4점의 기술

(가)형

4점의 기술

ORBI.KR

저자의 말

수능을 준비하시는 수험생 여러분 안녕하세요.

저는 5번 수능을 준비하며 수능에 꼭 출제되는 고난도 문항을 실전에서 맞출 수 있는 실력을 갖추기 위해 열심히 노력해왔습니다.
평가원이 출제한 고난도 문항을 모아 관찰하며 이 문제들이 왜 어려운지, 어디서 막히기 쉬운지, 막히는 부분에서 어떻게 다음 단계로 넘어가야 하는지 고민했습니다.

그리고 학생들이 주로 막히는 부분에서 다음 단계로 넘어가기 위한 논리적 연결고리, 사고법이 특정하게 존재하다는 결론을 냈습니다.
많은 분들의 도움으로 제가 도달한 결론을 이 책을 통해 여러분과 공유할 수 있게 되었습니다.

Part1에서는 고난도 문항에 도전하기 전에 개념학습을 확실히 완성하는 방법,
3점 문항과 달리 4점 문항을 대할 때 가져야하는 자세를 서술했습니다.
Part2에서는 본격적으로 이 책의 핵심이라 할 수 있는 사고법을 담았습니다.
끝으로 part3에서는 2009학년도부터 2020학년도까지 12년간 평가원이 출제한 시험에서 가장 어려웠던 문제들을 뽑아 part2의 사고법을 적용해 분석해놓았습니다.

이 책의 목적은 막히는 문제를 만났을 때 여러 방향으로 발상적으로 생각을 하다가, 풀이법을 발견하면 맞히고 발견하지 못하면 틀리는 단계에서 벗어나, **특별하진 않지만 특정한 사고법**으로 생각을 집중하여 문제를 맞히도록 방향을 제시하고 도움을 드리는 것입니다.

이 책에서 제시하는 시각과 방법을 충분히 학습하시고 흡수하셔서 고난도 문항이 넘을 수 없는 벽이 아니라, 열심히 밟고 올라갈 수 있는 계단이 되길 바랍니다.

끝으로 이 책을 검토해주신 김현영, 문예은, 문지호, 손동우, 신소안, 유성환, 이기창, 정진욱, 편진희님 그리고 저에게 수학을 가르쳐 주신 故 김운한 선생님께 진심으로 감사드립니다.

감사합니다.

4점의 기술

ORBI.KR

C O N T E N T S

ORBI.KR

PART 1

들어가기 전에

- 개념 완성하기
- 문항을 읽을 때
- 문항을 읽고 나서

PART 1 들어가기 전에

1. 개념 완성하기

교과개념을 잘 숙지하고 있는 것은 고난도 문항을 풀기위해 반드시 필요한 조건입니다.
많은 선생님들이 개념의 중요성을 열심히 강조하십니다.
그러나 실제로 개념이 제대로 잡혀있는 학생들은 많지 않습니다.

개념을 공부하는 이유는 결국 문제를 풀기 위해서입니다.
개념을 이해하고 있는 상태만으론 문제를 해결하기 힘듭니다.
반드시 개념을 문제를 풀기 위한 도구로써 사용 가능한 형태로 학습해놓아야 합니다.

제가 권장하는 개념 공부법은 개념을 설명해보는 것입니다.
문제를 푼다는 건 머릿속에서 필요한 개념을 꺼내서 사용하는 것입니다.
따라서 스스로 개념을 설명해보며 개념을 꺼내는 연습을 해보셔야합니다.
설명을 하다보면 매끄럽게 설명이 안 되는 부분을 발견하게 되는데 이로써 자연스럽게 자신의 약점을 발견하고 보완할 수 있습니다.

정리하면 개념을 스스로 설명할 수 있다면 개념학습을 완료했다고 할 수 있습니다.

2. 문항을 읽을 때

4점 문항은 3점 문항과 다릅니다.

모든 4점 문항을 3점 문항 풀 듯 한 번 읽고 문제가 요구하는 바를 파악해 풀이의 첫 줄부터 마지막 줄까지 단숨에 풀 수는 없습니다.

배점이 3점이 아니라 4점인 것에는 그러한 이유가 있습니다.

4점 문항을 3점 문항 풀듯이 한 번에 이해해 풀려고 하면 문제의 복잡성 때문에 체감 난이도가 높아져 부담만 커집니다.

따라서 4점 문항은 문제를 끊어 읽으며 한 걸음씩 답을 향해 나아가야 합니다.

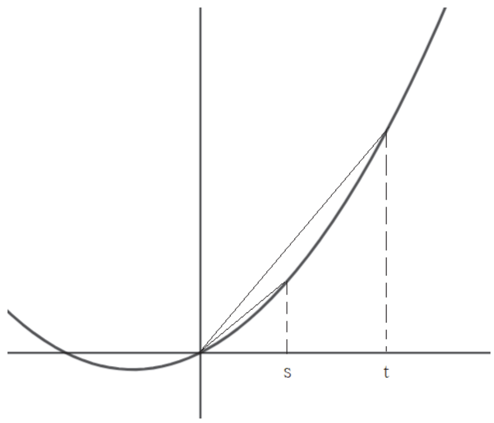
예를 들어보겠습니다.

아래 문제를 풀어보시기 바랍니다.

> **Q** 좌표평면에서 곡선 $y=x^2+x$ 위의 두 점 A, B의 x좌표를 각각 $s, t\,(0<s<t)$라 하자. 양수 k에 대하여 두 직선 OA, OB와 곡선 $y=x^2+x$로 둘러싸인 부분의 넓이가 k가 되도록 하는 점 (s,t)가 나타내는 곡선을 C라 하자. 곡선 C위의 점 중에서 점 (1,0)과의 거리가 최소인 점의 x좌표가 $\frac{2}{3}$일 때, k=$\frac{p}{q}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, p 와 q는 서로소인 자연수이다.) [2014학년도 6평 B형 30번]

이 문제를 읽고 한 번에 문제의 상황을 머릿속에 그려내기는 쉽지 않습니다.
이 문제는 2014학년도 6평 30번 문제였으며 당시 등급컷이 92점으로 많은 2~3등급 학생들이 이 문제에서 어려움을 겪었습니다.
하지만 끊어서 읽으면 결코 특별할 게 없는 문제입니다.

1. 좌표평면에서 곡선 $y=x^2+x$ 위의 두 점 A, B의 x좌표를 각각 $s, t\,(0<s<t)$라 하자.



2. 양수 k에 대하여 두 직선 OA, OB와 곡선 $y=x^2+x$로 둘러싸인 부분의 넓이가 k가 되도록 하는 점 (s,t)가 나타내는 곡선을 C라 하자.

$$\frac{1}{2}t(t^2+t)-\frac{1}{2}s(s^2+s)-\int_s^t x^2+x\,dx=k$$
$$\frac{t^3-s^3}{6}=k$$

3. 곡선 C위의 점 중에서 점 (1,0)과의 거리

$$l=\sqrt{(s-1)^2+t^2}$$
$$=\sqrt{(s-1)^2+(s^3+6k)^{\frac{2}{3}}}$$

4. 최소인 점의 x좌표가 $\frac{2}{3}$일 때, k=$\frac{p}{q}$이다.

$s=\frac{2}{3}$일 때 l이 최소이므로 $[(s-1)^2+(s^3+6k)^{\frac{2}{3}}]$를 미분한

$$2(s-1)+\frac{2}{3}(s^3+6k)^{-\frac{1}{3}}(3s^2)=0$$

$$k=\frac{28}{81}$$

하나씩 뜯어서 생각하니 한 단계 한 단계가 모두 쉽거나 교과 개념을 그대로 사용하면 되는 단계였습니다.

마치 쉬운 문제 2~3개를 붙여놓은 것에 불과하다는 생각도 듭니다.

하지만 이 문제의 상황을 한꺼번에 이해하고 문제를 풀려고 하니 체감 난이도가 높았던 것입니다.

따라서 문제 상황이 한 번에 이해하기 힘든 문제들은 반드시 끊어서 읽으며 단계적으로 생각하시길 바랍니다.

처음엔 의식적으로 /를 그어가며 읽는 것도 좋습니다.

3. 문항을 읽고 나서

길을 잃어버렸을 때를 가정해봅시다.

길을 잃었다면 무작정 걸을 것이 아니라, 침착하게 내가 어느 방향에서 어떻게 걸어 왔는지 기억을 떠올려 보거나 또는 주변에 이정표나 기준이 될 만한 지형은 없는지, 현 위치에서 너무 멀어지지 않는 선에서 약간 이동해보며 살필 것입니다.

문제를 풀 때도 마찬가지입니다.

고난도 문항은 문제를 다 읽은 후 풀이법이 바로 떠오르지 않는 경우가 상당히 많으며 그것이 일반적이라고 말할 수 있습니다.

따라서 문제를 다 읽고 해야 할 일은 풀이 방향을 탐색하는 것입니다.

주어진 조건을 어떻게 조합하고 활용해서 어떤 방향으로 풀이를 전개할지,

활용 가능해 보이는 특징적인 꼴이 있는지 등을 고려하며

풀이 첫 줄을 쓰기 전에 생각해보는 시간을 가지셔야합니다.

이때 문제와 연관된 개념을 가능한 구체적으로 떠올리는 것이 중요합니다.

꼭 확신을 가질 정도로 탐색을 하고 첫 줄을 쓰라는 뜻은 아닙니다.

어느 정도 생각을 해보고 나름대로 방법이 떠올랐다면 그 방향으로 조금 풀어보다 아닌 듯 하면 다시 원점으로 돌아오겠단 생각으로 풀이를 전개해보는 것도 '탐색하기'에 포함하겠습니다.

탐색하기의 주된 목적은 단서를 조합해 풀이방향을 잡는 것,

문제를 손 가는대로 풀다가 미궁에 빠져 시간을 허비하는 것을 방지하는 것입니다.

물론 문제를 읽은 직후에만 탐색을 해야 하는 건 아닙니다.

문제를 풀다가도 막히는 순간에는 적극 활용하시기 바랍니다.

예시로 문제를 풀어보겠습니다.

Q 실수 전체에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 있다. 모든 실수 x에 대하여

$f(2x) = 2f(x)f'(x)$이고,

$f(a) = 0,\ \displaystyle\int_{2a}^{4a} \frac{f(x)}{x}dx = k\ (a > 0,\ < k < 1)$일 때,

$\displaystyle\int_{a}^{2a} \frac{\{f(x)\}^2}{x}dx$의 값을 k로 나타낸 것은?

배운 개념을 떠올려 보겠습니다.

적분을 다루는 기술로 부분적분과 치환적분을 교과서에서 배웠습니다.

$\int_{2a}^{4a}, \int_{a}^{2a}$ 에서 보이는 구간의 차이는 치환적분을 활용할 수 있을 듯한 꼴이고

x^{-2}, x^{-1}의 차수 차이는 부분적분을 활용할 수 있을 듯한 꼴입니다.

부분적분을 활용해보겠습니다.

$x=2t$로 치환하면

$$\int_{2a}^{4a} \frac{f(x)}{x}dx = \int_{a}^{2a} \frac{f(2t)}{2t}2dt$$

여기에 $f(2x)=2f(x)f'(x)$를 대입해봐도 더 할 수 있는 게 없어 보이니 돌아옵니다.

이제 부분적분을 활용해보겠습니다.

$$\int_{a}^{2a} \{f(x)\}^2x^{-2}dx = \left[\{f(x)\}^2\frac{x^{-1}}{-1}\right]_{a}^{2a} - \int_{a}^{2a} 2f(x)f'(x)\frac{x^{-1}}{-1}dx$$

$f(a)=0,\ f(2x)=2f(x)f'(x)$이므로

$$\int_{a}^{2a} \{f(x)\}^2x^{-2}dx = k$$

이 문항은 출제 당시 3점 문항치고 너무 어려운 게 아니냐는 논란이 있었던 문항입니다.

문항을 읽은 직후엔 어떻게 풀어 나가야 할지 막막한 수준입니다.

풀이를 탐색할 줄 모르는 학생들은 큰 어려움을 겪었을 것입니다.

Part1에서 개념을 완성하는 법과 문항을 읽을 때 해야 하는 ‘끊어 읽기’,

읽은 직후에 해야 하는 ‘탐색하기’에 대해 알아보았습니다.

Part2에서 나오는 사고법들도 ‘○○하기’인 만큼 실전적으로 사용할 수 있게 설명해놓았습니다.

Part1을 여기서 마치겠습니다.