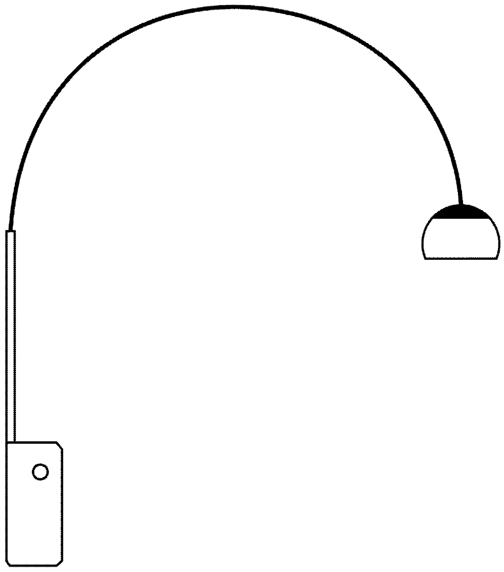
(2015개정 교육과정)

실전개념

아르코 수학 Ⅰ



arco 지음

"아르코 수학 실전개념서를 소개하겠습니다."
총 526페이지(단면기준, 해설서 포함) 입니다.
이 책의 목적은 어떻게 하면 좀 더 개념과 문제간의 괴리감을 줄일 수 있을까? 의문에서 출발했습니다. 개념설명을 숙지하고 유형별 문제를 풀더라도 연습문제에서는 풀지 못하는 경우가 많았기 때문입니다. 그래서 단계별 구성과 그에 맞는 적절한 예제를 배치한 것이 아니라 단계별 확인이 아닌 개념, 예제, 개념check, 개념연습, 실력연습문제 문항의 구성에 일정 난이도를 유지하게 했으며 일정 난이도를 유지할 때 발생될 수 있는 문제에 대한 이해도를 높이기 위해서 '개념길잡이'라는 것을 예제 밑에 배치하여 개념, 예제 내용에서 발생할 수 있는 추가 의문점을 해결하게 했습니다. 물론 단원 별 특징에 따라 '개념길잡이' 멘트에 차이는 있겠지만 되도록 연습문제를 접하게 됐을 때, 문제에 대해 접근을 못하는 것을 줄이기 위해 노력했습니다. 또한 단순 개념 확인의 선택형 문제를 제외한 전 문항을 주관식으로 구성하였습니다. 그리고 해설의 경우도 답에 도출에 있어서 상세히 기술하여 중간에서 막히는 일이 없도록 했으며, 예제 및 개념체크, 개념연습, 실력연습에서의 해설은 단순계산도 친절하게 하려고 했습니다. 개념에 대한 설명에 있어서도 방정식이라도 그래프적인 설명이 필요한 경우 추가 설명을 하여 방정식을 통해 이미지가 그려지도록 하려 했습니다.

◆ [개념길잡이 예제] 80문제
[기본확인 문제] 96문제
[기본check 문제] 134문제
[개념연습 문제] 164문제 (내신 3등급 이상 난이도)
[실력연습 문제] 45문제 (내신고정 1등급 난이도)
총 519문제 (주관식)

◆ 교재활용 팁
기본개념(개정 교과서)과 문제 적용, 유형별 접근법이 필요한 경우 정리를 했으며, 특히 그래프(지오지 브라를 바탕으로 실제 값에 가까운 이미지)를 활용하여 개념에 대한 이해도를 높이려 했습니다.

◆ 내신 실전 대비
[기본 확인 문제] 교과서 예제 확인용
[1단계]개념길잡이 예제+ 개념CHECK ==> 개념 및 유형에 대해 부족할 시
[2단계] 개념연습+ 실력연습 ==> 실전 내신 및 상위 등급 내신 맞보기 연습용

◆ 수능 개념 및 실전대비
개념길잡이 예제 ==> 개념check ==> 개념연습 ==> 실력연습

[목차]

Ⅰ. 지수함수와 로그함수

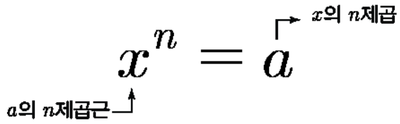
Ⅰ. 지수함수와 로그함수
01 지수

1. 거듭제곱이란
실수 a 와 양의 정수 n 에 대하여 a를 n번 곱한 것 $a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n개}$ 을 a의 n제곱이라 하고, $\boldsymbol{a^n}$으로 나타낸다.

이때, a^1, a^2, a^3, $\cdots$ 을 통틀어 a의 **거듭제곱**이라 한다.
a^n 에서 $\boldsymbol{a}$를 거듭제곱의 밑, $\boldsymbol{n}$ 을 거듭제곱의 지수라고 한다.

지수법칙을 정리하면 a, b가 임의의 실수이고, m, n이 양의 정수일 때, 다음과 같다.
① $a^m a^n = a^{m+n}$ ② $(a^m)^n = (a^n)^m = a^{mn}$
③$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ (단, $b \neq 0$)
④ $a^m \div a^n = \begin{cases} a^{m-n} & (m > n) \\ 1 & (m = n) \\ \frac{1}{a^{n-m}} & (m < n) \end{cases}$ (단, $a \neq 0$)
또한 $a^m \div a^n = a^m \times \frac{1}{a^n}$에서 $a \neq 0$이고, $m > n$이면 $a^0 \times a^{-1} = 1 \times \frac{1}{a} = \frac{1}{a}$의 꼴과 $m < n$일 때 $a^{-1} \times a^0 = a^{-1} \times 1 = \frac{1}{a}$의 꼴은 같습니다. 그런데 $m > 0$이면 $a^1 \times a^0 = a$이고, $m \neq n$인 $a^1 \times a^{-2} = a^{1-2} = a^{-1} = \frac{1}{a}$이 됨을 알 수 있습니다. (정수 지수로의 확장에서 확인할 수 있다.)

2. 거듭제곱근이란
제곱하여 실수 a가 되는 수, 즉 $x^2 = a$인 x를 a의 제곱근이라 하고, 세제곱하여 a가 되는 수를 a의 세제곱근,⋯⋯이라하고, a의 제곱근, 세제곱근, $\cdots$ 을 통틀어 a**의 거듭제곱근**이라 한다.



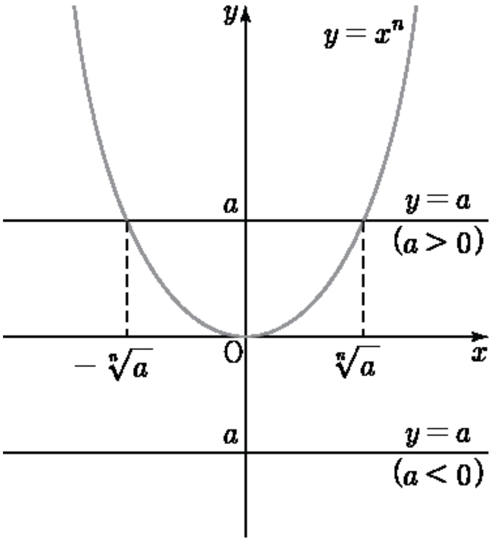
a 의 n 제곱근은 $x^n = a$를 만족시키는 n차 방정식임을 알 수 있다.
위의 방정식은 실수 a의 n제곱근은 복소수 범위에서 반드시 n개 존재함이 알려져 있다.
예를 들면 1의 네제곱근을 x라 하면 x는 방정식 $1 = x^4$의 근이다.
$x^4 - 1 = 0$에서 $(x^2+1)(x^2-1) = 0$, $(x^2+1)(x-1)(x+1) = 0$이므로 $x = \pm 1$, $x = \pm i$이고. 이

중 실수인 것은 1과 -1이고 허수인 것은 i과 $-i$임을 알 수 있다. 즉, 복소수의 범위에서 1의 네제곱근은 4개의 해를 가짐을 알 수 있다.

일반적으로 n을 $n \geqq 2$인 정수라 할 때, 실수 a에 대하여 방정식$x^n = a$의 해를 a의 n제곱근이라 한다.
$n\,(n=2,\ 3,\ 4,\ 5,\cdots)$ 번 곱해서 실수 a가 되는 수 x 를 a의 n제곱근이라 한다.
특히 실수 a의 n제곱근 중에서 실수인 것은 방정식 $x^n = a$의 실근이므로 함수 $y = x^n$의 그래프와 직선 $y = a$의 교점의 x좌표와 같다.

함수 $y = x^n$의 그래프를 이용하여 a의 n제곱근 중에서 실수인 것을 구해보면 다음과 같다.
실수 개수를 셀 때에는 n이 짝수인지 n이 홀수 인지와 a 값의 부호에 따라 개수가 다르게 나타남에 주의한다.

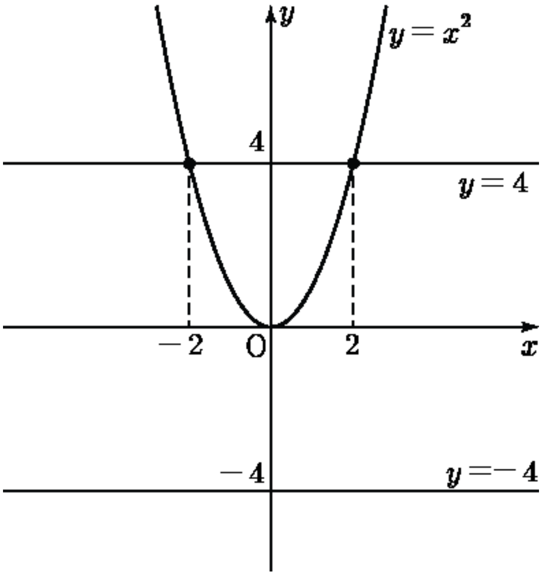
함수 $y = x^n$(n은 양의 정수)의 그래프
① n이 짝수일 때 $(-x)^n = x^n$이므로 y축에 대하여 대칭이다.



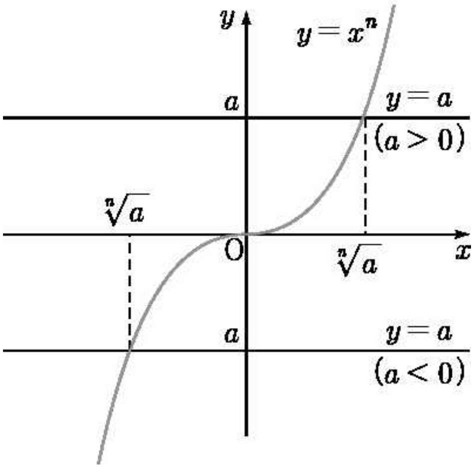
$$n\ :\ \text{짝수}\ \begin{cases} a>0 & :\ \pm\sqrt[n]{a}\ \text{로 두 개} \\ a=0 & :\ 0\text{만 존재하므로 한 개} \\ a<0 & :\ \text{존재하지 않는다.} \end{cases}$$

$a > 0$이면 실수인 것은 교점이 두 개이고, 양의 n제곱근 $\sqrt[n]{a}$, 음의 n제곱근 $-\sqrt[n]{a}$으로 나타낸다.

$a = 0$이면 $y = a$와의 교점이 한 개이고, a의 n제곱근 중에서 실수인 것은 0
$a < 0$이면 교점이 없으므로 a의 n제곱근 중에서 실수인 것은 존재하지 않는다.
예를 들면 4의 제곱근은 $x^2 = 4$을 만족시키는 수 2, -2이다.



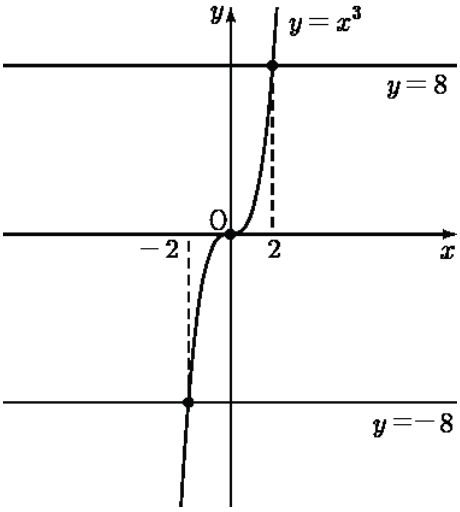
② n이 홀수일 때 $(-x)^n = -x^n$이므로 원점에 대하여 대칭이다.



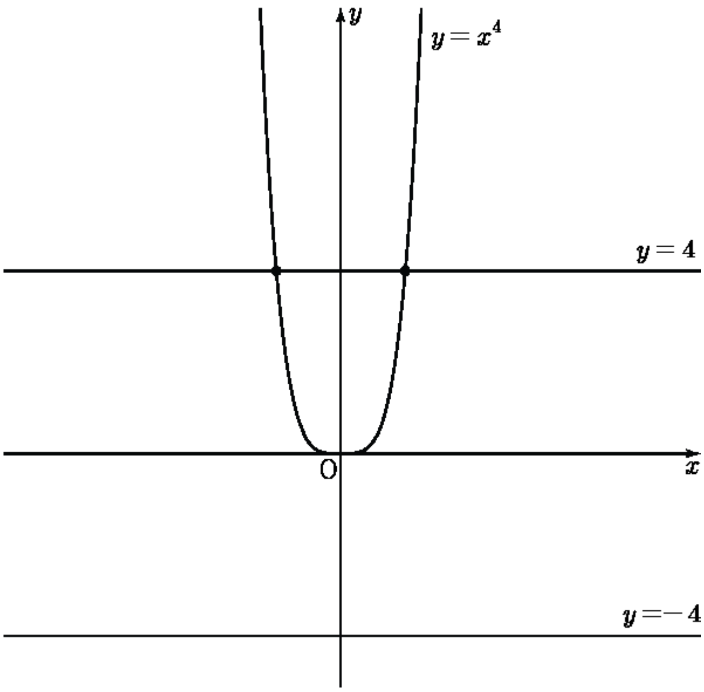
$$n \ : \ \text{홀수} \begin{cases} a>0 \ : \ \sqrt[n]{a} \text{ 로 한 개} \\ a=0 \ : \ 0 \text{만 존재하므로 한 개} \\ a<0 \ : \ \sqrt[n]{a} \text{ 로 한 개} \end{cases}$$

$y=x^n$과 $y=a$와의 교점의 개수는 a의 값에 관계없이 항상 한 개만 존재함을 그래프를 통해 확인할 수 있다. 즉, a의 n제곱근 중에서 실수인 것은 오직 하나만 존재하고, 이것을 기호로 $\sqrt[n]{a}$와 같이 나타낸다.

예를 들면 -8의 세제곱근은 $x^3=-8$을 만족시키는 수는 모두 세 개이며, 이 중 실수인 것은 -2이다. 그렇기 때문에 -8의 세제곱근은 -2로 단정 지으면 틀리게 된다.



또한 -4의 네제곱근은 $x^4=-4$에서 실수인 것은 $-\sqrt[4]{4}$라고 하면 틀린다. 교점이 존재하지 않기 때문에 실수는 존재하지 않는다.



3. 주의해야 되는 지수의 형태들

(1) a의 n제곱근과 n제곱근 a의 차이

실수 a의 n제곱근은 $x^n=a$ 가 되는 x 의 값 (n개의 해)을 뜻한다.

n제곱근 a는 $\sqrt[n]{a}$로 a의 n제곱근 중 하나이다.

(2) $(\sqrt[n]{a})^n$, $(\sqrt[n]{a^n})$의 차이

$(\sqrt[n]{a})^n$는 거듭제곱근의 정의에 따라 n이 홀수이든 짝수이든 a가 된다.

하지만 $(\sqrt[n]{a^n})$는 n이 홀수라면 a가 되지만 n이 짝수라면 $|a|$로 나온다.

n이 홀수라면 두 식은 차이가 없고 n이 짝수면 차이가 난다.

그 이유는 $(\sqrt[n]{a})^n$가 정의되기 위해선 n이 짝수 일 때는 $a \geq 0$ 인 조건이 이미 적용되

어 있기에 음수가 나타나지 않는 반면, a^n은 n이 짝수이면 a가 음수여도 항상 양수 값을 의미하기 때문에 양수로 바꾼 후 계산을 해주거나 계산 후 절댓값을 씌워주어야 한다.

4. 거듭제곱근의 성질

$a>0$, $b>0$ 이고 m, n이2 이상의 자연수 일 때 거듭제곱근에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $(\sqrt[n]{a})^n = a$　　　(2) $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$

(3) $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$　　　(4) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

(5) $(\sqrt[n]{a^m}) = \sqrt[np]{a^{mp}}$ (단, p : 자연수)

(6) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

(1) $(\sqrt[n]{a})^n$ 는 a의 양의 n제곱근 이므로 $(\sqrt[n]{a})^n = a$ 이다.

(2) $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$

$\{(\sqrt[n]{a})^m\}^n = (\sqrt[n]{a})^{mn} = \{(\sqrt[n]{a})^n\}^m = a^m$

이 때 $(\sqrt[n]{a})^m > 0$이므로 $(\sqrt[n]{a})^m$은 양수 a^m의 양의 n제곱근이다.

따라서 $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$ 이다.

(3) $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

$\sqrt[n]{a} > 0$, $\sqrt[n]{b} > 0$ 이므로 $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} > 0$

따라서 $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$는 ab의 양의 n제곱근이므로 $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ 이다.

(4) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

$\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \dfrac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n} = \dfrac{a}{b}$

이때 $\sqrt[n]{a} > 0$, $\sqrt[n]{b} > 0$에서 $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} > 0$이므로 $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$는 $\dfrac{a}{b}$의 양의 n 제곱근이다.

$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

(5) $(\sqrt[n]{a^m}) = \sqrt[np]{a^{mp}}$ (단, p : 자연수)

$(\sqrt[n]{a^m})^{np} = \{(\sqrt[n]{a^m})^n\}^p = (a^m)^p = a^{mp}$이고 $\sqrt[n]{a^m} > 0$이므로

$\sqrt[n]{a^m}$은 양수 a^{mp}의 양의 np 제곱근이다.

따라서 $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}} \Leftrightarrow \sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$ 이다.

(6) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

$(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}})^{mn} = \{(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}})^m\}^n = (\sqrt[n]{a})^n = a$

이때 $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} > 0$이므로 $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$는 양수 a의 양의 mn제곱근이다.

따라서 $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ 이다.

[참고] 거듭제곱 꼴의 대소 비교 판정

$a>0$, $b>0$일 때, $a>b$이면 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$이고, $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$이면 $a>b$이 성립한다.

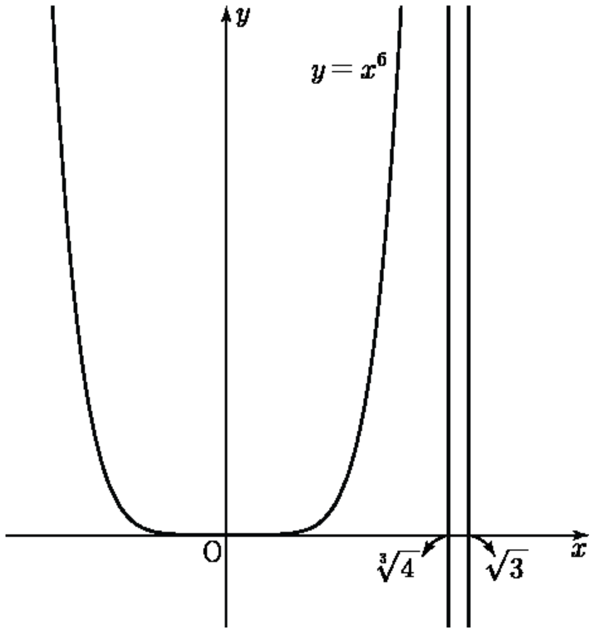
a는 밑이 a이고 지수가 1이므로 $a^1=a$임을 알 수 있다.

즉, $a^1>b^1$이면 거듭제곱의 성질에 의해 $\sqrt[n\times 1]{a^1}>\sqrt[n\times 1]{b^1}$이고, $\sqrt[n\times 1]{a^1}>\sqrt[n\times 1]{b^1}$이면 $a^1>b^1$이 성립함을 확인할 수 있다.

예를 들면 $\sqrt{3}$과 $\sqrt[3]{4}$의 대소를 비교하면

$\sqrt{3}=\sqrt[2\times 3]{3^3}=\sqrt[6]{27}$이고 $\sqrt[3]{4}=\sqrt[3\times 2]{4^2}=\sqrt[6]{16}$이므로 $\sqrt[6]{27}$과 $\sqrt[6]{16}$, $27>16$임을 알 수 있다.

따라서 $\sqrt{3}>\sqrt[3]{4}$이 성립된다. 이것은 다음과 같이 그래프를 통해서 확인할 수 있다.



(기본확인)

1, 다음 거듭제곱근을 구하시오.

(1) -16의 제곱근　　(2) -27의 세제곱근

(3) 1의 네제곱근　　(4) 625의 네제곱근

2. 다음 거듭제곱근 중에서 실수인 것을 고르시오.

(1) 4의 제곱근　　(2) $\dfrac{4}{25}$의 제곱근

(3) -216의 세제곱근　　(4) $(-7)^4$의 네제곱근

3. 다음 거듭제곱근 중에서 실수인 것을 고르시오.

(1) $\sqrt[3]{512}$　　(2) $\sqrt[5]{-32}$

(3) $\sqrt[4]{0.00256}$　　(4) $\sqrt[4]{6561}$

4. 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $\sqrt[3]{12} \times \sqrt[3]{18}$　　(2) $\dfrac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt[4]{3}}$

(3) $(\sqrt[6]{27})^4$　　(4) $\sqrt[4]{\sqrt{81}}$

(5) $\sqrt{\sqrt[3]{343}}$　　(6) $\sqrt[3]{32} \times \sqrt[4]{625}$

5. 다음은 $a > 0$, m, n이 1보다 큰 홀수일 때, $(\sqrt[n]{-a})^m =$ (가) 가 성립함을 증명한 것이다.

||증명||
$a > 0$, n이 1보다 큰 홀수일 때,
$\sqrt[n]{-a}$ $\boxed{(가)}$ 0이므로 $\sqrt[n]{-a}$는 실수이다.
$\{(\sqrt[n]{-a})^m\}^n = (\sqrt[n]{-a})^{mn} = \{(\sqrt[n]{-a})^n\}^m$
따라서 $(\sqrt[n]{-a})^m$은 $\boxed{(나)}$의 실수인 n제곱근이다.
$\therefore\ (\sqrt[n]{-a})^m = \boxed{(다)}$

위의 증명 과정에서 $\boxed{}$ 안의 (가), (나), (다)에 들어갈 알맞은 것을 차례로 써넣으시오.

(길잡이 예제1) 거듭제곱근의 뜻

다음 중 옳은 것을 모두 고르시오.

‖ 보기 ‖

㉠ 8의 세제곱근 중 실수인 것은 1개이다.

㉡ $\sqrt{256}$의 네제곱근은 ± 2이다.

㉢ n이 홀수 일 때, 5의 n제곱근 중 실수인 것은 1개이다.

㉣ 세제곱근 27은 3이다.

㉤ $x^4 = 5$ 를 만족하는 x 는 $y = x^4$ 와 $y = 5$ 의 교점의 x 좌표와 같다.

[풀이] ㉠ 8의 세제곱근을 x라 하면 $x^3 = 8$ 이므로

$x^3 - 8 = 0, (x-2)(x^2+2x+4) = 0$

$\therefore x = 2$ 또는 $x = -1 \pm \sqrt{3}i$ (참)

㉡ $\sqrt{256} = 16$이고 16의 네제곱근을 x라 하면

$x^4 = 16$ 이므로

$x^4 - 16 = 0, (x+2)(x-2)(x^2+4) = 0$

$\therefore x = \pm 2$ 또는 $x = \pm 2i$

따라서 $\sqrt{256}$의 네제곱근은 $-2, 2, -2i, 2i$이다.(거짓)

㉢ 5의 n제곱근 중 실수 인 것은 $x^n = 5$를 만족하는 수 x이고

n이 홀수 이므로 $x = \sqrt[n]{5}$ 로 1개이다.(참)

㉣ 세제곱근 27은 $\sqrt[3]{27}$이므로 $\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$ (참)

㉤ $y = x^4$ 와 $y = 5$ 의 교점의 x 좌표는 $x^4 = 5$ 를 만족하는 실수인 거듭제곱근이다.

즉, 허수일 때는 그래프로 나타내지지 않기 때문에 옳지 않다. (거짓)

(개념 길잡이) a의 n제곱근과 n제곱근 a를 구분해서 문제를 접근해야 합니다.
a의 n제곱근은 n번 곱해서 a가 되는 수이기 때문에 a의 n제곱근를 x라 두면 $x^n = a$를 만족하는 수인 반면에 n제곱근 a는 $\sqrt[n]{a}$를 읽는 방법입니다. 흔히 $\sqrt{a}$를 '루트 a'라고 읽지만 $\sqrt[n]{a}$는 'n루트a' 라고 읽지 않고 n제곱근 a라고 읽어야합니다. 왜냐하면 $n \times \sqrt{a}$인지 $\sqrt[n]{a}$인지 구별하기 힘들기 때문입니다.

(개념Check)1. 다음 중 옳은 것을 모두 고르시오.

‖ 보기 ‖

㉠ 27의 세제곱근은 3뿐이다.

㉡ -81의 네제곱근 중 실수인 것은 없다.

㉢ 제곱근 16은 ± 4이다.

㉣ n이 홀수일 때, 3의 n제곱근 중 실수인 것은 1개이다.

(길잡이 예제2) 거듭제곱근의 계산

다음 식을 간단히 구하시오.$(a>0,\ b>0)$

(1) $\sqrt{a^5b^3}\times\sqrt[3]{ab^2}\div\sqrt[6]{a^5b}$ (2) $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}$ (3) $\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{2}}}\times\sqrt{\dfrac{\sqrt[6]{2}}{\sqrt[3]{2}}}$

[풀이] (1) $\sqrt{a^5b^3}\times\sqrt[3]{ab^2}\div\sqrt[6]{a^5b}=a^{\frac{5}{2}}b^{\frac{3}{2}}\times a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}\div a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{1}{6}}$

$$=a^{\frac{5}{2}+\frac{1}{3}-\frac{5}{6}}b^{\frac{3}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}}$$

$$=a^{\frac{15}{6}+\frac{2}{6}-\frac{5}{6}}b^{\frac{9}{6}+\frac{4}{6}-\frac{1}{6}}$$

$$=a^{\frac{12}{6}}b^{\frac{12}{6}}=a^2b^2$$

(2) $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}=\sqrt{a}\times\sqrt{\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}$

$$=\sqrt{a}\times\sqrt{\sqrt{a}}\times\sqrt{\sqrt{\sqrt{a\sqrt{a}}}}$$

$$=\sqrt{a}\times\sqrt{\sqrt{a}}\times\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}\times\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}}$$

$$=a^{\frac{1}{2}}\times(a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\times((a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\times(((a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$$

$$=a^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{1}{4}}\times a^{\frac{1}{8}}\times a^{\frac{1}{16}}$$

$$=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}}=a^{\frac{15}{16}}=\sqrt[16]{a^{15}}$$

(3) $\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{2}}}\times\sqrt{\dfrac{\sqrt[6]{2}}{\sqrt[3]{2}}}=\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{2}}}{\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}}\times\dfrac{\sqrt{\sqrt[6]{2}}}{\sqrt{\sqrt[3]{2}}}$

$$=\frac{(2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}}{(2^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}}\times\frac{(2^{\frac{1}{6}})^{\frac{1}{2}}}{(2^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{2^{\frac{1}{6}}}{2^{\frac{1}{12}}}\times\frac{2^{\frac{1}{12}}}{2^{\frac{1}{6}}}=1$$

(개념 길잡이) 복잡한 계산이지만 $\sqrt[n]{}$ 기호를 모두 지수로 바꿔줘서 계산하면 좀 더 정확하고 빠르게 계산할 수 있습니다. 그리고 (2)처럼 $\sqrt[n]{}$가 여러 번 겹쳐서 나오는 것은 안에서부터 하나씩 연산해야 하지만 위의 풀이처럼 인수별로 각각 계산하는 것이 헷갈리지 않는 방법 중 하나입니다.

(개념Check)2. $x>0$일 때, $\sqrt[5]{\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}}\times\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[5]{x}}}\times\sqrt{\dfrac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x}}}$ 을 간단히 구하시오.

5. 지수를 정수의 범위까지 확장

지수가 양의 정수일 때 성립하는 지수법칙이 0 또는 음의 정수인 경우에도 성립하도록 지수 범위를 확장하여 보자

$a \neq 0$일 때, $m=0$ 또는 $m=-n\ (n>0)$인 경우에도 지수법칙 $a^m a^n = a^{m+n}$이 성립한다고 하면

(1) $a^0 = 1$

$$a^0 \times a^n = a^{0+n} = a^n \qquad \therefore a^0 = \frac{a^n}{a^n} = 1$$

(2) $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}\ (a \neq 0)$

$$a^{-n} \times a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1 \qquad \therefore a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

(3) $a^m a^n = a^{m+n}$

$m=-p$, $n=-q$ (p, q는 양의 정수)로 놓으면

$$a^m a^n = a^{-p} a^{-q} = \frac{1}{a^p} \times \frac{1}{a^q} = \frac{1}{a^{p+q}}$$

$$= a^{-(p+q)} = a^{(-p)+(-q)} = a^{m+n}$$

(4) $a^m \div a^n = a^{m-n}$

$m=-p$, $n=-q$ (p, q는 양의 정수)로 놓으면

$$a^m \div a^n = a^{-p} \div a^{-q} = \frac{1}{a^p} \div \frac{1}{a^q} = \frac{a^q}{a^p} = a^q \times a^{-p} = a^{q-p} = a^{-n+m} = a^{m-n}$$

이므로 $a^m \div a^n = a^{m-n}$이다.

(5) $(ab)^n = a^n b^n$

$m=-p$, $n=-q$ (p, q는 양의 정수)로 놓으면

$$(ab)^n = (ab)^{-q} = \frac{1}{(ab)^q} = \frac{1}{a^q \times b^q} = \frac{1}{a^q} \times \frac{1}{b^q} = a^{-q} \times b^{-q} = a^n b^n$$

이므로 $(ab)^n = a^n b^n$이다.

m, n중에서 하나만 음의 정수인 경우에도 위와 같은 방법으로 지수법칙이 성립한다.

참고로 n이 양의 정수일 때, $0^n = 0$이지만 0^n과 0^{-n}은 정의하지 않는다.

6. 지수를 유리수의 범위까지 확장

밑이 양수일 때, 지수가 유리수인 경우에도 지수가 정수일 때와 마찬가지로 지수법칙이 성립하도록 지수의 범위를 확장하여 보자.

$a>0, b>0$일 때 유리수 m, n에 대하여

(1) $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$

$a>0$일 때, 유리수 p, q에 대하여 지수법칙 $(a^p)^q=a^{pq}$이 성립한다고 하면

유리수 $\frac{m}{n}$ (m, n은 정수, $n\ge 2$)에 대하여

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n=a^{\frac{m}{n}\cdot n}=a^m$$

이때, $a>0$이므로 $a^{\frac{m}{n}}>0$이다.

따라서 $a^{\frac{m}{n}}$은 a^m의 양의 n제곱근이므로

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$$

(2) $a^r a^s=a^{r+s}$

$r=\frac{m}{n}$, $s=\frac{p}{q}$ (m, p는 정수, n, q는 2 이상의 자연수)로 놓으면

$a^r a^s=a^{\frac{m}{n}}a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[nq]{a^{mq}}\sqrt[nq]{a^{np}}$

여기서 mq, np는 정수이고 $a^{mq}>0$, $a^{nq}>0$이므로

$$a^r a^s=\sqrt[nq]{a^{mq}}\sqrt[nq]{a^{np}}=\sqrt[nq]{a^{mq}a^{np}}=\sqrt[nq]{a^{mq+np}}=a^{\frac{mq+np}{nq}}=a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}=a^{r+s}$$

따라서 $a^r a^s=a^{r+s}$이 성립한다.

(3) $a^r\div a^s=a^{r-s}$

$r=\frac{m}{n}$, $s=\frac{p}{q}$ (m, p는 정수, n, q는 2 이상의 자연수)로 놓으면

$$a^{-s}=a^{-\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^{-p}}=\sqrt[q]{\frac{1}{a^p}}=\frac{1}{\sqrt[q]{a^p}}=\frac{1}{a^{\frac{p}{q}}}=\frac{1}{a^s}$$

이므로 $a^r\div a^s=a^r\times\frac{1}{a^s}=a^r a^{-s}=a^{r-s}$

(4) $(a^r)^s=a^{rs}$

$r=\frac{m}{n}$, $s=\frac{p}{q}$ (m, p는 정수, n, q는 2 이상의 자연수)로 놓으면

$$(a^r)^s=\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^p}=\sqrt[q]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p}=\sqrt[q]{\sqrt[n]{a^{mp}}}=\sqrt[nq]{a^{mp}}=a^{\frac{mp}{nq}}=a^{\frac{m}{n}\times\frac{p}{q}}=a^{rs}$$

(5) $(ab)^r=a^r b^r$

$r=\dfrac{m}{n}$, $s=\dfrac{p}{q}$ (m, p는 정수, n, q는 2 이상의 자연수)로 놓으면

$(ab)^r=(ab)^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{(ab)^m}=\sqrt[n]{a^m b^m}=\sqrt[n]{a^m}\sqrt[n]{b^m}=a^{\frac{m}{n}}b^{\frac{m}{n}}=a^r b^r$

7. 지수를 실수의 범위까지 확장

지수의 범위를 실수까지 확장하기 위하여 지수가 무리수인 $2^{\sqrt{3}}$을 예로 들어 보면
무리수 $\sqrt{3}=1.7320508075\cdots\cdots$에 대하여 $\sqrt{3}$에 한없이 가까워지는 유리수
1, 1.7, 1.73, 1.732, 1.7320, 1.73205, $\cdots\cdots$를 지수로 가지는 수
2^1, $2^{1.7}$, $2^{1.73}$, $2^{1.732}$, $2^{1.7320}$, $2^{1.73205}$, $\cdots\cdots$은 일정한 수에 한없이 가까워짐을 알 수 있다.
이 일정한 수를 $2^{\sqrt{3}}$이라고 정의한다. 이와 같은 방법을 이용하면 $a>0$일 때, 임의의 실수 x에 대하여도 a^x을 정의할 수 있다.
에를 들면 $a>0$, $b>0$일 때, $\left(a^{\sqrt{3}}b^{\sqrt{5}}\right)^{\sqrt{15}}=a^{\sqrt{45}}b^{\sqrt{75}}=a^{3\sqrt{5}}b^{5\sqrt{3}}$으로 나타낼 수 있다.

㉠ 정수 지수로의 확장

0 또는 음의 정수인 지수

$a\neq 0$이고 n이 양의 정수일 때, $a^0=1$, $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$

㉡ 지수가 정수일 때의 지수법칙

$a\neq 0$, $b\neq 0$이고 m, n이 정수일 때

① $a^m a^n=a^{m+n}$　② $(a^m)^n=a^{mn}$, $(a^n)^m=a^{mn}$

③ $(ab)^n=a^n b^n$　④ $a^m\div a^n=a^{m-n}$

㉢ 유리수인 지수

$a>0$이고 m이 정수, n이 2이상인 정수일 때

$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$, 특히 $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$

㉣ 지수가 유리수일 때의 지수법칙

$a>0$, $b>0$이고 r, s가 유리수일 때

① $a^r a^s=a^{r+s}$　② $(a^r)^s=a^{rs}$

③ $(ab)^r=a^r b^r$　④ $a^r\div a^s=a^{r-s}$

㉤ $a>0$, $b>0$이고 x, y가 실수일 때

① $a^x a^y=a^{x+y}$　② $(a^x)^y=a^{xy}$

③ $(ab)^x=a^x b^x$　④ $a^x\div a^y=a^{x-y}$

8. 양의 실수를 유리수인 지수로 나타내기

a, b는 자연수, m, $n \neq 0$인 정수, x, y는 실수일 때

$a^m = x$, $b^n = y$이면 $a = x^{\frac{1}{m}}$, $b = y^{\frac{1}{n}}$으로 바꾸어 a와 b를 실수 x와 y에 관한 식으로 나타낼 수 있다.

예를 들면 $8^{\frac{2}{3}} = x$, $27^{\frac{3}{4}} = y$일 때, $8^{\frac{2}{3}} = (2^3)^{\frac{2}{3}} = 2^2 = x$이므로

$2 = x^{\frac{1}{2}}$, $27^{\frac{3}{4}} = (3^3)^{\frac{3}{4}} = 3^{\frac{9}{4}}$에서 $3 = y^{\frac{4}{9}}$으로 나타낼 수 있다.

즉, $2 = x^{\frac{1}{2}}$, $3 = y^{\frac{4}{9}}$을 이용하여 $108^{\frac{1}{2}} = (2^2 \times 3^3)^{\frac{1}{2}} = 2^{2 \times \frac{1}{2}} \times 3^{3 \times \frac{1}{2}} = 2 \times 3^{\frac{3}{2}} = x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{2}{3}}$꼴로 나타낼 수 있다. 문제에서는 실수 $(xy)^n$꼴을 물어본다.

9. 지수법칙과 곱셈공식의 곱셈공식 이용 및 응용

① $a > 0$, $b > 0$이고 x, y가 실수일 때,

곱셈공식 $(a^{2x} - b^{2x}) = (a^x + b^y)(a^x - a^y)$, $(a^x \pm y^y)^2 = a^{2x} \pm 2a^x b^y + y^{2y}$,

$(a^x \pm b^y)^3 = a^{3x} \pm 3a^{2x} b^y + 3a^x b^{2y} \pm b^{3y}$을 이용한다.

예를 들면 $a > 0$일 때,

$$(a^{\frac{1}{3}} + a^{-\frac{1}{3}})^3 - (a^{\frac{1}{3}} - a^{-\frac{1}{3}})^3 = a + 3a^{\frac{2}{3}} a^{-\frac{1}{3}} + 3a^{\frac{1}{3}} a^{-\frac{2}{3}} + a^{-1} - a + 3a^{\frac{2}{3}} a^{-\frac{1}{3}} - 3a^{\frac{1}{3}} a^{-\frac{2}{3}} + a^{-1}$$

$$= a^{-1} + a^{-1} + 3a^{\frac{1}{3}} + 3a^{\frac{1}{3}} = 2a^{-2} + 6a^{\frac{1}{3}}$$

으로 간단히 식을 나타낼 수 있다.

② $a > 0$이고 실수 x에 대하여 $a^x + a^{-x}$ 꼴이 주어지는 경우 곱셈공식에서

$a^{2x} + a^{-2x} = (a^x + a^{-x})^2 - 2a^{2x-2x} = (a^x + a^{-x})^2 - 2$

$(a^x + a^{-x})^3 = a^{3x} + 3a^{2x} a^{-x} + 3a^x a^{-2x} + a^{-3x} = a^{3x} + a^{-3x} + 3a^x + 3a^{-x}$에서

$a^{3x} + a^{-3x} = (a^x + a^{-x})^3 - 3(a^x + a^{-x})$꼴로 나타낸다.

예를 들면 $3^{2x} + 3^{-2x} = 11$일 때,

$3^{2x} + 3^{-2x} = (3^x + 3^{-x})^2 - 2$에서 $3^x + 3^{-x} = 3^{2x} + 3^{-2x} + 2 = 11 + 2 = 13$이고

$(2^{\frac{x}{2}} + 2^{-\frac{x}{2}})^2 = 2^x + 2 + 2^{-x} = 2^x + 2^{-x} + 2 = 11 + 2 = 13$, $2^{\frac{x}{2}} + 2^{-\frac{x}{2}} = \pm\sqrt{13}$

$2^{\frac{x}{2}} + 2^{-\frac{x}{2}} > 0$이므로 $2^{\frac{x}{2}} + 2^{-\frac{x}{2}} = \sqrt{13}$

문제에서 $\dfrac{3^x + 3^{-x}}{3^{\frac{x}{2}} + 3^{-\frac{3}{2}}} = \dfrac{13}{\sqrt{13}} = 13\sqrt{13}$으로 간단히 나타낼 수 있다.

하지만 조건에서 $a > 0$이고 p는 실수인 경우, $a^x = p$로 조건이 주어지면

$\dfrac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}}$ 꼴의 경우에는 분모와 분자에 각각 a^x을 곱해준다.

즉, $\dfrac{(a^x - a^{-x})a^x}{(a^x + a^{-x})a^x} = \dfrac{a^{2x}-1}{a^{2x}+1} = \dfrac{p-1}{p+1}$ 꼴로 나타낼 수 있다.

10. 밑을 통일하여 식의 값 구하기

밑을 같게 하여 지수 법칙을 이용한다.

예를 들면 두 실수 x, y, p에 대하여 $ab = 5^p$이고, $a^x = 25$, $b^y = 125$이면

$a^x = 25 = 5^2$, $a = 5^{\frac{2}{x}}$이고 $b^y = 125 = 5^3$, $b = 5^{\frac{3}{y}}$이 되어 $ab = 5^{\frac{2}{x}+\frac{3}{y}}$꼴이 된다.

즉, $ab = 5^p$이므로 $5^p = 5^{\frac{2}{x}+\frac{3}{y}}$에서 $\dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} = p$로 나타낼 수 있다.

(기본확인)

6. 다음 값을 구하시오.

(1) $9^{\frac{3}{2}}$　　(2) $(17)^0$　　(3) $32^{-\frac{2}{3}}$　　(4) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-5}$

(5) $81^{0.5}$　　(6) $729^{1.25}$　　(7) $\left(\sqrt[3]{5}\right)^6$

7. 다음 식을 간단히 하시오.(단, $a \neq 0$, $b \neq 0$)

(1) $4^8 \times 2^{-10}$　　(2) $5^3 \div 5^{-2} \times 5^{-6}$　　(3) $\left(a^4 b^{-12}\right)^{\frac{3}{4}}$

(4) $\left(a^{-8} \div a^2\right)^{-4} \times a^3$　　(5) $\dfrac{\left(a^{-3}\right)^2 \times \left(a^2\right)^3}{a^{-5} \times a^7}$

8. 다음을 a^r 꼴로 나타내시오.(단, $a > 0$, r는 유리수이다.)

(1) $\sqrt[5]{a}$　　(2) $\sqrt[20]{a^{15}}$　　(3) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{a^7}}$　　(4) $\dfrac{\sqrt[9]{a}}{\sqrt[9]{a^5}}$

9. 다음 식을 간단히 하시오.(단, $a > 0$, $b > 0$)

(1) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt[5]{a}}}$　　(2) $\left(a^{\frac{1}{5}} - b^{\frac{1}{5}}\right)\left(a^{\frac{2}{5}} + a^{\frac{1}{5}} b^{\frac{1}{5}} + b^{\frac{2}{5}}\right)$　　(3) $3^{\sqrt{8}} \times 3^{\sqrt{32}}$

(4) $\left(16^{\sqrt{125}}\right)^{-\frac{1}{\sqrt{5}}}$　　(5) $\left(a^{\sqrt{3}} b^{\sqrt{7}}\right)^{\sqrt{21}}$　　(6) $5^{\pi+9} \div 5^{\pi-9}$

10. $a^{-2} = 5$일 때, $\dfrac{a^3 - a}{a - a^{-3}}$의 값을 구하시오. (단, $a > 0$)

11. 다음 계산 과정 중에서 처음으로 등호가 잘못 사용된 부분을 구하시오.

$$\begin{aligned}
\sqrt{\sqrt{(-5)^4 \times (-5)^8}} &= \sqrt{\sqrt{(-5)^{12}}} && \Leftarrow ㉠ \\
&= \sqrt[4]{(-5)^{12}} && \Leftarrow ㉡ \\
&= (-5)^{\frac{12}{4}} && \Leftarrow ㉢ \\
&= (-5)^3 && \Leftarrow ㉣ \\
&= -125 && \Leftarrow ㉤
\end{aligned}$$

(길잡이 예제3) 지수가 확장된 거듭제곱근의 계산

다음 식을 간단히 구하시오.

(1) $\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{4}} \times \left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{1}{6}}$ (2) $\{(-3)^2\}^{\frac{3}{2}} - 81^{\frac{3}{4}} \times 4^{\frac{1}{2}}$ (3) $\frac{\sqrt[6]{8} \times \sqrt[12]{9}}{\sqrt[6]{81}}$

[풀이] (1) $\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{4}} \times \left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{1}{6}} = \left\{\left(\frac{2}{3}\right)^2\right\}^{\frac{3}{4}} \times \left\{\left(\frac{3}{2}\right)^3\right\}^{-\frac{1}{6}}$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

(2) $\{(-3)^2\}^{\frac{3}{2}} - 81^{\frac{3}{4}} \times 4^{\frac{1}{2}} = (3^2)^{\frac{3}{2}} - (3^4)^{\frac{3}{4}} \times (2^2)^{\frac{1}{2}}$

$$= 3^{2\times\frac{3}{2}} - 3^{4\times\frac{3}{4}} \times 2^{2\times\frac{1}{2}}$$

$$= 3^3 - 3^3 \times 2 = 27 - 54 = -27$$

(3) $\frac{\sqrt[6]{8} \times \sqrt[12]{9}}{\sqrt[6]{27}} = (2^3)^{\frac{1}{6}} \times (3^2)^{\frac{1}{12}} \div (3^4)^{\frac{1}{6}}$

$$= 2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{6}} \div 3^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{1}{2}} \times 3^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

(개념 길잡이) 거듭제곱근은 지수가 실수 범위에서 까지 확장이 가능합니다. 이 때 지수가 자연수일 경우는 상관이 없지만 지수가 실수 범위에서는 밑이 0보다 크다는 사실에 유의해서 풀어야 합니다. 즉 예제(2)와 같이 $(-3)^2$에서 -3지수는 0보다 작으므로 $(-3)^2 = 9 = 3^2$으로 변형한 뒤에 계산을 해 줘야 됩니다. 변형하지 않고 계산하게 되면 $(-3)^{2\times\frac{3}{2}} = (-3)^3 = -27$이 되어 잘못된 값을 유도하게 됨에 주의해야 됩니다.

(개념Check)3. (1) $\left(\sqrt{a^3} \times \sqrt[4]{a} \times a^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{5}}$을 간단히 구하시오. (단, $a > 0$)

(2) $(\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{(-5)^2} - \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{4})$을 간단히 구하시오.

(3) $(2^{5+\sqrt{5}} + 2^{5-\sqrt{5}})^2 - (2^{5+\sqrt{5}} - 2^{5-\sqrt{5}})^2$을 간단히 구하시오.

(길잡이 예제4) 거듭제곱근의 활용

(1) $\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{n}}$과 $81^{\frac{1}{n}}$의 값이 모두 자연수가 되도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오.

(2) 3의 네제곱근 중 양수인 것을 x값이라고 할 때, x^n이 두 자리 자연수가 되도록 하는 모든 자연수 n의 값을 구하시오.

[풀이] (1) $\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{n}}=(2^{-x})^{-\frac{4}{n}}=2^{\frac{12}{n}}$

$\therefore\ 81^{\frac{1}{n}}=(3^4)^{\frac{1}{n}}=3^{\frac{4}{n}}$

즉, $2^{\frac{12}{n}}$, $3^{\frac{4}{n}}$이 모두 자연수가 되기 위해서는 자연수 n이 2와 4의 최대공약수 의 약수가 되어야 한다.

따라서 최대공약수는 4이므로 4의 약수는 1, 2, 4이고 그 합은 $1+2+4=7$

(2) 3의 네제곱근은 $x^4=3$으로 나타낼 수 있고, $x=3^{\frac{1}{4}}$이다.

$x^n=3^{\frac{n}{4}}$이고 두 자리 자연수가 되기 위한 n의 값은

$x^{12}=3^{\frac{12}{4}}=3^3=27$

$x^{16}=3^{\frac{16}{4}}=3^4=81$ 이므로 $n=12,\ 16$

(개념 길잡이) 거듭제곱근이 자연수가 되기 위해서는 지수가 음이 아닌 정수가 되어야 합니다. (지수가 0이어도 값은 1이 되기 때문에) 위에 식을 보면 지수가 분수 꼴로 되어 있고 분자가 상수 분모가 미지수입니다. 그래서 분모가 분자의 약수면 자연수가 됩니다.
두 식을 만족하기 위해선 분자들의 최대 공약수의 약수로 n값을 구해줍니다.
반대로 분모가 상수이고 분자가 미지수로 되어있다면 분모의 최소공배수의 배수로 n값을 구해주면 됩니다.

(개념Check)4. n이 2이상의 자연수일 때, a의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(a,\ n)$라 하자. 이 때, $f(5,2)+f(5,3)+f(5,4)+\ \cdots\ +f(5,k)=15$ 를 만족하는 자연수 k의 값을 구하시오.

(길잡이 예제5) 지수법칙과 곱셈공식을 이용한 계산

$a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=3$일 때, 다음 식의 값을 구하여라. (단, $a>0$)

(1) $a+a^{-1}$ (2) a^2+a^{-2} (3) $a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}$

[풀이] (1) $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=3$의 양변을 제곱하면

$a+2+a^{-1}=9$

$\therefore\ a+a^{-1}=7$

(2) $a+a^{-1}=7$의 양변을 제곱하면

$a^2+2+a^{-2}=49$

$\therefore\ a^2+a^{-2}=47$

(3) $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=3$의 양변을 세제곱하면

$(a^{\frac{1}{2}})^3+(a^{-\frac{1}{2}})^3+3\times a^{\frac{1}{2}}\times a^{-\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})=27$

$a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}+3\times1\times3=27$

$\therefore\ a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}=18$

(개념 길잡이) 곱셈공식에서 자주 등장하는 합, 차, 곱의 연산입니다. 합, 차, 곱 중 2가지 값을 알면 다른 값을 구할 수 있고, 그것들의 제곱, 세제곱 식도 구할 수 있습니다. 특히 지수에서 역수꼴의 곱이 주어져 있지 않아도 $a^x\times a^{-x}=1$이라는 것을 알 기 때문에 역수의 합이나 차만 주어지는 경우가 많습니다.

(개념Check)5. 양수 x에 대하여 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=4$일 때, $\dfrac{x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}+2}{x^2+x^{-2}+3}$의 값을 구하시오.

(개념check)6. $\sqrt{a}-\dfrac{1}{\sqrt{a}}=3$일 때, $\dfrac{a^{\frac{3}{2}}-a^{-\frac{3}{2}}-7}{a+a^{-1}+5}$의 값을 구하시오. (단, $a>0$)

(길잡이 예제6) 지수법칙과 곱셈공식의 응용

(1) $x=2^{\frac{1}{3}}+2^{-\frac{1}{3}}$일 때, x^3-3x의 값을 구하시오.

(2) $x=\dfrac{3^{\frac{1}{n}}+3^{-\frac{1}{n}}}{2}$일 때, $(x+\sqrt{x^2-1})^n$의 값을 구하시오.

[풀이] (1) $x=2^{\frac{1}{3}}+2^{-\frac{1}{3}}$의 양변을 세제곱하면

$$x^3=(2^{\frac{1}{3}})^3+3\times(2^{\frac{1}{3}})^2\times 2^{-\frac{1}{3}}+3\times 2^{\frac{1}{3}}\times(2^{-\frac{1}{3}})^2+(2^{-\frac{1}{3}})^3$$

$$=2+3\times 2^{\frac{2}{3}-\frac{1}{3}}+3\times 2^{\frac{1}{3}-\frac{2}{3}}+2^{-1}$$

$$=2+3\times 2^{\frac{1}{3}}+3\times 2^{-\frac{1}{3}}+\frac{1}{2}$$

$$=2+3(2^{\frac{1}{3}}+2^{-\frac{1}{3}})+\frac{1}{2}$$

$$=2+\frac{1}{2}+3x$$

$$\therefore\ x^3-3x=(2+\frac{1}{2}+3x)-3x=\frac{5}{2}$$

(2) $x=\dfrac{3^{\frac{1}{n}}+3^{-\frac{1}{n}}}{2}$의 양변을 제곱하면

$$x^2=\frac{(3^{\frac{1}{n}})^2+2\times 3^{\frac{1}{n}}\times 3^{-\frac{1}{n}}+(3^{-\frac{1}{n}})^2}{4}=\frac{(3^{\frac{1}{n}})^2+(3^{-\frac{1}{n}})^2+2}{4}$$ 에서 1을 빼면

$$x^2-1=\frac{(3^{\frac{1}{n}})^2+(3^{-\frac{1}{n}})^2+2}{4}-1$$

$$=\frac{(3^{\frac{1}{n}})^2+(3^{-\frac{1}{n}})^2+2}{4}-\frac{4}{4}$$

$$=\frac{(3^{\frac{1}{n}})^2+(3^{-\frac{1}{n}})^2-2}{4}$$

$$=\frac{(3^{\frac{1}{n}}-3^{-\frac{1}{n}})^2}{4}$$ 이 된다.

주어진 식에 대입하면

$$(x+\sqrt{x^2-1})^n=\left(\frac{3^{\frac{1}{n}}+3^{-\frac{1}{n}}}{2}+\sqrt{\frac{(3^{\frac{1}{n}}-3^{-\frac{1}{n}})^2}{4}}\right)^n$$

$$\left(\frac{3^{\frac{1}{n}}+3^{-\frac{1}{n}}}{2}+\frac{3^{\frac{1}{n}}-3^{-\frac{1}{n}}}{2}\right)^n=(2\times\frac{3^{\frac{1}{n}}}{2})^n=(3^{\frac{1}{n}})^n$$

(개념 길잡이) 지수가 $\frac{1}{3}$이기 때문에 세제곱을 하는 형태이고, 세제곱하면 다시 x가 등장하는 꼴입니다. 이러한 형태는 익숙하게 해 두면 좋습니다. 비슷한 예로 $x=2^{\frac{1}{2}}+2^{-\frac{1}{2}}$일 때, $\sqrt{x^2-4}$를 구하는 꼴이 나옵니다.

제곱을 하게 되면 $x^2=2+2^{-1}+2\times 2^{\frac{1}{2}}\times 2^{-\frac{1}{2}}$이고 여기서 4를 빼게 된다면 합의 제곱에서 곱의 4를 빼는 효과가 나타나므로 $\sqrt{x^2-4}=2^{\frac{1}{2}}-2^{-\frac{1}{2}}$ 즉, 차의 제곱이 됩니다.

위의 문제 (2) 에서 $x=\dfrac{3^{\frac{1}{n}}+3^{-\frac{1}{n}}}{2}$를 이용하여 $\sqrt{x^2-1}$의 값을 구하는 것도 같은 유형입니다. 이 문제에서는 분모에 2가 있기 때문에 1만 빼더라도 같은 방식으로 합의 제곱이 차의 제곱으로 바뀜을 알 수 있습니다.

(개념Check)7. $x=\frac{1}{2}(a^{\frac{1}{3}}-a^{-\frac{1}{3}})$일 때, $(x+\sqrt{x^2+1})^3$의 값을 a를 이용하여 나타내시오. (단, $a>0$)

(개념check)8. $\dfrac{3}{2^{-5}+1}+\dfrac{3}{2^{-4}+1}+\cdots+\dfrac{3}{2^{0}+1}+\cdots+\dfrac{3}{2^{4}+1}+\dfrac{3}{2^{5}+1}$의 값을 구하시오.

(길잡이 예제7) a^x와 a^{-x}를 포함한 식의 계산

(1) 실수 x에 대하여 $a^{2x}=2$일 때, $\dfrac{a^{3x}-a^{-3x}}{a^x-a^{-x}}$의 값을 구하시오.

(2) 실수 x에 대하여 $2^{2x}=2^{x+2}+5$를 만족할 때, $\dfrac{2^{3x}-2^{-3x}+2}{2^x+2^{-x}+1}$의 값을 구하시오.

[풀이] (1)
$$\begin{aligned}\frac{a^{3x}-a^{-3x}}{a^x-a^{-x}} &= \frac{a^x(a^{3x}-a^{-3x})}{a^x(a^x-a^{-x})}\\ &= \frac{a^{4x}-a^{-2x}}{a^{2x}-1}\\ &= \frac{(a^{2x})^2-(a^{2x})^{-1}}{a^{2x}-1}\\ &= \frac{2^2-2^{-1}}{2-1}=\frac{\frac{7}{2}}{1}=\frac{7}{2}\end{aligned}$$

(2) $2^{2x}=2^{x+2}+5$에서 $2^x=t$로 치환하고 넘겨서 정리하면

$t^2-4t-5=0$ $(t>0)$이 된다.

이 때 $(t+1)(t-5)=0$로 인수분해 되면 $t=-1$ 또는 5가 되지만 치환된 t의 범위에 따라 $t=5$가 되고, $2^x=5$가 된다.

따라서 $\dfrac{2^{2x}-2^{-2x}+2}{2^x+2^{-x}+1}=\dfrac{5^2-5^{-2}+2}{5+5^{-1}+1}=\dfrac{25-\frac{1}{25}+2}{5+\frac{1}{5}+1}=\dfrac{\frac{674}{25}}{\frac{31}{5}}=\dfrac{674}{155}$

(개념 길잡이) 주어진 조건이 a^{2x}이고 $a^x\times a^{-x}=1$이기 때문에 분모, 분자에 a^x를 곱해서 주어진 식이 원하는 방향으로 식을 바꿔서 계산합니다.

비슷한 예로 $\dfrac{a^{-2}+a^{-4}+a^{-6}+a^{-8}+a^{-10}}{a^2+a^4+a^6+a^8+a^{10}}$ 의 값을 간단히 하고자 하면 분모, 분자에 a^{12}를 곱하면 $\dfrac{a^2+a^4+a^6+a^8+a^{10}}{a^{12}(a^2+a^4+a^6+a^8+a^{10})}$으로 약분됩니다.

즉, 분모 분자를 약분하기 위해 같은 꼴로 만들거나 주어진 값을 활용할 수 있는 방향으로 식을 바꾸고자 할 때, 분모, 분자에 어떤 값을 곱해서 식을 정리합니다.

(개념Check)9 0이 아닌 두 실수 x, y에 대하여 $2^x+2^y=3-p$, $x+y=0$일 때, $(1+p\times 2^x+2^{2x})(1+p\times 2^y+2^{2y})$의 값을 구하시오. (단, p는 상수이다.)

(길잡이 예제8) 밑을 통일하여 식의 값 구하기

다음 물음에 답하시오.

(1) $4^{x}=27^{y}=\sqrt{6}$ 일 때, $\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{3y}$의 값을 구하시오.

(2) 세 실수 x, y, z에 대하여 $2^{x}=3^{y}=6^{z}$ 일 때, $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{z}$의 값을 구하시오.

[풀이] (1) $4^{x}=2^{2x}=\sqrt{6}$ 에서 $2=(\sqrt{6})^{\frac{1}{2x}}$

$27^{y}=3^{3y}=\sqrt{6}$ 에서 $3=(\sqrt{6})^{\frac{1}{xy}}$

위의 두식을 변끼리 곱하면

$6=(\sqrt{6})^{\frac{1}{2x}}\times(\sqrt{6})^{\frac{1}{3y}}=(\sqrt{6})^{\frac{1}{2x}+\frac{1}{3y}}$

$\therefore\ \dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{3y}=2$

(2) $2^{x}=3^{y}=6^{z}=k$ 라고 하면

$2^{x}=k$에서 $2=k^{\frac{1}{x}}$

$3^{y}=k$에서 $3=k^{\frac{1}{y}}$

$6^{z}=k$에서 $6=k^{\frac{1}{z}}$

$\therefore\ k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}}=k^{\frac{1}{x}}\times k^{\frac{1}{y}}\times k^{-\frac{1}{z}}=2\times 3\times\dfrac{1}{6}=1$

(개념 길잡이) 주어진 식의 값을 구하기 위해선 조건들을 식의 값으로 똑같이 바꿔주고 곱하거나 나눠서 값을 구하면 됩니다. 지수의 연산이기 때문에 주어진 식에 있는 덧셈은 지수의 곱셈으로 뺄셈은 지수의 나눗셈으로 생각하고 주어진 형태에 맞게 변형시켜 주는 것이 좋습니다. 하지만 위의 식에서 필요한 값이 지수이므로 로그단원에서는 로그를 이용하여 풀이하는 것도 편리한 방법이므로 참고했으면 합니다.

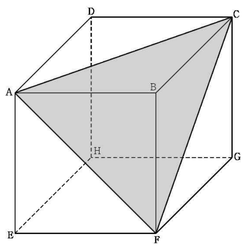
(개념Check)10. 세 실수 x, y, z에 대하여 $4^{x}=25^{-y}$, $125^{y}=20^{-z}$일 때, $\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{y}$을 z로 나타내시오. (단, $xyz\neq 0$이다.)

(개념연습)

1. 좌표평면에서 두 점 $(2,\ 0)$, $(0,\ 4)$를 지나는 직선 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$가 등식 $4^a - 2^b = 6$을 만족할 때, $4^a + 2^b$의 값을 구하시오.

2. $\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt{3}}} \times \sqrt{\dfrac{\sqrt[6]{9}}{\sqrt[12]{81}}} = \sqrt[p]{3^q}$ 일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

3. 다음 그림과 같은 정육면체 $\mathrm{ABCD-EFGH}$의 부피가 2^5일 때, 삼각형 AFC의 넓이가 $\sqrt{3} \times 2^{\frac{p}{q}}$이라고 한다. 이때 서로소인 자연수 p, q에 대하여 $p+q$의 값을 구하시오.



4. m, n이 정수일 때, $\left(\dfrac{1}{27}\right)^{\frac{1}{m}} \times \left(\dfrac{1}{64}\right)^{\frac{1}{n}}$이 자연수가 되도록 하는 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수를 구하시오.

5. 실수 x에 대하여 $3^{x+1} - 3^x = a$, $7^{x+1} + 7^x = b$일 때, 63^x을 a, b로 나타내시오.

6. 두 양의 실수 a, b에 대하여 연산 ◈을 a◈$b = \begin{cases} a^{-b} & (a < b) \\ b^{-a} & (a \geq b) \end{cases}$으로 정의할 때, 3◈($\sqrt{2}$◈8) 의 값을 구하시오.

7. $a = \sqrt[67]{3+\sqrt{2}}$ 일 때, $\dfrac{a + a^2 + a^3 + \cdots + a^{199}}{a^{-2} + a^{-3} + a^{-4} + \cdots + a^{-200}} = m + n\sqrt{2}$ 이다. 두 유리수 m, n에 대하여 $m+n$의 값을 구하시오.

8. 다음 ‖보기‖ 중 $A = \sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt[4]{b}} \times \sqrt{b}}$ 일 때, A의 값이 자연수가 되게 하는 b의 값의 개수를 구하시오.

‖ 보기 ‖

1, 2^2, 3^3, 4^4, 5^5, 6^6, 7^7, 8^8, 9^9, 10^{10}

9. 0이 아닌 세 실수 x, y, z에 대하여 $7^x = 4^y = 686^z$일 때, $\dfrac{3}{x} + \dfrac{a}{y} = \dfrac{1}{z}$을 만족시키는 실수 a 의 값을 구하시오.

(실력연습)

1. $3 \le n \le 300$인 자연수 n에 대하여 $\sqrt[18]{n}$이 어떤 자연수의 n제곱이 되도록 하는 n의 개수를 구하시오.

2. $\sqrt{\frac{n}{2}}$, $\sqrt[3]{\frac{n}{3}}$, $\sqrt[7]{\frac{n}{7}}$이 자연수가 되게 하는 실수 n의 최솟값이 $2^a 3^b 7^c$의 꼴로 나타내어질 때, $a+b+c$의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 자연수이다.)

3. $x = 3^{\frac{3}{4}}$일 때, $[x+1]+[x^{-1}+1]+\left[\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x^{-1}\right]$의 값을 구하시오.
(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수이다.)

4. $(45)^{\frac{m+1}{2}} \times (\sqrt{5})^{\frac{3m-2}{4}}$이 자연수가 되도록 하는 99이하의 자연수 m의 최댓값을 구하시오.

5. 두 자연수 a, b가 등식 $(2^a)^a + 16^a = 2^b$을 만족시킬 때, $a-b$의 값을 구하시오

(실력연습)

16. 방정식 $(4^{x}+4^{-x})-k(2^{x}+2^{-x})+11=0$이 실근을 갖지 않도록 하는 실수 k의 값의 범위 를 구하시오.

17. 부등식 $(x^{2}+x-1)^{x-2}>1$을 만족하는 해의 범위를 구하시오.

18. x에 대한 방정식 $(\log_{2}x)^{2}-\log_{2}x^{2}+a=0$의 한 근이 방정식 $4x^{2}-9x+2=0$의 두 근 사이에 존재할 때, 상수 a의 값의 범위를 구하시오.

19. 부등식 $|\log_{2}a-\log_{2}10|+\log_{2}b\le 1$을 만족시키는 두 자연수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수를 구하시오.

20. 함수 $f(x)=\dfrac{\log_{3}x+1}{\log_{27}x-1}$에 대하여 부등식 $f\left(\dfrac{a}{3}\right)\le f\left(\dfrac{3}{a}\right)$을 만족시키는 정수 a의 범위를 구하시오.(단, $a>0$이다.)

[해설 일부분]

31. (1) $y=5^x+2$에서 $5^x=y-2$, $x=\log_5(y-2)$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\log_5(x-2)$

따라서 역함수는 $y=\log_5(x-2)$

(2) $y=\log_3(x+1)-2$에서 $\log_3(x+1)=y+2$

$x+1=3^{y+2}$, $x=3^{y+2}-1$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=3^{x+2}-1$

따라서 역함수는 $y=3^{x+2}-1$

32. 주어진 수의 밑을 모두 3으로 바꾸면

$\log_{\sqrt{3}}\sqrt{2}=\log_3 2$, $\log_4 1=0=\log_3 1$, $\log_{\frac{1}{3}}0.2=-\log_3\frac{2}{10}=\log_3\frac{10}{2}=\log_3 5$

로그함수 $y=\log_3 x$는 밑이 1보다 크므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

따라서 $1<2<5$이므로 주어진 수를 작은 것부터 차례로 나열하면

$\therefore\ \log_4 1<\log_{\sqrt{3}}\sqrt{2}<\log_{\frac{1}{3}}0.2$

33. (1) 함수 $y=\log_4(x+5)-1$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

즉, 함수 $y=\log_4(x+5)-1$에서

$x=3$일 때, 최댓값은 $y=\log_4 8-1=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$

$x=-1$일 때, 최솟값은 $y=\log_4 4-1=1-1=0$

$\therefore$ 최댓값 $\frac{1}{2}$, 최솟값 0

(2) 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}(2x+1)+5$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

즉, 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}(2x+1)+5$에서

$x=0$일 때, 최댓값은 $y=\log_{\frac{1}{3}}1+5=0+5=5$

$x=4$일 때, 최솟값은 $y=\log_{\frac{1}{3}}9+5=-2+5=3$

$\therefore$ 최댓값 5, 최솟값 3

34. (1) $3^x=729=3^5$ $\quad\therefore\ x=5$

(2) $(0.2)^{x-1}=\left(\frac{2}{10}\right)^{x-1}=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1}=5^{-x+1}=5^{-1}\times 5^{\frac{1}{2}}$

$5^{-x+1}=5^{-\frac{1}{2}}$, $-x+1=-\frac{1}{2}$, $-x=-\frac{3}{2}$ $\therefore$ $x=\frac{3}{2}$

(3) $\left(\frac{1}{16}\right)^{x+2}=4^{2(x+2)}=4^{2x}\times 4^2=\left(4^{-3}\right)^x=4^{-3x}$

$4^{2x}\times 4^2=4^{-2x}\times 4^{-3x}$, $4^2=4^{-3x}$, $2=-3x$ $\therefore$ $x=-\frac{2}{3}$

(4) $7^x-\sqrt{\sqrt{7}}=0$, $7^x=\sqrt{\sqrt{7}}=\sqrt{7^{\frac{1}{2}}}=7^{\frac{1}{4}}$, $7^x=7^{\frac{1}{4}}$ $\therefore$ $x=\frac{1}{4}$

(5) $49^x-5\times 7^x+4=0$에서 $7^x=t(t>0)$치환하면

$49^x-5\times 7^x+4=7^{2x}-5\times 7^x+4=t^2-5t+4=(t-4)(t-1)=0$

$t=4$, $7^x=4$, $x=\log_7 4$

$t=1$, $7^x=1$, $x=\log_7 1=0$

따라서 $x=\log_7 4$ 또는 $x=0$

35. (1) $\log_3(x-5)=3$에서 로그의 진수 $x>5$이므로 $x-5=3^3=27$, $x=5+27=32$

$\therefore$ $x=32$

(2) $\log_{\frac{1}{2}}x=\log_2(2x-1)$에서 로그의 진수 $x>0$, $x>\frac{1}{2}$이므로

$x>\frac{1}{2}$이어야 된다.

$\log_2 x^{-1}=\log_2(2x-1)$, $\frac{1}{x}=(2x-1)$

$x(2x-1)=1$, $2x^2-x-1=0$, $(2x+1)(x-1)=0$, $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$

$\therefore$ $x=1$

(3) $\log(x+3)+\log x=1$에서 로그의 진수 $x>-3$, $x>0$이므로

$x>0$이어야 된다.

$\log(x+3)=\log 10-\log x=\log\frac{10}{x}$, $x+3=\frac{10}{x}$, $x^2+3x=10$

$x^2+3x-10=0$, $(x+5)(x-2)=0$, $x=-5$ 또는 $x=2$

$\therefore$ $x=2$

(4) $(\log_5 x)^2-\log_5 x^4+3=0$에서 $\log_5 x=t$로 치환하면

$t^2-4t+3=0$, $(t-3)(t-1)=0$, $t=3$ 또는 $t=1$

즉, $\log_5 x=3$ 또는 $\log_5 x=1$에서 $x=125$ 또는 $x=5$

$\therefore$ $x=125$ 또는 $x=5$

36. (1) $4^{x-1}=\left(2^2\right)^{x-1}=2^{2x-2}<2^{x-3}$에서 밑이 1보다 크므로

$2x-2<x-3,\ x<-1 \qquad \therefore\ x<-1$

(2) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x+3} \geq \left(\frac{1}{25}\right)^{2x}=\left(\frac{1}{5^2}\right)^{2x}=\left(\frac{1}{5}\right)^{4x}$ 에서 밑이 1보다 작으므로

$x+3 \leq 4x,\ 3x \geq 3 \qquad \therefore\ x \geq 1$

(3) $64\times\left(\sqrt[5]{\frac{1}{8}}\right)^x=8^2\times\left(\sqrt[5]{8^{-1}}\right)^x=8^2\times 8^{-\frac{x}{5}}=8^{2+\left(-\frac{x}{5}\right)}<\left(\sqrt{\frac{1}{8}}\right)^{2x}=\left(8^{-\frac{1}{2}}\right)^{2x}=8^{-x}$

$8^{2-\frac{x}{5}}<8^{-x}$에서 밑이 1보다 크므로 $2-\frac{x}{5}<-x$

$-x+\frac{x}{5}>2,\ -\frac{4x}{5}>2,\ -\frac{2x}{5}>1,\ 2x<-5 \quad \therefore\ x<-\frac{5}{2}$

(4) $\left(\frac{1}{\sqrt{11}}\right)^{3x}=\left(\frac{1}{11^{\frac{1}{2}}}\right)^{3x}=11^{-\frac{3}{2}x} \geq 121^{\frac{1}{2}-x}=\left(11^2\right)^{\frac{1}{2}-x}=11^{1-2x}$

$11^{-\frac{3x}{2}} \geq 11^{11-2x}$ 에서 밑이 1보다 크므로 $-\frac{3}{2}x \geq 11-2x$

$2x-\frac{3}{2}x \geq 11,\ \frac{x}{2} \geq 11 \quad \therefore\ x \geq 22$

37. (1) $\log_3(x-4)<2=\log_3 9$에서 밑이 1보다 크므로 $x-4<9,\ x<13$

로그의 진수 $x-4>0$이어야 되므로 $x>4$

$\therefore\ 4<x<13$

(2) $\log_{\frac{1}{5}}(3x+1)\geq \log_{\frac{1}{5}}(2x+3)$에서 밑이 1보다 작으므로 $3x+1 \leq 2x+3$

$\therefore\ x \leq 2$

로그의 진수 $3x+1>0,\ 2x-1>0$이어야 되므로 $x>-\frac{1}{3},\ x>-\frac{3}{2}$

$\therefore\ x>-\frac{1}{3}$

따라서 공통인 범위는 $-\frac{1}{3}<x \leq 2$

(3) $\log_{\frac{1}{3}}(5x+3)<1=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}$에서 밑이 1보다 작으므로 $5x+3>\frac{1}{3}$,

$5x>\frac{1}{3}-3=-\frac{8}{3}$

$\therefore\ x>-\frac{8}{15}$

로그의 진수 $5x+3>0 \quad \therefore\ x>-\frac{3}{5}$

따라서 공통인 범위는 $x > -\frac{8}{15}$

(4) $\left(\log_{\frac{1}{3}} x\right)^2 \le 9$에서 $\log_{\frac{1}{3}} x = t$로 치환하면

$t^2 \le 9$, $t^2 - 9 \le 0$, $(t-3)(t+3) \le 0$, $-3 \le t \le 3$이다. 이때, $\log_{\frac{1}{3}} x = t$이므로

$-3 \le \log_{\frac{1}{3}} x \le 3$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} \le x \le \left(\frac{1}{3}\right)^3$, $(3^{-1})^{-3} \le x \le (3^{-1})^3$이므로

$\therefore \ \frac{1}{27} \le x \le 27$

그런데 진수의 조건 $x > 0$이므로 공통인 범위는 $0 < x < 27$

따라서 $0 < x < 27$

38. $A = \{x \mid 3^x < 9\sqrt{3}\}$, $B = \left\{x \mid \left(\frac{1}{2}\right)^x < 8\right\}$

집합 A에서 $3^x < 3^{\frac{3}{2}}$, 밑이 1보다 크므로 $x < \frac{3}{2}$

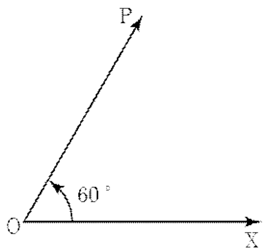
집합 B에서 $2^{-x} < 2^3$, 밑이 1보다 크므로 $-x < 3$, $x > -3$이다.

공통인 범위는 $-3 < x < \frac{3}{2}$ $\quad \therefore \ -3 < x < \frac{3}{2}$

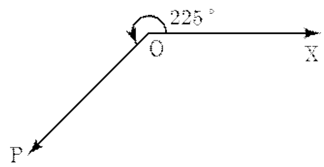
$\alpha = -3$, $\beta = \frac{3}{2}$이므로

따라서 $\alpha + \beta = -3 + \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$ $\quad \therefore \ -\frac{3}{2}$

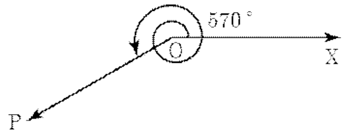
39. (1)



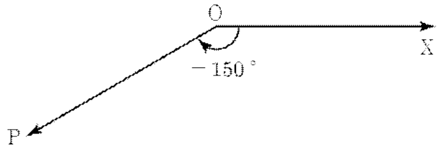
(2)



(3)



(4)



40. (1) $35^\circ = 360^\circ \times 0 + 35^\circ$, $360^\circ \times \; + 35^\circ$

(2) $800^\circ = 360^\circ \times 2 + 80^\circ$, $360^\circ \times n + 80^\circ$

(3) $-50^\circ = 360^\circ \times (-1) + 310^\circ$, $360^\circ \times n + 310^\circ$

(4) $-620^\circ = 360^\circ \times (-2) + 100^\circ$, $360^\circ \times n + 100^\circ$

41. (1) $420^\circ = 360^\circ \times 1 + 60^\circ$ 이므로 420° 는 제1사분면의 각이다.

(2) $960^\circ = 360^\circ \times 2 + 240^\circ$ 이므로 960° 는 제3사분면의 각이다.

(3) $-415^\circ = 360^\circ \times (-2) + 305^\circ$ 이므로 -415° 는 제4사분면의 각이다.

(4) $1140^\circ = 360^\circ \times 3 + 60^\circ$ 이므로 60° 는 제1사분면의 각이니다.

42. (1) $10^\circ = 10 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{18}$ (2) $315^\circ = 315 \times \frac{\pi}{180} = \frac{7}{4}\pi$

(3) $-240^\circ = 240 \times \frac{\pi}{180} = \frac{4}{3}\pi$ (4) $\frac{3}{4}\pi = \frac{3}{4}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 135^\circ$

(4) $-\frac{11}{9}\pi = \left(-\frac{11}{9}\pi\right) \times \frac{180^\circ}{\pi} = -220^\circ$

(5) $\frac{3}{5}\pi = \frac{3}{5}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 98^\circ$

43. (1) 부채꼴의 호의 길이 l은 $l = 6 \times \frac{5}{9}\pi = \frac{10}{3}\pi\,(\mathrm{cm})$

부채꼴의 넓이 S는 $S = \frac{1}{2} \times 6^2 \times \frac{5}{9}\pi = 10\pi\,(\mathrm{cm}^2)$

(2) 부채꼴의 반지름의 길이를 r라 하면 $\frac{1}{2} \times r \times 4\pi = 8\pi$

$\therefore\ r = 4$

이때 호의 길이가 4π이므로 $4\theta = 4\pi$ $\therefore\ \theta = \pi$

따라서 구하는 부채꼴의 둘레의 길이 l은

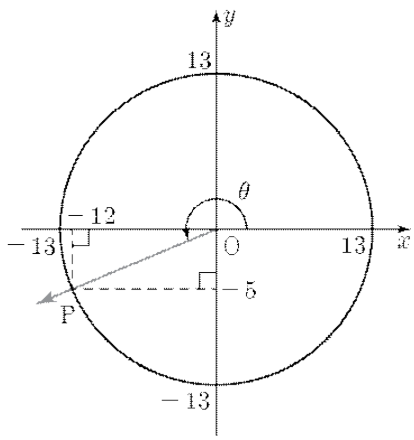
$l = 2 \times 4 + 4\pi = 8 + 4\pi$ $\therefore\ 4\pi$

(3) 부채꼴의 반지름의 길이를 r라 하면 $2\pi = r \times \frac{2}{3}\pi$

$\therefore\ r = 3$

따라서 부채꼴의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 3 \times 2\pi = 3\pi$ $\therefore\ 3\pi$

44. 다음 그림과 같이 $\overline{\mathrm{OP}} = \sqrt{(-12)^2 + (-5)^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$이므로



$\sin\theta = -\frac{5}{13}$, $\cos\theta = -\frac{12}{13}$, $\tan\theta = \frac{5}{12}$

45. (1) 반지름의 길이가 1인 단위원에서 $\theta = -\frac{5}{4}\pi$의 동경과 이 원의 교점을 P라 하면

점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\angle \mathrm{POH} = \frac{\pi}{4}$이므로

점 P의 좌표는 $\mathrm{P}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $\quad\therefore\ \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\tan\theta = -1$

(2) 반지름의 길이가 1인 단위원에서 $\theta = \frac{7}{6}\pi$의 동경과 이 원의 교점을 P라 하면

점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\angle \mathrm{POH} = \frac{\pi}{6}$이므로

점 P의 좌표는 $\mathrm{P}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ $\quad\therefore\ \sin\theta = -\frac{1}{2}$, $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

(3) $390^\circ = 360^\circ + 30^\circ$이므로 점 P의 좌표는 $\mathrm{P}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$이고

$\therefore\ \sin\theta = \frac{1}{2}$, $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

(4) $-315^\circ = 360^\circ \times (-1) + 45^\circ$이므로 점 P의 좌표는 $\mathrm{P}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$이고

$\therefore\ \sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\tan\theta = -1$

46. (1) $\sin\theta > 0$, $\cos\theta > 0$: $\sin\theta > 0$에서 제1사분면 또는 제2사분면의 각이고,

$\cos\theta > 0$에서 제1사분면 또는 제4사분면의 각이다.

$\therefore$ 제1사분면의 각이다.

(2) $\sin\theta < 0$, $\cos\theta > 0$: $\sin\theta < 0$에서 제3사분면 또는 제4사분면의 각이고,

$\cos\theta > 0$에서 제1사분면 또는 제4사분면의 각이다.

$\therefore$ 제4사분면의 각이다.

(3) $\tan\theta > 0$, $\sin\theta < 0$; $\tan\theta > 0$에서 제1사분면 또는 제3사분면의 각이고,

$\sin\theta < 0$에서 제3사분면 또는 제4사분면의 각이다.

$\therefore$ 제3사분면의 각이다.

(4) $\sin\theta\tan\theta > 0$: $\sin\theta > 0$, $\tan\theta > 0$ 또는 $\sin\theta < 0$, $\tan\theta < 0$일 때 이므로

$\sin\theta > 0$, $\tan\theta > 0$에서 $\sin\theta > 0$은 제1사분면 또는 제2사분면의 각이고, $\tan\theta > 0$에서 제1사분면 또는 제3사분면의 각이다.

따라서 제1사분면의 각이다.

$\sin\theta < 0$, $\tan\theta < 0$에서 $\sin\theta < 0$에서 제3사분면 또는 제4사분면의 각이고, $\tan\theta < 0$에서 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.

따라서 제4사분면의 각이다.

$\therefore$ 제1사분면의 각 또는 제4사분면의 각

47. $\tan\theta = -\dfrac{4}{3}$이고 $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$이므로

$$\sin\theta = \frac{4}{5},\ \cos\theta = -\frac{3}{5},\ \frac{5\sin\theta+1}{5\cos\theta+2} = \frac{5\times\left(\frac{4}{5}\right)+1}{5\times\left(-\frac{3}{5}\right)+2} = \frac{4+1}{(-3)+2} = -5$$

$$\therefore\ \frac{5\sin\theta+1}{5\cos\theta+2} = -5$$

48. (1) $\sin\theta - \cos\theta = -\dfrac{2}{3}$의 양변을 제곱하여 정리하면

$$\sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = 1 - 2\sin\theta\cos\theta = \frac{4}{9},\ 2\sin\theta\cos\theta = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

$$\therefore\ \sin\theta\cos\theta = \frac{5}{18}$$

(2) $\dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta} + \dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta} = \dfrac{\sin^3\theta + \cos^3\theta}{\cos\theta\sin\theta} = \dfrac{(\sin\theta+\cos\theta)^3 - 3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)}{\cos\theta\sin\theta}$

$$\frac{(\sin\theta+\cos\theta)^3-3\sin\theta\cos\theta\,(\sin\theta+\cos\theta)}{\cos\theta\sin\theta}=\frac{\left(-\dfrac{2}{3}\right)^3-3\times\dfrac{5}{18}\times\left(-\dfrac{2}{3}\right)}{\dfrac{5}{18}}=\frac{-\dfrac{8}{27}+\dfrac{5}{9}}{\dfrac{5}{18}}$$

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}=\frac{-\dfrac{8}{27}+\dfrac{5}{9}}{\dfrac{5}{18}}=\frac{\dfrac{-8+15}{27}}{\dfrac{5}{18}}=\frac{\dfrac{7}{27}}{\dfrac{5}{18}}=\frac{14}{15}$$