형 18번]-변형

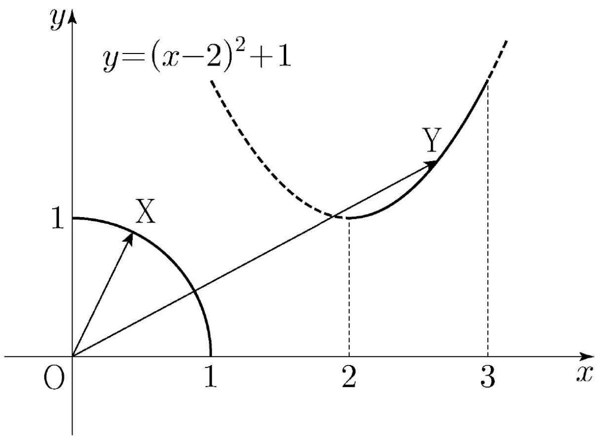
5.

좌표평면 위에 두 점 $A(1, 0)$, $B(0, 1)$이 있다. 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB의 호 AB위를 움직이는 점 X와 함수 $y=(x-2)^2+1 \ (2 \le x \le 3)$의 그래프 위를 움직이는 점 Y에 대하여

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OY}-\overrightarrow{OX}$$

를 만족시키는 점 P가 나타내는 영역을 R라 하자. 점 O로부터 영역 R에 있는 점까지의 거리의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, M^2+m^2의 값은? (단, O는 원점이다.)

① $16-2\sqrt{5}$ ② $16-\sqrt{5}$ ③ 16
④ $16+\sqrt{5}$ ⑤ $16+2\sqrt{5}$



[2020학년 9월 평가원 가형 19번]

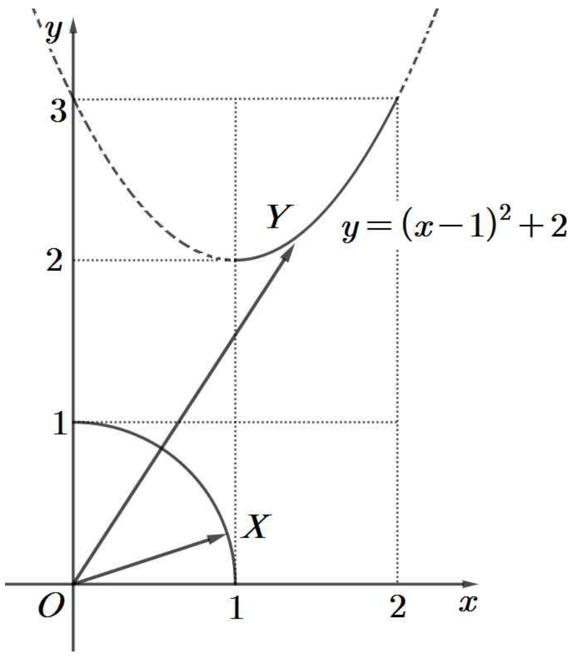
6.

좌표평면 위에 두 점 $A(1, 0)$, $B(0, 1)$이 있다. 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB의 호 AB위를 움직이는 점 X와 함수 $y=(x-1)^2+2 \ (1 \le x \le 2)$의 그래프 위를 움직이는 점 Y에 대하여

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OY}-\overrightarrow{OX}$$

를 만족시키는 점 P가 나타내는 영역을 R라 하자. 영역 R에 포함되는 점 (x, y)에 대하여 $x+2y$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값은? (단, O는 원점이다.)

① $8-\sqrt{5}$ ② $10-\sqrt{5}$ ③ $12-\sqrt{5}$
④ $12+\sqrt{5}$ ⑤ $12+2\sqrt{5}$

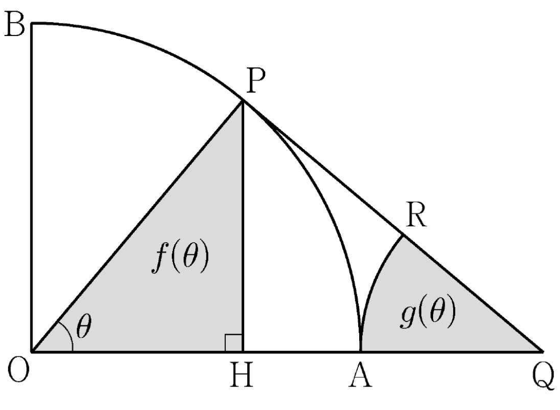


[2020학년 9월 평가원 가형 19번]-변형

7.

그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB위의 점 P에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H, 점 P에서 호 AB에 접하는 직선과 직선 OA의 교점을 Q라 하자. 점 Q를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{QA}}$인 원과 선분 PQ의 교점을 R라 하자. $\angle \mathrm{POA}=\theta$일 때, 삼각형 OHP의 넓이를 $f(\theta)$, 부채꼴 QRA의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{\sqrt{g(\theta)}}{\theta \times f(\theta)}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$)

① $\frac{\sqrt{\pi}}{5}$ ② $\frac{\sqrt{\pi}}{4}$ ③ $\frac{\sqrt{\pi}}{3}$
④ $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ⑤ $\sqrt{\pi}$

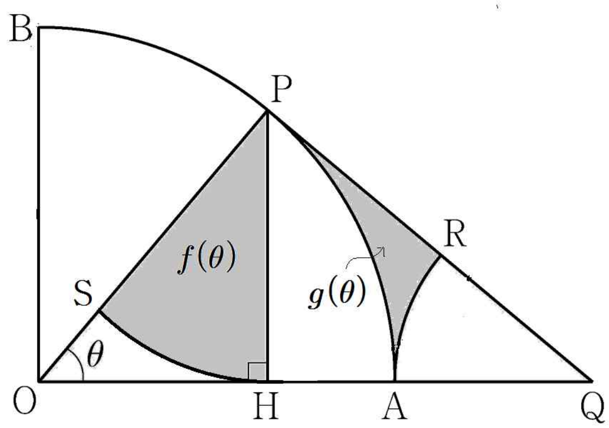


[2020학년 9월 평가원 가형 20번]

8.

그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB위의 점 P에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H, 점 P에서 호 AB에 접하는 직선과 직선 OA의 교점을 Q라 하자. 점 P를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{PH}}$인 원과 선분 PO의 교점을 S라 하고 점 Q를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{QA}}$인 원과 선분 PQ의 교점을 R라 하자. $\angle \mathrm{POA}=\theta$일 때, 부채꼴 PSH의 넓이를 $f(\theta)$, 선분 PR과 호 PA, 호 RA로 둘러싸인 도형의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{\sqrt{\tan\theta-\theta-2g(\theta)}}{f(\theta)}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$)

① $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}}$
④ $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$ ⑤ $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{\pi}}$

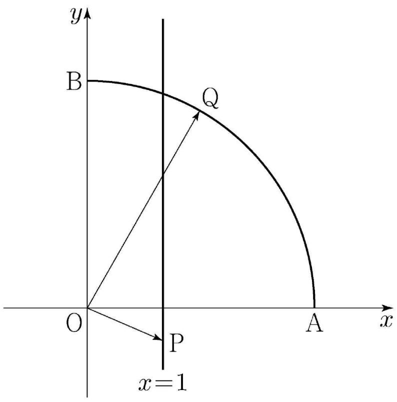


[2020학년 9월 평가원 가형 20번]-변형

13.

좌표평면 위에 두 점 $A(3, 0)$, $B(0, 3)$과 직선 $x=1$ 위의 점 $P(1, a)$가 있다. 점 Q가 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB의 호 AB위를 움직일 때 $|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}|$의 최댓값을 $f(a)$라 하자. $f(a)=5$가 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 곱은?

① $-5\sqrt{3}$ ② $-4\sqrt{3}$ ③ $-3\sqrt{3}$
④ $-2\sqrt{3}$ ⑤ $-\sqrt{3}$

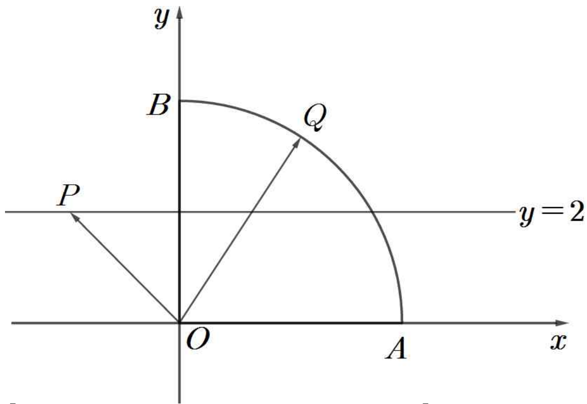


[2020학년 6월 평가원 가형 18번]

14.

좌표평면 위에 두 점 $A(4, 0)$, $B(0, 4)$과 직선 $y=2$ 위의 점 $P(a, 2)$가 있다. 점 Q가 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB의 호 AB위를 움직일 때 $|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}|$의 최댓값을 $f(a)$라 하자. $f(a)=10$가 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 곱은?

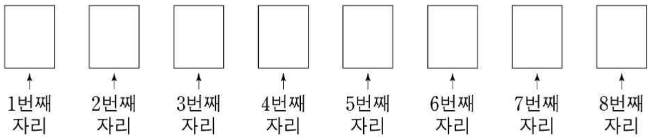
① $-32\sqrt{2}$ ② $-28\sqrt{2}$ ③ $-24\sqrt{2}$
④ $-20\sqrt{2}$ ⑤ $-16\sqrt{2}$



[2020학년 6월 평가원 가형 18번]-변형

15.

1부터 8까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 8장의 카드가 있다. 이 카드를 모두 한 번씩 사용하여 그림과 같은 8개의 자리에 각각 한 장씩 임의로 놓을 때, 8이하의 자연수 k에 대하여 k번째 자리에 놓은 카드에 적힌 수가 k이하인 사건을 A_k라 하자.



다음은 두 자연수 m, $n(1 \leq m < n \leq 8)$에 대하여 두 사건 A_m과 A_n이 서로 독립이 되도록 하는 m, n의 모든 순서쌍 (m, n)의 개수를 구하는 과정이다.

> A_k는 k번째 자리에 k이하의 자연수 중 하나가 적힌 카드가 놓여 있고, k번째 자리를 제외한 7개의 자리에 나머지 7장의 카드가 놓여 있는 사건이므로
>
> $P(A_k) = \boxed{(가)}$ 이다.
>
> $A_m \cap A_n(m < n)$은 m번째 자리에 m이하의 자연수 중 하나가 적힌 카드가 놓여 있고, n번째 자리에 n이하의 자연수 중 m번째 자리에 놓인 카드에 적힌 수가 아닌 자연수가 적힌 카드가 놓여 있고, m번째와 n번째 자리를 제외한 6개의 자리에 나머지 6장의 카드가 놓여 있는 사건이므로
>
> $P(A_m \cap A_n) = \boxed{(나)}$
>
> 이다.
>
> 한편, 두 사건 A_m과 A_n이 서로 독립이기 위해서는
>
> $P(A_m \cap A_n) = P(A_m)P(A_n)$
>
> 을 만족시켜야 한다.
>
> 따라서 두 사건 A_m과 A_n이 서로 독립이 되도록 하는 m, n의 모든 순서쌍 (m, n)의 개수는 $\boxed{(다)}$ 이다.

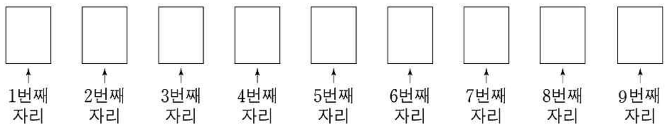
위의 (가)에 알맞은 식에 $k=4$를 대입한 값을 p, (나)에 알맞은 식에 $m=3$, $n=5$를 대입한 값을 q, (다)에 알맞은 수를 r라 할 때, $p \times q \times r$의 값은?15)

① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{5}{8}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{7}{8}$

[2020학년 6월 평가원 가형 19번]

16.

1부터 9까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 9장의 카드가 있다. 이 카드를 모두 한 번씩 사용하여 그림과 같은 9개의 자리에 각각 한 장씩 임의로 놓을 때, 9이하의 자연수 k에 대하여 k번째 자리에 놓은 카드에 적힌 수가 k이상인 사건을 A_k라 하자.



다음은 두 자연수 m, $n(1 \leq n < m \leq 9)$에 대하여 두 사건 A_m과 A_n이 서로 독립이 되도록 하는 m, n의 모든 순서쌍 (m, n)의 개수를 구하는 과정이다.

> A_k는 k번째 자리에 k이상의 자연수 중 하나가 적힌 카드가 놓여 있고, k번째 자리를 제외한 8개의 자리에 나머지 8장의 카드가 놓여 있는 사건이므로
>
> $P(A_k) = \boxed{(가)}$
>
> 이다.
>
> $A_m \cap A_n (m > n)$은 m번째 자리에 m이상의 자연수 중 하나가 적힌 카드가 놓여 있고, n번째 자리에 n이상의 자연수 중 m번째 자리에 놓인 카드에 적힌 수가 아닌 자연수가 적힌 카드가 놓여 있고, m번째와 n번째 자리를 제외한 7개의 자리에 나머지 7장의 카드가 놓여 있는 사건이므로
>
> $P(A_m \cap A_n) = \boxed{(나)}$
>
> 이다.
>
> 한편, 두 사건 A_m과 A_n이 서로 독립이기 위해서는
>
> $P(A_m \cap A_n) = P(A_m)P(A_n)$
>
> 을 만족시켜야 한다.
>
> 따라서 두 사건 A_m과 A_n이 서로 독립이 되도록 하는 m, n의 모든 순서쌍 (m, n)의 개수는 $\boxed{(다)}$ 이다.

위의 (가)에 알맞은 식에 $k=7$를 대입한 값을 p, (나)에 알맞은 식에 $m=5$, $n=3$를 대입한 값을 q, (다)에 알맞은 수를 r라 할 때, $p \times q \times r$의 값은?

① $\frac{7}{9}$ ② 1 ③ $\frac{10}{9}$ ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{11}{8}$

17.

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)>0$

(나) $\ln f(x)+2\int_0^x (x-t)f(t)dt=0$

보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

| 보 기 |

ㄱ. $x>0$에서 함수 $f(x)$는 감소한다.

ㄴ. 함수 $f(x)$의 최댓값은 1이다.

ㄷ. 함수 $F(x)$를 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$라 할 때, $f(1)+\{F(1)\}^2=1$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[2020학년 6월 평가원 가형 20번]

18.

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

$$e^{f(x)}+\int_0^x (x-t)e^{f(t)}dt=1$$

보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

| 보 기 |

ㄱ. $x>0$에서 함수 $f(x)$는 감소한다.

ㄴ. 함수 $f(x)$의 최댓값은 1이다.

ㄷ. 함수 $F(x)$를 $F(x)=\int_0^x e^{f(t)}dt$라 할 때, $F(1)+F''(1)=0$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[2020학년 6월 평가원 가형 20번]-변형

22.

그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB위에 점 P가 있다.

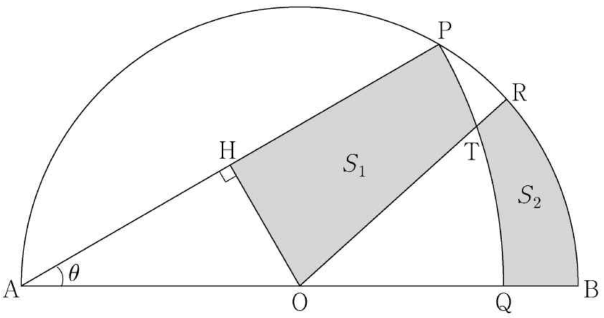
중심이 A이고 반지름의 길이가 $\overline{AP}$인 원과 선분 AB의 교점을 Q라 하자.

호 PB위에 점 R를 호 PR와 호 RB의 길이의 비가 $3:7$이 되도록 잡는다. 선분 AB의 중점을 O라 할 때, 선분 OR와 호 PQ의 교점을 T, 점 O에서 선분 AP에 내린 수선의 발을 H라 하자.

세 선분 PH, HO, OT와 호 TP로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 두 선분 RT, QB와 두 호 TQ, BR로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하자. $\angle PAB=\theta$라 할 때,

$\lim\limits_{\theta \to 0+} \dfrac{S_1 - S_2}{\overline{OH}} = a$이다. $50a$의 값을 구하시오.

(단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$)



[2020학년 6월 평가원 가형 28번]

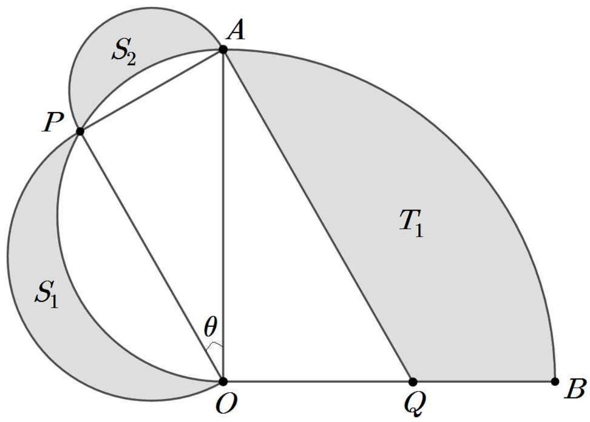
23.

다음 그림과 같이 사분원 AOB와 $\overline{AO}$를 지름으로 하는 반원이 있다.

$\overline{AO}$를 지름으로 하는 반원의 호 위에 $\angle AOP=\theta$인 점 P가 있고 $\overline{PA}$와 $\overline{OP}$를 각각 지름으로 하는 두 반원이 있는 도형이다. 두 반원에서 $\overline{AO}$를 지름으로 하는 반원과 겹치는 부분을 제외한 부분의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하자.

점 A를 지나고 직선 PO와 평행한 직선이 선분 OB와 만나는 점을 Q라 할 때 도형 AQB의 넓이를 T_1이라 하자. $\lim\limits_{\theta \to 0+} \dfrac{S_1 + S_2 - T_1}{\theta}$의 값은?

(단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$)



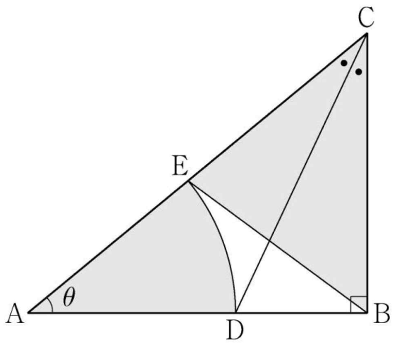
① $1-\dfrac{\pi}{4}$ ② $1-\dfrac{\pi}{2}$ ③ $2-\dfrac{2}{3}\pi$

④ $\dfrac{\pi}{4}$ ⑤ $2-\dfrac{\pi}{2}$

[2020학년 6월 평가원 가형 28번]-변형

24.

그림과 같이 $\overline{AB}=1$, $\angle B=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC에서 $\angle C$를 이등분하는 직선과 선분 AB의 교점을 D, 중심이 A이고 반지름의 길이가 $\overline{AD}$인 원과 선분 AC의 교점을 E라 하자. $\angle A=\theta$일 때, 부채꼴 ADE의 넓이를 $S(\theta)$, 삼각형 BCE의 넓이를 $T(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{\{S(\theta)\}^2}{T(\theta)}$의 값은?



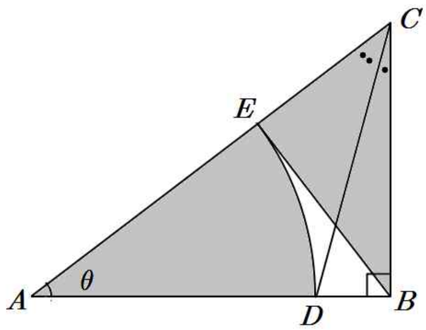
① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$

④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

[2019학년도 11월 수능 18번]

25.

그림과 같이 $\overline{AB}=1$, $\angle B=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC에서 $\angle C$를 $2:1$로 내분하는 직선과 선분 AB의 교점을 D, 중심이 A이고 반지름의 길이가 $\overline{AD}$인 원과 선분 AC의 교점을 E라 하자. $\angle A=\theta$일 때, 부채꼴 ADE의 넓이를 $S(\theta)$, 삼각형 BCE의 넓이를 $T(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{\{S(\theta)\}^2}{T(\theta)}$의 값은?



① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$

④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{5}}{2}$

[2019학년도 11월 수능 18번]-변형

46.

0이 아닌 실수 p에 대하여 좌표평면 위의 두 포물선 $x^2=2y$와 $\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=4px$에 동시에 접하는 직선의 개수를 $f(p)$라 하자. $\lim_{p\to k+}f(p)>f(k)$를 만족시키는 실수 k의 값은?

① $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ② $-\frac{2\sqrt{3}}{9}$ ③ $-\frac{\sqrt{3}}{9}$
④ $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

[2019학년도 6월 평가원 19번]

47.

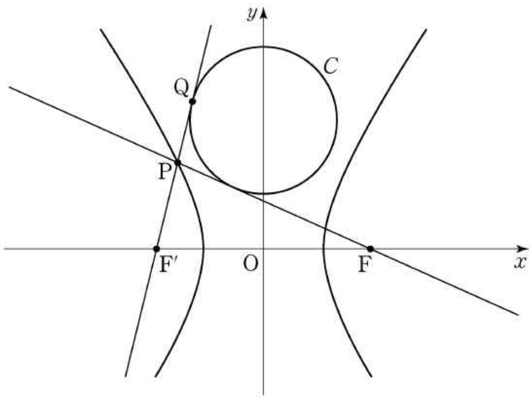
0이 아닌 실수 p에 대하여 좌표평면 위의 두 포물선 $y^2=4x$와 $(x+2)^2=4py$에 동시에 접하는 직선의 개수를 $f(p)$라 하자. $\lim_{p\to k+}f(p)<f(k)$를 만족시키는 실수 k의 값은?

① $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ② $-\frac{4\sqrt{6}}{9}$ ③ $-\frac{\sqrt{3}}{9}$
④ $\frac{4\sqrt{6}}{9}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

[2019학년도 6월 평가원 19번]-변형

60.

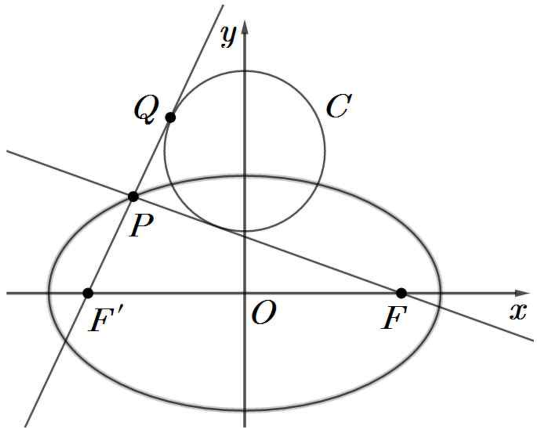
그림과 같이 두 초점이 F, F′인 쌍곡선 $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{17}=1$ 위의 점 P에 대하여 직선 FP와 직선 F′P에 동시에 접하고 중심이 y축 위에 있는 원 C가 있다. 직선 F′P와 원 C의 접점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{F'Q}}=5\sqrt{2}$일 때, $\overline{\mathrm{FP}}^2+\overline{\mathrm{F'P}}^2$의 값을 구하시오. (단, $\overline{\mathrm{F'P}}<\overline{\mathrm{FP}}$)



[2018학년도 11월 수능 27번]

61.

그림과 같이 두 초점이 F, F′인 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{9}=1$ $(a>3)$ 위의 점 P에 대하여 직선 FP와 직선 F′P에 동시에 접하고 중심이 y축 위에 있는 원 C가 있다. 직선 F′P와 원 C의 접점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{F'Q}}=5$일 때, $a+\overline{F'F}$의 값을 구하시오.



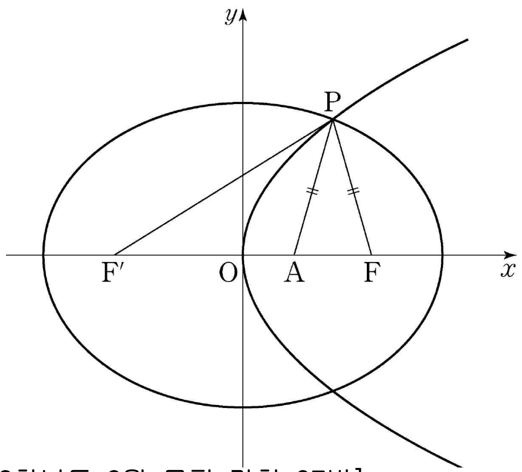
[2018학년도 11월 수능 27번]-변형

70.

좌표평면에서 초점이 $A(a,\ 0)$ $(a>0)$이고 꼭짓점이 원점인 포물선과 두 초점이 $F(c,\ 0)$, $F'(-c,\ 0)$ $(c>a)$인 타원의 교점 중 제1사분면 위의 점을 P라 하자.

$$\overline{AF}=2,\ \overline{PA}=\overline{PF},\ \overline{FF'}=\overline{PF'}$$

일 때, 타원의 장축의 길이는 $p+q\sqrt{7}$이다. p^2+q^2의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이다.)



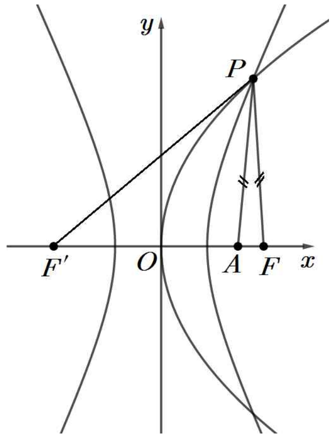
[2018학년도 9월 모평 가형 27번]

[추가 문제]

좌표평면에서 초점이 $A(a,\ 0)$ $(a>0)$이고 꼭짓점이 원점인 포물선과 두 초점이 $F(c,\ 0)$, $F'(-c,\ 0)$ $(c>a)$인 쌍곡선의 교점 중 제1사분면 위의 점을 P라 하자.

$\overline{AF}=4,\ \overline{PA}=\overline{PF},\ \overline{PF'}=\frac{1}{2}\overline{FF'}+2a$

일 때, 쌍곡선의 주축의 길이를 구하시오.

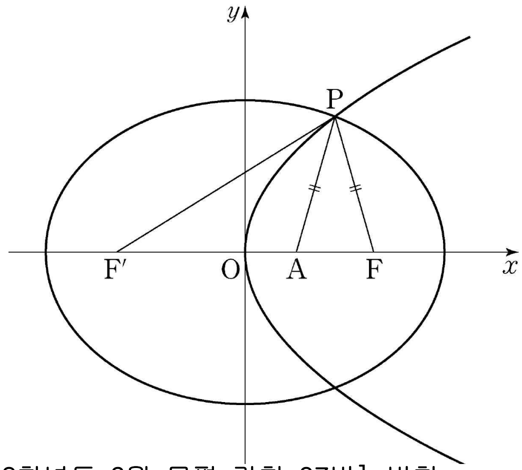


71.

좌표평면에서 초점이 $A(a,\ 0)$ $(a>0)$이고 꼭짓점이 원점인 포물선과 두 초점이 $F(c,\ 0)$, $F'(-c,\ 0)$ $(c>a)$인 타원의 교점 중 제1사분면 위의 점을 P라 하자.

$$\overline{AF}=4,\ \overline{PA}=\overline{PF},\ \overline{FF'}=\overline{PF'}-1$$

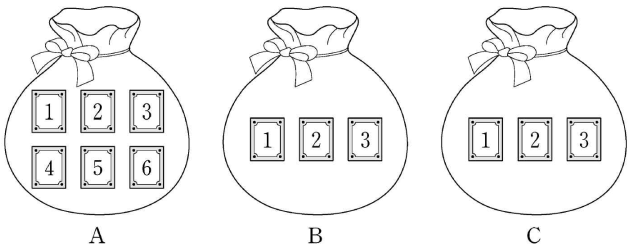
일 때, 타원의 장축의 길이는 $p+q\sqrt{46}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이다.)



[2018학년도 9월 모평 가형 27번]-변형

72.

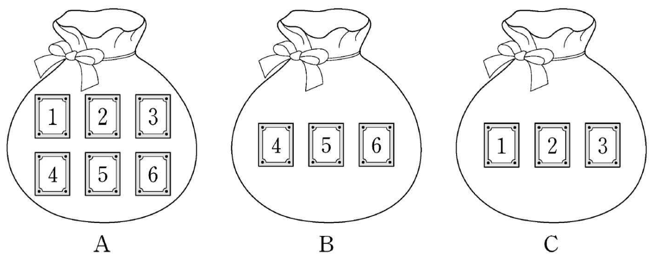
그림과 같이 주머니 A에는 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적힌 6장의 카드가 들어 있고 주머니 B와 C에는 1부터 3까지의 자연수가 하나씩 적힌 3장의 카드가 각각 들어 있다.
갑은 주머니 A에서, 을은 주머니 B에서, 병은 주머니 C에서 각자 임의로 1장의 카드를 꺼낸다. 이 시행에서 갑이 꺼낸 카드에 적힌 수가 을이 꺼낸 카드에 적힌 수보다 클 때, 갑이 꺼낸 카드에 적힌 수가 을과 병이 꺼낸 카드에 적힌 수의 합보다 클 확률이 k이다. $100k$의 값을 구하시오.



[2018학년도 9월 모평 가형 28번]

73.

그림과 같이 주머니 A에는 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적힌 6장의 카드가 들어 있고 주머니 B에는 4부터 6까지의 자연수가 하나씩 적힌 3장의 카드와 C에는 1부터 3까지의 자연수가 하나씩 적힌 3장의 카드가 각각 들어 있다.
갑은 주머니 A에서, 을은 주머니 B에서, 병은 주머니 C에서 각자 임의로 1장의 카드를 꺼낸다. 이 시행에서 갑이 꺼낸 카드에 적힌 수가 을이 꺼낸 카드에 적힌 수보다 작을 때, 갑이 꺼낸 카드에 적힌 수와 병이 꺼낸 카드에 적힌 수의 합이 을이 꺼낸 카드에 적힌 수보다 클 확률이 k이다. $100k$의 값을 구하시오.



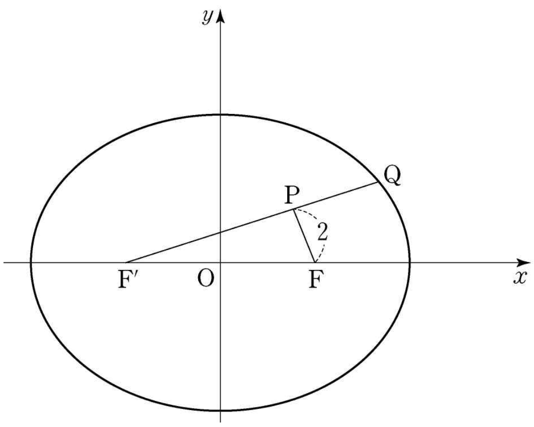
[2018학년도 9월 모평 가형 28번]-변형

100.

그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$의 두 초점은 F, F′이고, 제1사분면에 있는 두 점 P, Q는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{\mathrm{PF}}=2$ (나) 점 Q는 직선 PF′과 타원의 교점이다.

삼각형 PFQ의 둘레의 길이와 삼각형 PF′F의 둘레의 길이의 합을 구하시오.



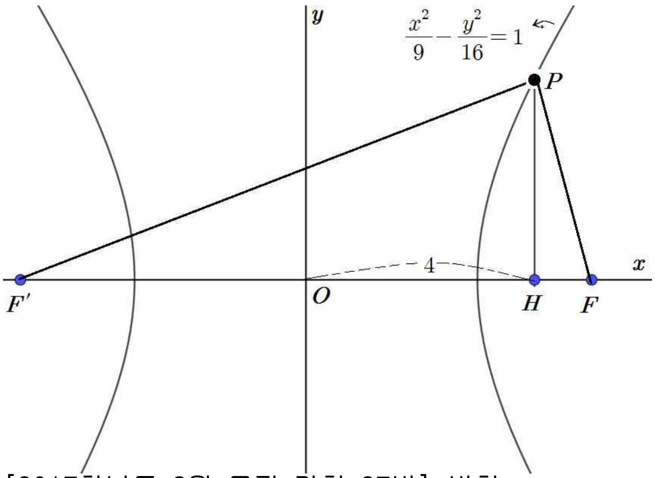
[2017학년도 9월 모평 가형 27번]

101.

그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$의 두 초점은 F, F′이고, 제1사분면에 있는 점 P, H는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 쌍곡선 위의 점 P에서 x축에 내린 수선의 발이 H이다. (나) 원점 O에서 H까지 거리는 4이다.

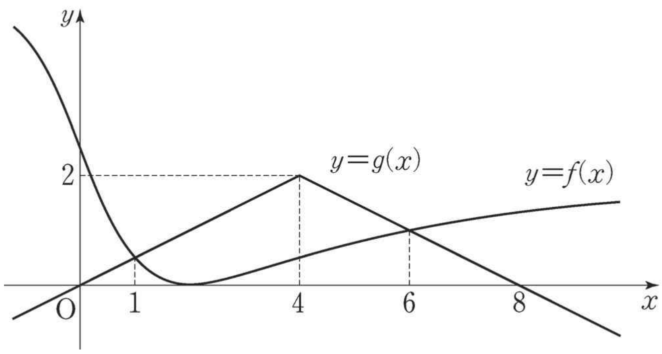
삼각형 PF′H의 둘레의 길이와 삼각형 PFH의 둘레의 길이의 차를 구하시오.



[2017학년도 9월 모평 가형 27번]-변형

108.

함수 $f(x)=\frac{5}{2}-\frac{10x}{x^2+4}$와 함수 $g(x)=\frac{4-|x-4|}{2}$의 그래프가 그림과 같다.



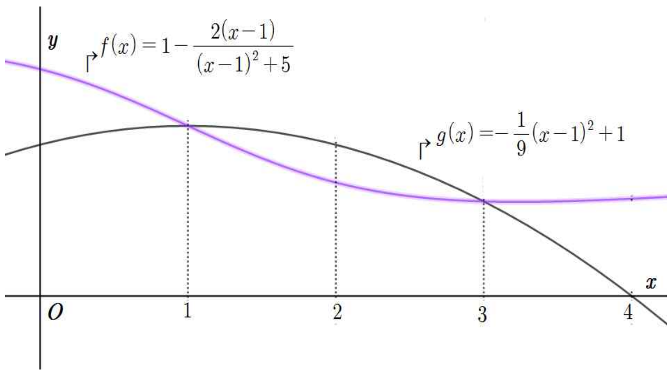
$0\le a\le 8$인 a에 대하여 $\int_0^a f(x)dx+\int_a^8 g(x)dx$의 최솟값은?

① $14-5\ln5$ ② $15-5\ln10$ ③ $15-5\ln5$
④ $16-5\ln10$ ⑤ $16-5\ln5$

[2017학년도 6월 모평 가형 20번]

109.

함수 $f(x)=1-\frac{2(x-1)}{(x-1)^2+5}$와 함수 $g(x)=-\frac{1}{9}(x-1)^2+1$의 그래프가 그림과 같다.



$0\le a\le 4$인 a에 대하여 $\int_0^a f(x)dx+\int_a^4 g(x)dx$의 최솟값은?

① $\frac{89}{27}-\ln\frac{3}{2}$ ② $\frac{49}{9}-\ln\frac{3}{2}$ ③ $\frac{79}{27}-\ln\frac{2}{3}$
④ $4-\ln3$ ⑤ $4-\ln2$

[2017학년도 6월 모평 가형 20번]-변형

145.

$0<x<\frac{\pi}{2}$에서 정의된 함수 $f(x)$와 도함수 $f'(x)$가

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$, $f'(x)=\sqrt{1-\{f(x)\}^2}$

을 만족할 때, 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$에 대하여 $g(1)$의 값은?

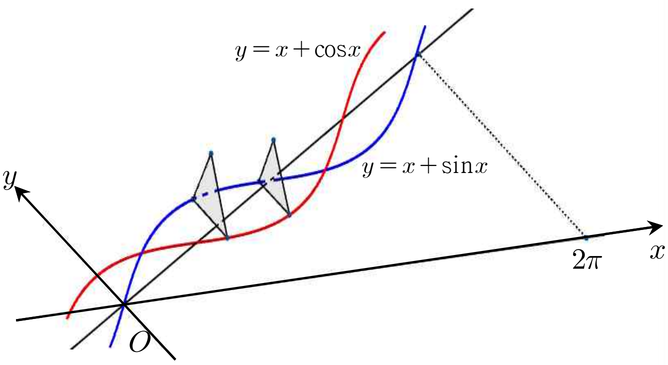
① $\frac{\pi}{4}$ ② $\frac{\pi}{3}$ ③ $\frac{\pi}{2}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

146.

닫힌구간 $[0, 2\pi]$에서 정의되는 두 곡선 $y=x+\sin x$와 $y=x+\cos x$로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형 S가 있다. 입체도형 S는 x축에 수직으로 자른 단면은 모두 빗변이 $x-y$평면 위에 있는 직각이등변 삼각형이다. S의 부피를 구하면?

① $\frac{\pi}{8}$ ② $\frac{\pi}{4}$ ③ $\frac{\pi}{2}$

④ $\frac{3}{4}\pi$ ⑤ π

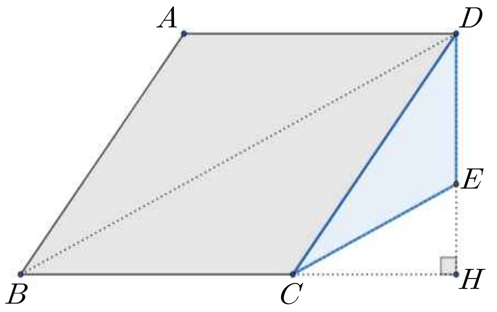


156.

그림과 같이 마름모 $ABCD$에서 꼭짓점 D에서 변 BC의 연장선에 내린 수선의 발을 H, $\overline{DH}$위에 있는 점 E가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\angle B=\dfrac{\pi}{3}$ (나) $\overrightarrow{BD}//\overrightarrow{CE}$, $\lvert\overrightarrow{CH}\rvert=\sqrt{3}$

삼각형 DCE의 넓이를 구하면?

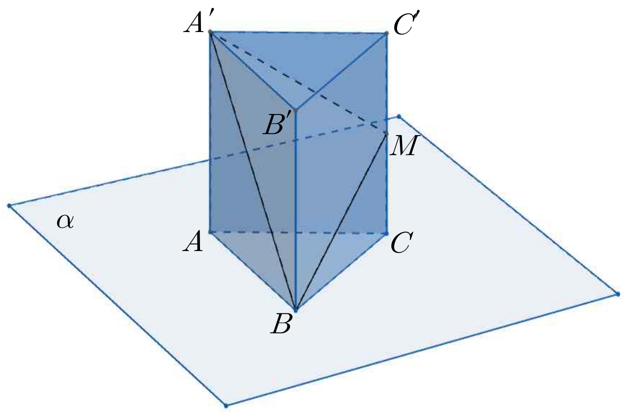


① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2
④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

157.

그림과 같이 평면 α위에 밑면이 정삼각형 ABC인 삼각기둥이 있다. 삼각기둥 $ABC-A'B'C'$의 높이 $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$는 길이가 4이고 모두 평면 α에 수직이다. 선분 $C'C$의 중점을 M이라 할 때 삼각형 $A'MB$와 평면 α가 이루는 각을 θ라 하자.

$\tan\theta=\dfrac{2}{3}$일 때, 정삼각형 ABC의 넓이를 구하면?



① $6\sqrt{3}$ ② $8\sqrt{2}$ ③ $8\sqrt{3}$
④ $9\sqrt{2}$ ⑤ $9\sqrt{3}$

24) 정답 ②

$\overline{AB}=1$이므로 $\overline{BC}=\tan\theta$

피타고라스 정리로

$\overline{AC}=\sqrt{1+\tan^2\theta}=\sqrt{\sec^2\theta}=\sec\theta$

각의 이등분선 성질에 의해

$\overline{AD}:\overline{BD}=\sec\theta:\tan\theta=1:\sin\theta$

따라서 $\overline{AD}=\dfrac{1}{1+\sin\theta}$

따라서 $S(\theta)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1+\sin\theta}\right)^2\theta$

$\overline{CE}=\sec\theta-\dfrac{1}{1+\sin\theta}$이므로

$$T(\theta)=\frac{1}{2}(\tan\theta)\left(\sec\theta-\frac{1}{1+\sin\theta}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)\left(\frac{1}{\cos\theta}-\frac{1}{1+\sin\theta}\right)\cos\theta$$
$$=\frac{1}{2}\left(\tan\theta-\frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)$$

따라서

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\{S(\theta)\}^2}{T(\theta)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\sin\theta}\right)^2\theta\right\}^2}{\frac{1}{2}\left(\tan\theta-\frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{1}{4}\theta^2}{\frac{1}{2}\left(\frac{\theta^2}{1+\theta}\right)}=\frac{1}{2}$$

[다른 풀이]

$\overline{AB}=1$이므로 $\overline{BC}=\tan\theta$

피타고라스 정리로

$\overline{AC}=\sqrt{1+\tan^2\theta}=\sqrt{\sec^2\theta}=\sec\theta$

각의 이등분선 성질에 의해

$\overline{AD}:\overline{BD}=\sec\theta:\tan\theta=1:\sin\theta$

$\theta\to0$일 때 $\theta\fallingdotseq\sin\theta\fallingdotseq\tan\theta$, $\cos\theta\fallingdotseq1$이므로

$\overline{AD}=\overline{AE}=1-\theta$, $\overline{BD}=\theta$, $\overline{BC}=\theta$, $\overline{CE}=\theta$

따라서

$S(\theta)=\dfrac{1}{2}(1-\theta)^2\theta$, $T(\theta)=\dfrac{1}{2}\theta^2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\{S(\theta)\}^2}{T(\theta)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{1}{4}\theta^2}{\frac{1}{2}\theta^2}=\frac{1}{2}$$

25) 정답 ④

$\overline{AB}=1$이므로 $\overline{BC}=\tan\theta$

피타고라스 정리로

$\overline{AC}=\sqrt{1+\tan^2\theta}=\sqrt{\sec^2\theta}=\sec\theta$

$\angle ACB=\dfrac{\pi}{2}-\theta$이므로 $\angle BCD=\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\theta}{3}$

따라서 $\overline{BD}=\tan\theta\tan\left(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\theta}{3}\right)$

따라서 $\overline{AD}=1-\tan\theta\tan\left(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\theta}{3}\right)$

따라서 $\overline{CE}=\sec\theta-1+\tan\theta\tan\left(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\theta}{3}\right)$

$\therefore\ S(\theta)=\dfrac{1}{2}\left(1-\tan\theta\tan\left(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\theta}{3}\right)\right)^2\theta$

$\therefore$

$$T(\theta)=\frac{1}{2}(\tan\theta)\left(\sec\theta-1+\tan\theta\tan\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\theta}{3}\right)\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)\left(\frac{1}{\cos\theta}-1+\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}\cos\theta}\right)\cos\theta$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin^2\theta}{\sqrt{3}}\right)$$

따라서

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\{S(\theta)\}^2}{T(\theta)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\left\{\frac{1}{2}\left(1-\tan\theta\tan\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\theta}{3}\right)\right)^2\theta\right\}^2}{\frac{1}{2}\left(\frac{\sin^2\theta}{\sqrt{3}}\right)}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\left(1-\tan\theta\tan\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\theta}{3}\right)\right)^4$$
$$\times\lim_{\theta\to0+}\frac{\left\{\frac{1}{2}\theta\right\}^2}{\frac{1}{2}\left(\frac{\sin^2\theta}{\sqrt{3}}\right)}$$
$$=1\times\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{1}{4}\theta^2}{\frac{1}{2\sqrt{3}}\sin^2\theta}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

예를 들어 $n=12$일 때

A	B	C	D	비고
4	4	4	12	O
5	5	5	9	O
6	6	6	6	X
7	7	7	3	O
8	8	8	0	O

A, B, C의 개수만 같은 경우는 4가지다.

따라서 ${}_4C_3 \times 4 = 16$이고

$f(12) = \frac{4}{3} \times 12 = 16$임을 확인할 수 있다.

70) 정답 29

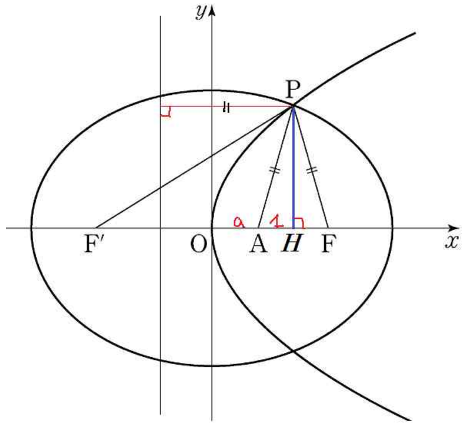
점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{AH} = 1$

따라서 점 P의 x좌표는 $a+1$이다.

포물선의 준선이 $x=-a$이므로 점 P에서 준선까지 거리는 $a+(a+1)=2a+1$이다.

따라서 포물선의 정의로 $\overline{PA} = 2a+1$



따라서 직각삼각형 PHA에서

$\overline{PH} = \sqrt{(2a+1)^2 - 1^2} = \sqrt{4a^2+4a}$

직각삼각형 $PF'H$에서

$\overline{PF'} = \overline{F'F} = 2a+4,\ \overline{F'H} = 2a+3$

$\overline{PH} = \sqrt{(2a+4)^2 - (2a+3)^2} = \sqrt{4a+7}$

따라서 $\sqrt{4a^2+4a} = \sqrt{4a+7}$

$\therefore\ a = \frac{\sqrt{7}}{2}$

타원의 장축의 길이는

$$\overline{PF} + \overline{PF'} = \overline{PA} + \overline{FF'}$$
$$= (2a+1) + (2a+4) = 4a+5$$
$$= 2\sqrt{7}+5$$

따라서 $p=5,\ q=2$

$p^2+q^2 = 25+4 = 29$이다.

[추가 문제]-정답 12

점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{AH} = 2$

따라서 점 P의 x좌표는 $a+2$이다.

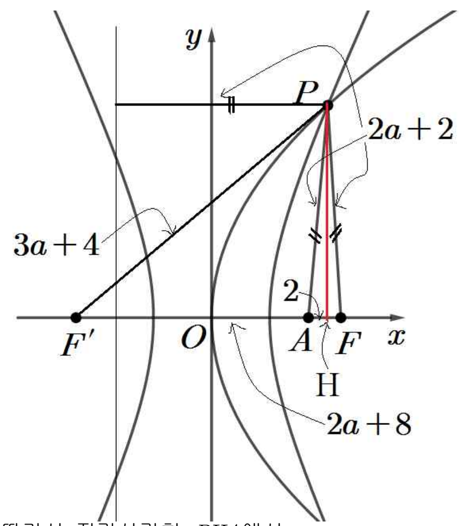
포물선의 준선이 $x=-a$이므로 점 P에서 준선까지 거리는 $a+(a+2)=2a+2$이다.

따라서 포물선의 정의로 $\overline{PA} = \overline{PF} = 2a+2$

$\overline{FF'} = 2a+8$

$\overline{PF'} = \frac{1}{2}\overline{FF'} + 2a$이므로

$\overline{PF'} = (a+4) + 2a = 3a+4$



따라서 직각삼각형 PHA에서

$\overline{PH} = \sqrt{(2a+2)^2 - (2)^2} = \sqrt{4a^2+8a}$

직각삼각형 $PF'H$에서

$\overline{PH} = \sqrt{(3a+4)^2 - (2a+6)^2} = \sqrt{5a^2-20}$

따라서 $\sqrt{4a^2+8a} = \sqrt{5a^2-20}$

$a^2 - 8a - 20 = 0 \to (a+2)(a-10) = 0$

따라서 $a=10$

쌍곡선의 주축의 길이는

$$\overline{PF'} - \overline{PF} = (3a+4) - (2a+2)$$
$$= a+2 = 12$$

152) 정답 5

$\vec{v}=(2\tan^2 t+2, \sin t)=(2\sec^2 t, \sin t)$

점 P의 시각 t에서의 위치를

$(2\tan t+C_1, -\cos t+C_2)$라 하면

$t=0$일 때 $(1, 0)$에 있으므로 $C_1=1$, $C_2=1$

따라서 점 P의 시각 t에서의 위치는

$(2\tan t+1, -\cos t+1)$

점 P가 직선 $y=x$위에 있으므로

$-\cos t+1=2\tan t+1$

$2\tan t+\cos t=0 \to \dfrac{2\sin t}{\cos t}+\cos t=0$

$\to \cos^2 t+2\sin t=0 \to \sin^2 t-2\sin t-1=0$에서

$\sin t=1\pm\sqrt{2}$, $\therefore$ $\sin t=1-\sqrt{2}$

$\dfrac{3}{2}\pi-t_1=t_4-\dfrac{7}{2}\pi$이므로

$t_1+t_4=5\pi$

153) 정답 ④

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1+\cos\theta, 1+\sin\theta)$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(-1, 0)$이라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(\cos\theta, 1+\sin\theta)$이므로

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2&=\cos^2\theta+(1+\sin\theta)^2\\&=2+2\sin\theta\\&\le 4\end{aligned}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|\le 2$

154) 정답 ④

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG}&=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB})\\&=\left(\frac{1}{3}+\frac{a}{3}\right)\overrightarrow{OA}+\frac{b}{3}\overrightarrow{OB}\end{aligned}$$

이때 삼각형 OAC의 무게중심 G가 선분 AB위에 있으므로

$\dfrac{1}{3}+\dfrac{a}{3}+\dfrac{b}{3}=1$

$\therefore$ $a+b=2$

155) 정답 6

$\overrightarrow{DA}$와 $\overrightarrow{DP}$가 이루는 각을 θ라 하면

$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DP}=3\times\sqrt{3}\times\cos\theta\ge\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$에서

$\cos\theta\ge\dfrac{1}{2}$이므로 $0\le\theta\le\dfrac{\pi}{3}$이다.

따라서 점 P는 $|\overrightarrow{DP}|=\sqrt{3}$에서 D를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$인 원 둘레 중 다음 그림과 같이 $\overrightarrow{DA}$와 시계방향으로 $\dfrac{\pi}{3}$, 또 반 시계방향으로 $\dfrac{\pi}{3}$인 호 둘레에 위치한다.

따라서

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BP}\\&=\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB})\\&=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}\\&=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AP}-(\overrightarrow{AB})^2\\&=2\sqrt{3}\times|\overrightarrow{AP}|\cos\alpha-3\end{aligned}$$