랑데뷰 수학

고교 수학의 모든 것 - 랑데뷰 세미나

세미나 목차

세미나(3)-조립제법의 고찰

조립제법은 제수가 이차식 이상일 때도 사용할 수 있다.

예를 들어 $(ax^3+bx^2+cx+d)\div(x^2+px-q)$

을 조립제법을 이용하여 구할 때 표의 왼쪽에 오는 수는

$x^2+px-q=0$에서 $x^2=q-px$의 우변의 상수항과 계수들을 세로로 나열시킨 뒤 맨 아랫줄의 수들과 곱한 수는 같은 줄에 오도록 한다.

	a	b	c	d
q			aq	$-apq+bq$
$-p$		$-ap$	ap^2-bp	
	a	$b-ap$	$c+aq+ap^2-bp$	$d-apq+bq$

[관련 문제]

다항식 x^3+ax^2+bx+4가 $(x-1)^2$으로 나누어 떨어질 때, 상수 a, b을 구하여라.

일반 풀이

주어진 다항식을 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$x^3+ax^2+bx+4=(x-1)^2Q(x)$ …… ㉠

양변에 $x=1$을 대입하면

$1+a+b+4=0$ $\therefore b=-a-5$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$x^3+ax^2-ax-5x+4=(x-1)^2Q(x)$

$(x-1)\{x^2+(a+1)x-4\}=(x-1)^2Q(x)$

양변을 $x-1$로 나누면

$x^2+(a+1)x-4=(x-1)Q(x)$

양변에 $x=1$을 대입하면

$1+a+1-4=0$

$\therefore a=2$ …… ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $b=-7$

랑데뷰 풀이

	1	a	b	4
-1			-1	$-a-2$
2		2	$2a+4$	
	1	$a+2$	$2a+b+3$	$-a+2$

$2a+b+3=0$, $-a+2=0$

$a=2$, $b=-7$

세미나(33)-티투의 정리

코시 엥겔폼 (Titu's Lemma)

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}\geq\frac{(x+y)^2}{a+b},\quad \frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}\geq\frac{(x+y+z)^2}{a+b+c}$$

(단, $a>0,\ b>0,\ c>0$)

[관련 문제] ① 양수 $a,\ b,\ c$가 $a+b+c=6$을 만족할 때, $\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}$ 의 최솟값을 구하여라.

② 양의 실수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $\frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{c}$ 의 최솟값을 구하여라.

일반 풀이

① 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}\right)\geq(1+2+3)^2$$

$$6\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}\right)\geq 36 \qquad \therefore \frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}\geq 6$$

② $\frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{c}$

$$=\left(1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{a}{b}+1+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+1\right)$$

$$=3+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{c}$$

$a>0,\ b>0, c>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geq 2\sqrt{\frac{b}{a}\times\frac{a}{b}}=2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

(단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

$$\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\geq 2\sqrt{\frac{c}{a}\times\frac{a}{c}}=2 \quad \cdots\cdots ㉡$$

(단, 등호는 $c=a$일 때 성립)

$$\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\geq 2\sqrt{\frac{c}{b}\times\frac{b}{c}}=2 \quad \cdots\cdots ㉢$$

(단, 등호는 $b=c$일 때 성립)

㉠+ ㉡+ ㉢을 하면

$$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\geq 6$$

(단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 $3+6=9$

랑데뷰 풀이

① 코시 엥겔폼에서

$$\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}=\frac{1^2}{a}+\frac{2^2}{b}+\frac{3^2}{c}\geq\frac{(1+2+3)^2}{a+b+c}=6$$

② 코시 엥겔폼에서

$$\frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{c}$$

$$=\frac{(\sqrt{a+b+c})^2}{a}+\frac{(\sqrt{a+b+c})^2}{b}+\frac{(\sqrt{a+b+c})^2}{c}$$

$$\geq\frac{(3\sqrt{a+b+c})^2}{a+b+c}=9$$

증명

코시 부등식

$$\{(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2+(\sqrt{c})^2\}\left\{\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{b}}\right)^2+\left(\frac{z}{\sqrt{c}}\right)^2\right\}$$

$\geq(x+y+z)^2$ 에서 양변을 $(a+b+c)$로 나누면

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}\geq\frac{(x+y+z)^2}{a+b+c}$$

세미나(41)-항등함수의 개수-1

$$n(A)=n,\ f:\ A\to A$$

$f(f(x))=x$을 만족하는 함수의 개수를 a_n이라 할 때

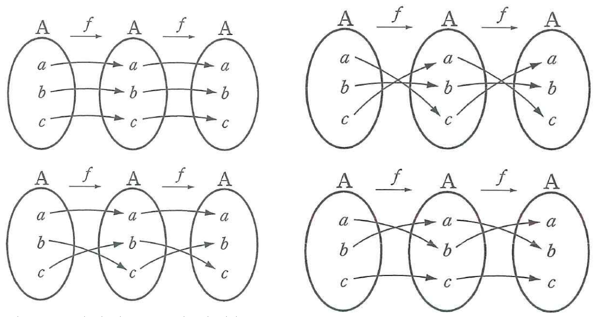
$$a_n=a_{n-1}+(n-1)a_{n-2},\ a_1=1,\ a_2=2,\ n\geq 2$$

[관련 문제] ① 집합 $\mathrm{A}=\{a, b, c\}$에 대하여 $f\circ f$가 항등함수가 되는 함수 $f:\mathrm{A}\to\mathrm{A}$의 개수를 구하여라. (단, a, b, c는 서로 다르다.)

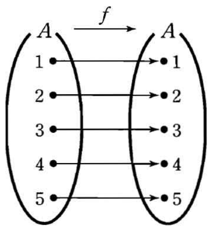
② 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$의 임의의 원소 x에 대하여 $(f\circ f)(x)=x$를 만족하는 함수 $f:\ A\to A$의 개수를 구하여라.

일반 풀이

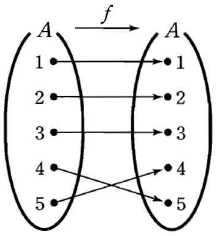
① 다음 4개다.



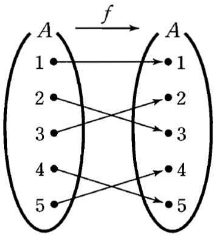
② $(f\circ f)(x)\equiv f(f(x))=x$를 만족하는 함수 f는 일대일 대응이므로 다음과 같이 세 가지 경우가 있다.



(i) $f(a)=a$ 꼴일 때, 오른쪽 그림과 같이 함수 f의 개수는 1이다.



(ii) $f(a)=a,\ f(b)=b,\ f(c)=c,$ $f(d)=e,\ f(e)=d$꼴일 때, 오른쪽 그림과 같이 함수 f의 개수는 5개의 원소 1, 2, 3, 4, 5 중에서 $f(d)=e,\ f(e)=d$를 만족하는 d와 e를 선택하는 경우의 수와 같으므로 ${}_5\mathrm{C}_2=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$ (개)



(iii) $f(a)=a,\ f(b)=c,\ f(c)=b,$ $f(d)=e,\ f(e)=d$꼴일 때, 오른쪽 그림과 같이 함수 f의 개수는 5개의 원소 1, 2, 3, 4, 5 중에서 $f(b)=c,\ f(c)=b$를 만족하는 b와 c를 선택하고, $f(d)=e,\ f(e)=d$를 만족하는 d와 e를 선택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_5\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_2\times{}_1\mathrm{C}_1\times\frac{1}{2!}=\frac{5\times4}{2\times1}\times3\times1\times\frac{1}{2}=15\ (\text{개})$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 함수 f의 개수는

$1+10+15=26$ (개)

랑데뷰 풀이

① $a_n=a_{n-1}+(n-1)a_{n-2},\ a_1=1,\ a_2=2$에서

$a_3=a_2+2\cdot a_1=2+2\times1=4$

② $a_n=a_{n-1}+(n-1)a_{n-2},\ a_1=1,\ a_2=2$

$a_3=a_2+2\cdot a_1=2+2\times1=4$

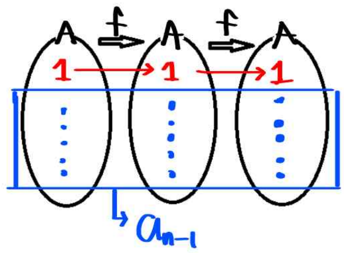
$a_4=a_3+3\cdot a_2=4+3\times2=10$ 에서

$a_5=a_4+4\cdot a_3=10+4\times4=26$

설명 $A=\{1, 2, 3, \cdots, n\}$일 때 a_n은 다음과 같은 두 가지 경우로 나눌 수 있다.

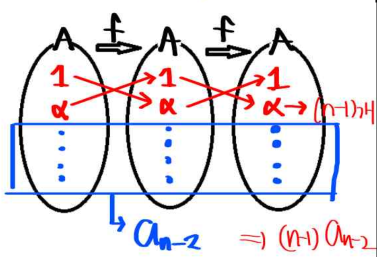
(i) $f(1)=1$인 경우

그림과 같이 $1\to1\to1$이면 남아있는 원소 $n-1$개가 $f(f(x))=x$를 만족하는 함수의 개수는 a_{n-1}이라 할 수 있다.



(ii) $f(1)\neq1$인 경우

$1\to\alpha\to1,\ \alpha\to1\to\alpha$이면 남아있는 원소 $n-2$개가 $f(f(x))=x$를 만족하는 함수의 개수는 a_{n-2}이라 할 수 있다. 이때 α가 될 수 있는 수가 1을 제외한 $n-1$개 이다. 따라서 $(n-1)a_{n-2}$



(i),(ii)에서 $a_n=a_{n-1}+(n-1)a_{n-2}$

세미나(53)-분수함수 표준형 고치기 팁

$\mathrm{A}(x)=cx+d$라 할 때, $\mathrm{A}\left(-\dfrac{b}{a}\right)$

$$\Uparrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$y=\frac{cx+d}{ax+b} \Rightarrow y=\frac{\boxed{}}{ax+b}+\boxed{\frac{c}{a}}$$

$$y=\frac{cx+d}{ax+b} \Rightarrow y=\frac{p}{ax+b}+q \text{ 에서 } q=\frac{c}{a},\ p=c\left(-\frac{b}{a}\right)+d$$

$$y=\frac{cx+d}{ax+b}=\frac{\frac{c}{a}(ax+b)-\frac{bc}{a}+d}{ax+b}=\frac{-\frac{bc}{a}+d}{ax+b}+\frac{c}{a}=\frac{p}{ax+b}+q$$

의 과정에서 $p=-\dfrac{bc}{a}$, $q=\dfrac{c}{a}$을 확인할 수 있다.

그런데 분수함수의 일반형을 표준형으로 고칠 때 마다 이런 과정을 거치기에는 번거롭고 p와 q의 값을 공식으로 외워두기도 외울 공식의 중요도에 비해 복잡하여 비효율적이다.

따라서 다음과 같은 방법으로 빠르고 정확하게 변형해 보자.

우선 일차식 $ax+b$와 $cx+d$에서 x가 커질수록 상수항인 b, d는 무시할 만한 값이 되므로

$y=\dfrac{cx}{ax}=\dfrac{c}{a}$가 된다. 즉, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{cx+d}{ax+b}=\frac{c}{a}$에서 $y=\dfrac{cx+d}{ax+b}$의 점근선은 $y=\dfrac{c}{a}$이다.

따라서 $y=\dfrac{cx+d}{ax+b}=\dfrac{\mathrm{A}}{ax+b}+\dfrac{c}{a}$로 변형 된다.

여기서 A를 구할 때 다음과 같은 방법을 이용하자.

① $\dfrac{cx+d}{ax+b}=\dfrac{\mathrm{A}}{ax+b}+\dfrac{c}{a}$의 양변에 $ax+b$를 곱하면 $cx+d=\mathrm{A}+\dfrac{c}{a}(ax+b)$

양변에 $x=-\dfrac{b}{a}$를 대입하면 $c\left(-\dfrac{b}{a}\right)+d=\mathrm{A}+\dfrac{c}{a}\times 0$

따라서 $\mathrm{A}=c\left(-\dfrac{c}{a}\right)+b$이다.

② 헤비사이드의 부분분수 분해법의 인수 가리기와 같은 방법으로 생각하자.

$y=\dfrac{cx+d}{ax+b}$을 일반형으로 분리 할 때 기본적으로 $y=\dfrac{\boxed{}}{ax+b}+\dfrac{c}{a}$꼴이 되고 $\boxed{}$ 안에 들어갈 수는 분모식을 0이 되게하는 값인 $x=-\dfrac{b}{a}$(점근선)을 분모식을 가린채 분자식에만 대입하면 $\boxed{}=c\left(-\dfrac{b}{a}\right)+d$ 이다.

세미나(58)-헤론의 확장

사각형의 넓이-브라마굽타 공식

$$S=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

(단, 원에 내접하는 사각형 ABCD, $s=\dfrac{a+b+c+d}{2}$)

브라마굽타 공식에서 $d=0$인 경우가 헤론의 공식이다. $S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

[관련 문제] 그림과 같이 원에 내접하는 사각형 $ABCD$에서 $\overline{AB}=4$, $\overline{BC}=6$, $\overline{CD}=2$, $\overline{DA}=2$일 때, 사각형 $ABCD$의 넓이를 구하여라.

일반 풀이

$\overline{AC}=k$라 하면 $\triangle ABC$에서

$k^2=16+36-2\times24\times\cos B\cdots$ ㉠

또, $\triangle ADC$에서 $k^2=4+4-2\times4\times\cos D\ \cdots$ ㉡

$\angle B+\angle D=\pi$이므로

$\cos B=\cos(\pi-D)=-\cos D$를

㉠,㉡에 대입하여 정리하면

$52-48\cos B=8+8\cos B \Rightarrow 56\cos B=44$

$\therefore\ \cos B=\dfrac{44}{56}=\dfrac{11}{14}$

$\angle ABC$는 제 1사분면의 각이므로

$\sin B=\sqrt{1-\dfrac{121}{196}}=\dfrac{5\sqrt{3}}{14}=\sin D$

따라서 사각형의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times4\times6\times\dfrac{5\sqrt{3}}{14}+\dfrac{1}{2}\times2\times2\times\dfrac{5\sqrt{3}}{14}$

$=\dfrac{30\sqrt{3}}{7}+\dfrac{5\sqrt{3}}{7}=\dfrac{35\sqrt{3}}{7}=5\sqrt{3}$

랑데뷰 풀이

$\overline{AB}=4$, $\overline{BC}=6$, $\overline{CD}=2$, $\overline{DA}=2$이므로

$s=\dfrac{4+6+2+2}{2}=7$

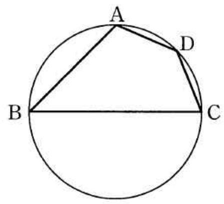
따라서

$S=\sqrt{(7-6)\times(7-4)\times(7-2)\times(7-2)}$

$=\sqrt{1\times3\times5^2}=5\sqrt{3}$

설명

다음 그림과 같이 내접 사각형 ABCD에서 $\angle B+\angle D=180^\circ$이다. 삼각형 ABC와 ACD에 코사인 법칙을 적용하면 각각



$\overline{AC}^2=a^2+b^2-2ab\cos B$

$\overline{AC}^2=c^2+d^2-2cd\cos D$

$=c^2+d^2+2cd\cos B$이고

두 식을 연립하면

$2(ab+cd)\cos B=a^2+b^2-c^2-d^2\cdots$㉠을 얻는다.

사각형 ABCD의 넓이는 삼각형 ABC와 ACD의 넓이의 합이므로

$2(ab+cd)\cos B=a^2+b^2-c^2-d^2$

$S=\dfrac{1}{2}ab\sin B+\dfrac{1}{2}cd\sin D=\dfrac{1}{2}(ab+cd)\sin B$

$S^2=\dfrac{1}{4}(ab+cd)^2\sin^2 B$

$=\dfrac{1}{4}(ab+cd)^2-\dfrac{1}{4}(ab+cd)^2\cos^2 B$

$=\dfrac{1}{4}(ab+cd)^2-\dfrac{1}{16}(a^2+b^2-c^2-d^2)^2$ ($\because$ ㉠)

양변에 $\times16$을 곱하고 정리하면

$16S^2=(2ab+2cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2$

$=(2ab+2cd+a^2+b^2-c^2-d^2)(2ab+2cd-a^2-b^2+c^2+d^2)$

$=\{(a+b)^2-(c-d)^2\}\{(c+d)^2-(a-b)^2\}$

$=(a+b-c+d)(a+b+c-d)(c+d-a+b)(c+d+a-b)$

$=2(s-c)\times2(s-d)\times2(s-a)\times2(s-b)$

$=16(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)$

브레치나이더 공식-브라마굽타 공식의 일반화

사각형이 원에 내접하지 않는 경우

$$S=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-abcd\cos^2\dfrac{A+C}{2}}$$

세미나(73)-평균값 정리

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h)$$일 때

$$\lim_{h\to0}\theta=\frac{1}{2}$$

(단, $a>0, 0<\theta<1$, $f'(a)$존재 및 $f''(a)\neq0$)

[관련 문제]

함수 $f(x)=\sqrt{x}$ 에 대하여 상수 θ $(0<\theta<1)$가 $f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h)$ 를 만족할 때, $\lim_{h\to0}\theta$ 의 값을 구하여라. (단, $a>0$, $h>0$)

일반 풀이

$f(x)=\sqrt{x}$ 에서 $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h)$에서

$$\sqrt{a+h}=\sqrt{a}+h\cdot\frac{1}{2\sqrt{a+\theta h}}$$

$$2\sqrt{a+\theta h}=\frac{h}{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}$$

$$2\sqrt{a+\theta h}=\frac{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}{(a+h)-a}$$

$2\sqrt{a+\theta h}=\sqrt{a+h}+\sqrt{a}$ 양변을 제곱하면

$$4(a+\theta h)=a+h+2\sqrt{a(a+h)}+a$$

$$4\theta h=h-2a+2\sqrt{a^2+ah}$$

$$\therefore\ \theta=\frac{h-2(a-\sqrt{a^2+ah})}{4h}$$

$$\therefore\ \lim_{h\to0}\theta=\lim_{h\to0}\frac{h-2(a-\sqrt{a^2+ah})}{4h}$$

$$=\lim_{h\to0}\left(\frac{h}{4h}-\frac{a-\sqrt{a^2+ah}}{2h}\right)$$

$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{1}{4}-\frac{a^2-(a^2+ah)}{2h(a+\sqrt{a^2+ah})}\right\}$$

$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{1}{4}+\frac{a}{2(a+\sqrt{a^2+ah})}\right\}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

랑데뷰 풀이

그냥 정답은 $\dfrac{1}{2}$

설명

테일러 급수

a를 포함하는 구간에서 무한 번 미분 가능한 함수 $f(x)$에 대하여

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\cdots\ \cdots①$$

이 성립한다.

①식의 x에 $a+h$를 대입하면

$$f(a+h)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}h+\frac{f''(a)}{2!}h^2+\frac{f'''(a)}{3!}h^3+\cdots\cdots②$$

①식의 양변을 미분하면

$$f'(x)=f'(a)+\frac{f''(a)}{1!}(x-a)+\frac{f'''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots\ \cdots③$$

③식의 x에 $a+\theta h$를 대입하면

$f'(a+\theta h)=f'(a)+\dfrac{f''(a)}{1!}(\theta h)+\dfrac{f'''(a)}{2!}(\theta h)^2+\cdots$ 이고

양변에 h를 곱하고 $f(a)$를 더하면

$$f(a)+hf'(a+\theta h)$$

$$=f(a)+f'(a)h+\frac{f''(a)}{1!}\theta h^2+\frac{f'''(a)}{2!}\theta^2h^3+\cdots\ \cdots④$$

$f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h)$ 이므로 식②,④의 우변을 비교해서 소거하여 나타내면

$$\frac{f''(a)}{2!}h^2+\frac{f'''(a)}{3!}h^3+\cdots=\frac{f''(a)}{1!}\theta h^2+\frac{f'''(a)}{2!}\theta^2h^3+\cdots$$

$$\frac{f''(a)}{2!}+\frac{f'''(a)}{3!}h+\cdots=\frac{f''(a)}{1!}\theta+\frac{f'''(a)}{2!}\theta^2h+\cdots$$

에서 $h\to0$이므로 $\dfrac{f''(a)}{2!}=\dfrac{f''(a)}{1!}\theta$ $\quad\therefore\ \theta=\dfrac{1}{2}$

세미나(83)-삼차함수의 극대와 극소의 차

극값을 갖는 삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$의

극댓값과 극솟값의 차= $\dfrac{|a|}{2}(\beta-\alpha)^3$

(단, $f'(x)=0$의 두 근이 α, β이고 $\alpha<\beta$)

[관련 문제]

함수 $f(x)=-x^3-\dfrac{3}{2}ax^2+6a^2x$ 의 극댓값과 극솟값의 차가 $\dfrac{1}{2}$일 때, 양수 a의 값을 구하여라.

일반 풀이

$f(x)=-x^3-\dfrac{3}{2}ax^2+6a^2x$에서

$f'(x)=-3x^2-3ax+6a^2=-3(x+2a)(x-a)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2a$또는 $x=a$

x	$\cdots$	$-2a$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$-10a^3$	↗	$\dfrac{7}{2}a^3$	↘

$a>0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=-2a$에서 극솟값 $-10a^3$을 갖고, $x=a$에서 극댓값 $\dfrac{7}{2}a^3$을 갖는다.

이때 극댓값과 극솟값의 차가 $\dfrac{1}{2}$이므로

$\dfrac{7}{2}a^3-(-10a^3)=\dfrac{1}{2}$, $a^3=\dfrac{1}{27}$

$\therefore a=\dfrac{1}{3}$

랑데뷰 풀이

$f'(x)=-3x^2-3ax+6a^2=-3(x-a)(x+2a)$

에서 $f'(x)=0$의 해가 $-2a$, a이므로

$\dfrac{1}{2}\{a-(-2a)\}^3=\dfrac{1}{2}$ 에서

$a^3=\dfrac{1}{27}$ $\quad\therefore a=\dfrac{1}{3}$

설명

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

$f'(x)=3ax^2+2bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면 $f'(x)=3a(x-\alpha)(x-\beta)$이다. 따라서

$|f(\beta)-f(\alpha)|$

$=\left|\displaystyle\int_\alpha^\beta f'(x)dx\right|=\left|3a\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx\right|$

$=|3a|\dfrac{(\beta-\alpha)^3}{6}=\dfrac{|a|}{2}(\beta-\alpha)^3$

세미나(108)-바이어슈트라스 치환

$\tan\dfrac{x}{2}=t$ 일 때 t에 대한 삼각함수의 값의 활용

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \tan x=\frac{2t}{1-t^2}$$

[관련 문제] ① 부정적분 $\displaystyle\int\frac{1}{\sin x}dx$를 구하여라.

② 실수 x에 대하여 $\dfrac{\sin x+1}{-\cos x-3}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하여라.

일반 풀이

① 준식

$$=\int\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}dx=\int\frac{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{2\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}dx$$

$$=\int\frac{\sec^2\frac{x}{2}}{2\tan\frac{x}{2}}dx$$

이때 $\tan\dfrac{x}{2}=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{2}\sec^2\dfrac{x}{2}$ 이므로

$$\int\frac{\sec^2\frac{x}{2}}{2\tan\frac{x}{2}}dx=\int\frac{1}{t}dt=\ln|t|+C=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$$

② $\cos x=s$, $\sin x=t$로 놓으면

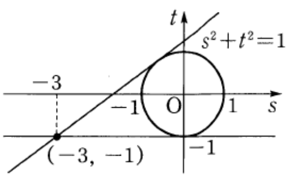
$-1\le s\le 1$, $-1\le t\le 1$, $s^2+t^2=1$

$\dfrac{\sin x+1}{-\cos x-3}=\dfrac{t+1}{-s-3}=k$ (k는 정수)로 놓으면

$t+1=-(s+3)k$

$\therefore t=-k(s+3)-1\cdots$ ㉠

직선 ㉠은 기울기가 $-k$이고 점 $(-3,\ -1)$을 지나는 직선이다.



오른쪽 그림에서 직선 $y=-k(s+3)-1$, 즉, $ks+t+3k+1=0$과 원 $s^2+t^2=1$이 접할 때, $-k$가 최댓값과 최솟값을 가지므로 $\dfrac{|3k+1|}{\sqrt{k^2+1}}=1$ $|3k+1|=\sqrt{k^2+1}$,

$4k^2+3k=0$ $k(4k+3)=0$

$\therefore$ $k=0$ 또는 $k=-\dfrac{3}{4}$ $\quad\therefore M+m=-\dfrac{3}{4}$

랑데뷰 풀이

① $\tan\dfrac{x}{2}=t$라 두고 양변 미분하면 $\dfrac{1}{2}\sec^2\dfrac{x}{2}dx=dt$에서

$dx=\dfrac{2}{1+t^2}dt$

$$\int\frac{1}{\sin x}dx=\int\frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dt=\int\frac{1}{t}dt$$

$$=\ln|t|+C=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$$

② $\tan\dfrac{x}{2}=t$라 두면

$$\frac{\sin x+1}{-\cos x-3}=\frac{\frac{2t}{1+t^2}+1}{-\frac{1-t^2}{1+t^2}-3}=\frac{\frac{2t+(1+t^2)}{1+t^2}}{\frac{-1+t^2-3(1+t^2)}{1+t^2}}=\frac{t^2+2t+1}{-2t^2-4}$$

$\dfrac{t^2+2t+1}{-2t^2-4}=k$라 두고 정리하면

t가 실수이므로 $(2k+1)t^2+2t+4k+1=0$ 이 실근을 가지므로 $1-(2k+1)(4k+1)\ge 0$ 에서 $-\dfrac{3}{4}\le k\le 0$

$\therefore M+m=-\dfrac{3}{4}$

설명 $\tan\dfrac{x}{2}=t$일 때 t에 대한 삼각함수의 값

(1) $\sin x=2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}=2\tan\dfrac{x}{2}\cos^2\dfrac{x}{2}$

$$=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}}=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}$$

(2) $\cos x=\cos^2\dfrac{x}{2}-\sin^2\dfrac{x}{2}=\cos^2\dfrac{x}{2}\left(1-\tan^2\dfrac{x}{2}\right)$

$$=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

(3) $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}=\dfrac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\dfrac{2t}{1-t^2}$

세미나(120)-매클로린 급수의 두 번째 항 이용

$\sin x \fallingdotseq x-\frac{1}{6}x^3$, $1-\cos x \fallingdotseq \frac{1}{2}x^2-\frac{1}{24}x^4$, $\tan x \fallingdotseq x+\frac{1}{3}x^3$, $e^x-1 \fallingdotseq x+\frac{1}{2}x^2$, $\ln(1+x) \fallingdotseq x-\frac{1}{2}x^2$

을 이용한 초월함수의 극한값 계산

$\lim_{x\to0}\left(\frac{2}{\sin^2 x}-\frac{1}{1-\cos x}\right)$의 극한값 계산은 다음과 같다.

$$⇨\lim_{x\to0}\left(\frac{2}{\sin^2 x}-\frac{1}{1-\cos x}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{2}{\sin^2 x}-\frac{1+\cos x}{\sin^2 x}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{2}{\sin^2 x}-\frac{1+\cos x}{\sin^2 x}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x}\times\frac{1}{1+\cos x}\right)=\frac{1}{2}$$ (정답) [교육과정의 바른 계산]

이것을 $\sin x \fallingdotseq x$, $1-\cos x \fallingdotseq \frac{1}{2}x^2$을 이용하여 바로 대입하면

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{2}{\sin^2 x}-\frac{1}{1-\cos x}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{2}{x^2}-\frac{1}{\frac{1}{2}x^2}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x^2}\right)=0$$ (오답) [잘못된 풀이]

그렇다고 $\sin x \fallingdotseq x-\frac{1}{6}x^3$, $1-\cos x \fallingdotseq \frac{1}{2}x^2$을 이용하면

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{2}{\sin^2 x}-\frac{1}{1-\cos x}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{2}{\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)^2}-\frac{1}{\frac{1}{2}x^2}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{2}{x^2-\frac{1}{3}x^4+\frac{1}{36}x^6}-\frac{2}{x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2}{x^2}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{36}x^4}-1\right)=\lim_{x\to0}\frac{2}{x^2}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{36}x^4}-1\right)=\lim_{x\to0}\frac{2}{x^2}\left(\frac{\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{36}x^4}{1-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{36}x^4}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}2\times\left(\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{36}x^2}{1-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{36}x^4}\right)=\frac{2}{3}$$ (오답) [잘못된 풀이]

따라서 초월함수 극한을 계산할 때는 매틀로린 급수로 표현된 함수로 무작정 교체하면 안 되고 식을 적당히 변형한 후 계산해야 한다고 한다. 식을 적당히 변형한 후 교체하는 게 계산 상 수월한 건 맞지만 무작정 교체하면 안 되는 건 아니다. 교체한 함수의 극한이 존재하는 경우에는 그냥 교체하면 된다.
위의 교체는 잘못되었기 때문에 오답이 나오는 것이다.

바른 교체는 $\sin x \fallingdotseq x-\frac{1}{6}x^3$, $1-\cos x \fallingdotseq \frac{1}{2}x^2-\frac{1}{24}x^4$으로 함수의 근사 다음 단계까지 함께 가는 경우이다. $\lim_{x\to0}\left(\frac{2}{\sin^2 x}-\frac{1}{1-\cos x}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{2}{\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)^2}-\frac{1}{\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{24}x^4}\right)=\frac{1}{2}$(정답) [계산기 이용]⇨계산이 더 복잡할 수도 있지만 틀린 과정은 아니다.

세미나(123)-이계 도함수 문제 계산 줄이는 팁

$y=e^{px}\cos qx$ (또는 $y=e^{px}\sin qx$)에서

$ay''+by'+cy=0$이 성립한다.

$\rightarrow$ $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 $p+qi$, $p-qi$로 해석해서 풀 수 있다.

설명 : 이계 재차 선형 미분방정식 (교과外)

[검색 : 미분방정식]

[관련 문제]

함수 $y=e^{2x}\sin x$에 대하여 등식 $ay'-y''=5y$가 x의 값에 관계없이 항상 성립할 때, 상수 a의 값을 구하여라.

일반 풀이	**랑데뷰 풀이**
함수 $y=e^{2x}\sin x$에 대하여 $y'=2e^{2x}\sin x+e^{2x}\cos x=e^{2x}(2\sin x+\cos x)$ $y''=2e^{2x}(2\sin x+\cos x)+e^{2x}(2\cos x-\sin x)$ $\quad=e^{2x}(3\sin x+4\cos x)$ 이것을 $ay'-y''=5y$에 대입하면 $ae^{2x}(2\sin x+\cos x)-e^{2x}(3\sin x+4\cos x)$ $=5e^{2x}\sin x$ $2a\sin x+a\cos x-3\sin x-4\cos x=5\sin x$ $\quad(2a-8)\sin x+(a-4)\cos x=0$ 위의 식이 x의 값에 관계없이 항상 성립하므로 $\quad a=4$	$ay'-y''-5y=0$을 $y''-ay'+5=0$으로 보고 $x^2-ax+5=0$으로 해석하여 의 두 근이 $2+i$, $2-i$ 이므로 근과 계수와의 관계에서 $(2+i)+(2-i)=4=a$,

세미나(130)-같은 축에 대칭은 두함수의 합성

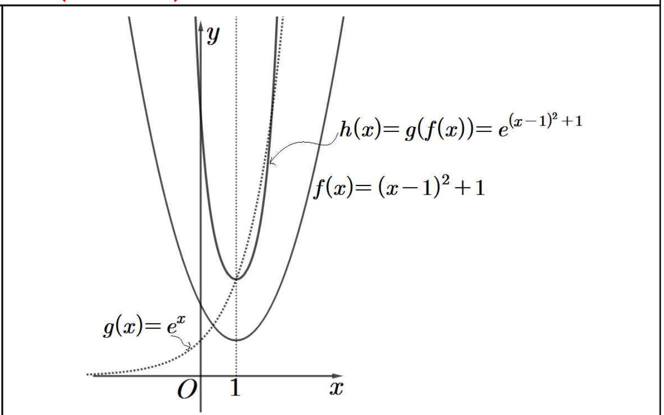
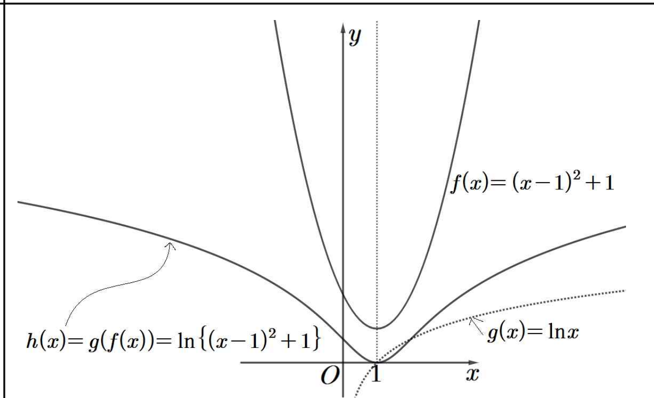
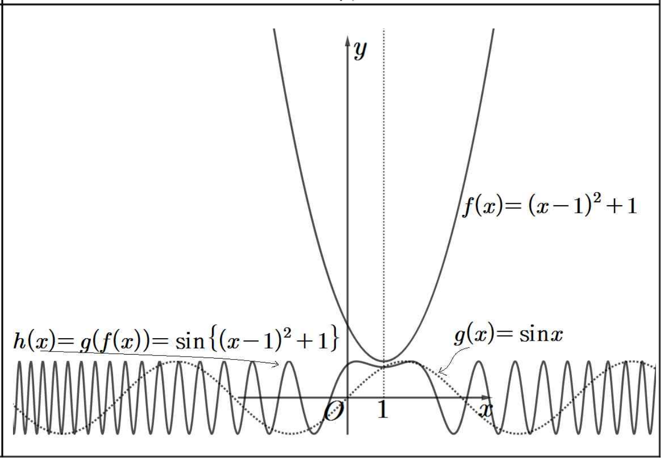
축에 대칭인 함수와 어떤 함수와의 합성함수(축에 대칭인 함수가 속함수)는 같은 축을 갖는 함수이다.

⇨ 즉, 함수 $f(x)$가 $x=m$에 대칭이면 $f(m-x)=f(m+x)$가 성립한다.

$h(x)=g(f(x))$라 할 때,

$h(m-x)=g(f(m-x))=g(f(m+x))=h(m+x)$이므로

$h(m-x)=h(m+x)$

<table>
<tr>
<td>$f(x)=(x-1)^2+1,\ g(x)=e^x$
⇨ $h(x)=e^{(x-1)^2+1}$
$y=h(x)$의 그래프는
오른쪽 그림과 같다.</td>
<td>→</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>$f(x)=(x-1)^2+1,\ g(x)=e^x$
⇨ $h(x)=e^{(x-1)^2+1}$
$y=h(x)$의 그래프는
오른쪽 그림과 같다.</td>
<td>→</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>$f(x)=(x-1)^2+1,\ g(x)=e^x$
⇨ $h(x)=e^{(x-1)^2+1}$
$y=h(x)$의 그래프는
오른쪽 그림과 같다.</td>
<td>→</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

세미나(139)-역함수와 교점을 3개 가질 때-1

함수 $f(x)$가 감소함수 일 때 (단, $y=x$에 대칭함수 제외 : $xy=1$)

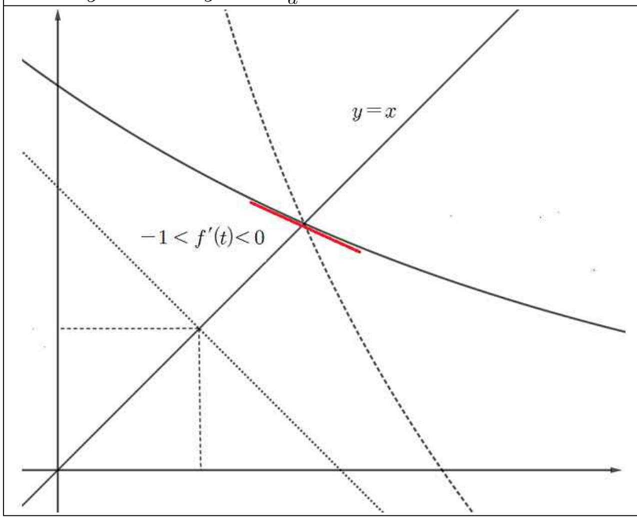
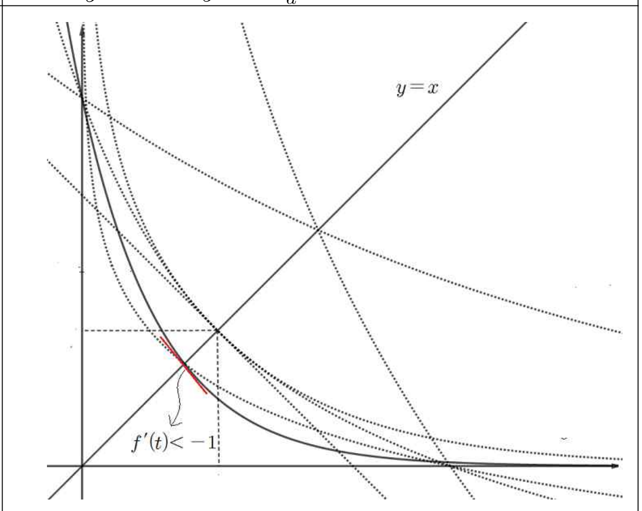
예를 들어 $f(x)=a^x$ $(0<a<1)$일 때

① 역함수 $f^{-1}(x)$가 존재한다.

② $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$는 적어도 1개의 교점을 가지며 그 교점은 $y=x$위에 있다.

③ $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 교점 중 $y=x$위에 있지 않은 교점을 가질 조건은 다음과 같다.

⇨ 실수 전체의 집합에서 미분가능하며 감소하는 함수와 그 역함수는 $y=x$위의 점에서 교점을 갖고 그 교점에서의 접선의 기울기가 -1보다 크거나 같으면 $y=x$ 위의 교점 외에는 교점을 갖지 않는다.
$y=x$위의 점에서의 접선의 기울기가 -1보다 작으면 $y=x$위의 교점 외에 $y=x$에 대칭인 다른 교점이 $y=x$위가 아닌 곳에 존재한다.
즉, $y=f(x)$와 $y=x$의 교점을 t라 할 때 $f'(t)<-1$이면 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$는 3개의 교점을 갖는다.

$y=a^x$와 $y=\log_a x$의 교점의 개수가 1	$y=a^x$와 $y=\log_a x$의 교점의 개수가 3
	

세미나(147)-로피탈 정리의 역방향-1

로피탈 정리 ⇨ $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

좌우를 바꾸면 다음과 같다. ⇨ $\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$ [역방향 로피탈 방법]

다음 문제를
①교육과정 풀이
② 로피탈 정리 이용
③ 역방향 로피탈 방법 이용
으로 풀어보자.

(1) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$

① $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=2$

② $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2x}{1}=2$

③ $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{3}x^3-x+C_1}{\frac{1}{2}x^2-x+C_2}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{3}x^3-x+\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{3}(x-1)^2(x+2)}{\frac{1}{2}(x-1)^2}$

$=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$

① $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

② $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1$

③ $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x+C_1}{\frac{1}{2}x^2+C_2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x+1}{\frac{1}{2}x^2}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{2}x^2}=1$

(3) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left\{\frac{1}{(x+2)^2}-\frac{1}{4}\right\}$

① $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left\{\frac{1}{(x+2)^2}-\frac{1}{4}\right\}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\times\frac{4-(x+2)^2}{4(x+2)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-x(x+4)}{4x(x+2)^2}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{-(x+4)}{4x(x+2)^2}=\frac{-4}{16}=-\frac{1}{4}$

② $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left\{\frac{1}{(x+2)^2}-\frac{1}{4}\right\}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{(x+2)^2}-\frac{1}{4}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-2}{(x+2)^3}}{1}=-\frac{1}{4}$

③ $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left\{\frac{1}{(x+2)^2}-\frac{1}{4}\right\}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{(x+2)^2}-\frac{1}{4}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-1}{x+2}-\frac{1}{4}x+C_2}{\frac{1}{2}x^2+C_1}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-1}{x+2}-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}x^2}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-4-x(x+2)+2(x+2)}{4(x+2)}}{\frac{1}{2}x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-x^2}{4(x+2)}}{\frac{1}{2}x^2}$

$=-\frac{1}{4}$

적분 상수는 $\frac{0}{0}$꼴일 때는 분모, 분자 식이 각각 극한을 대입했을 때 0이 되게 하고 $\frac{\infty}{\infty}$일 때는 무시해도 된다.(0으로 봄)

세미나(155)-정적분 기술-2

정적분의 기술 종합

$$\int_0^a f(x)\,dx=\int_0^a f(a-x)dx \quad , \int_{-a}^a f(x)dx=\int_0^a f(x)+f(-x)\,dx$$

⇨ 두 가지 방법이 다른 방법이 아니다.

$$⇨⇨ \int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$$

계산 가능한 모든 정적분의 값은 다음과 같은 방법으로 구한다.

① 구하려는 정적분을 $\mathrm{I}=\int_a^b f(x)dx$라 한다.

② 같은 값을 지니는 I를 만든다. $\mathrm{I}=\int_a^b f(a+b-x)dx$

추가설명 : $\int_0^a \to f(a+0-x)\to f(a-x)$, $\int_{-a}^a \to f(a-a-x)\to f(-x)$

③ 변변 더하면 우변이 계산 가능하므로 2I를 구한 후 $\div 2$

[관련 문제] (1) $\dfrac{12}{\pi}\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\dfrac{\tan x}{1+\tan x}\right)dx$의 값을 구하시오. (2) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(\dfrac{15x^4}{1+2^x}\right)dx$의 값을 구하시오.

(1)번 풀이

① $I=\dfrac{12}{\pi}\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\dfrac{\tan x}{1+\tan x}\right)dx$

② $I=\dfrac{12}{\pi}\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{1+\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\right)dx$

$=\dfrac{12}{\pi}\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\dfrac{\cot x}{1+\cot x}\right)dx=\dfrac{12}{\pi}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\dfrac{1}{\tan x+1}\right)dx$

③ $2I=\dfrac{12}{\pi}\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\dfrac{\tan x}{1+\tan x}\right)dx+\dfrac{12}{\pi}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\dfrac{1}{\tan x+1}\right)dx$

$=\dfrac{12}{\pi}\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}1\,dx=\dfrac{12}{\pi}[x]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=2$

따라서 $I=1$이다. $\dfrac{12}{\pi}\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\dfrac{\tan x}{1+\tan x}\right)dx=1$

(2)번 풀이

① $I=\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(\dfrac{15x^4}{1+2^x}\right)dx$

② $I=\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(\dfrac{15(-x)^4}{1+2^{-x}}\right)dx=\int_{-1}^{1}\left(\dfrac{15x^4\times 2^x}{2^x+1}\right)dx$

③ $2I=\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(\dfrac{15x^4}{1+2^x}\right)dx+\int_{-1}^{1}\left(\dfrac{15x^4\times 2^x}{2^x+1}\right)dx$

$=\displaystyle\int_{-1}^{1}15x^4dx=[3x^5]_{-1}^{1}=6$

따라서 $I=3$이다. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(\dfrac{15x^4}{1+2^x}\right)dx=3$

[랑데뷰팁]

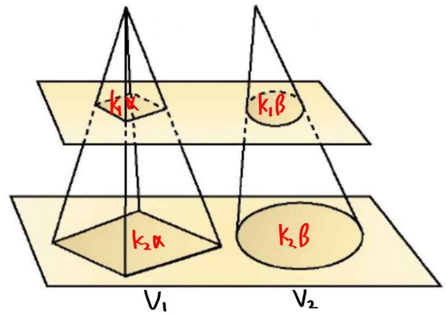
(2)번은 $\displaystyle\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_0^a f(x)+f(-x)\,dx$의 성질을 이용하면 더 간편할 수도 있지만 한 가지 방법으로 모든 문제를 해결하자.

세미나(167)-카발리에리의 원리

카발리에리의 원리

(1) 두 평면도형 S_1, S_2를 정해진 한 변과 평행인 임의의 선분으로 자를 때, S_1, S_2의 잘린 부분의 넓이의 비가 항상 $\alpha : \beta$이면 두 평면도형 S_1, S_2의 넓이의 비도 $\alpha : \beta$가 된다.

(2) 두 입체도형 V_1, V_2를 정해진 한 평면과 평행인 임의의 평면으로 자를 때, V_1, V_2의 잘린 부분의 넓이의 비가 항상 $\alpha : \beta$이면 두 입체도형 V_1, V_2의 부피의 비도 $\alpha : \beta$가 된다.

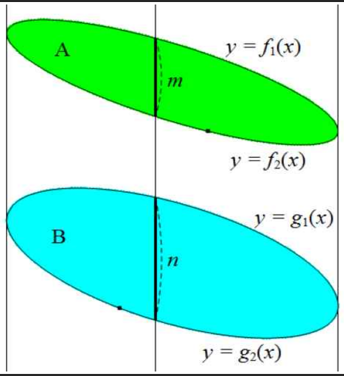


설명 한 평면 위의 두 도형이 그림과 같이 y축에 평행한 임의의 직선을 잘라내는 선분의 길이가 항상 $m : n$이면 이들의 넓이의 비는 $m : n$이다. ⇨ 두 도형의 넓이를 A, B라고 하면

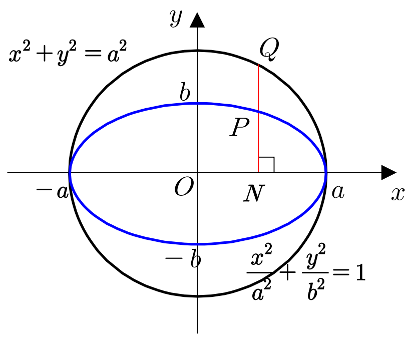
$$f_1(x)-f_2(x) : g_1(x)-g_2(x)=m:n \to f_1(x)-f_2(x)=\frac{m}{n}\{g_1(x)-g_2(x)\}$$

이고 $A=\int_a^b \{f_1(x)-f_2(x)\}dx=\frac{m}{n}\int_a^b \{g_1(x)-g_2(x)\}dx=\frac{m}{n}B$ 이므로

$\therefore A : B = m : n$ ⇒ **부피비도 같은 방법으로 설명할 수 있다.**



① 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (단, $a>0$, $b>0$)의 넓이를 구하여라.

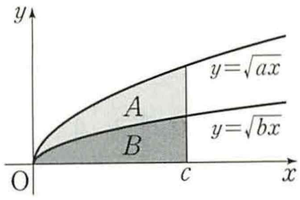


풀이 오른쪽 그림에서 P는 타원 위의 점이고 Q는 원 위의 점이므로,

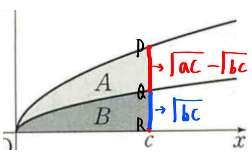
$\overline{PN}=|y|=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, $\overline{QN}=\sqrt{a^2-x^2}$ 따라서 $\overline{PN} : \overline{QN}=b : a$

곧, 타원은 원을 y축의 방향으로 $\frac{b}{a}$의 비로 축소하여 생긴 도형임을 알 수 있다. 따라서 원의 넓이는 πa^2이고 타원의 넓이는 이를 $\frac{b}{a}$로 축소하였으므로 **카발리에리의 원리**에서 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$의 넓이는 $\pi a^2 \times \frac{b}{a}=\pi ab$이다.

② 그림과 같이 두 무리함수 $y=\sqrt{ax}$, $y=\sqrt{bx}$의 그래프와 직선 $x=c$ 및 x축으로 둘러싸인 두 영역 A, B의 넓이를 각각 S_1, S_2라 할 때, $S_1 : S_2$의 값을 a, b를 이용하여 나타내어라. (단, $c>0$)



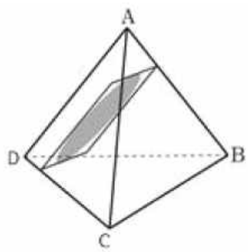
풀이



$\overline{PQ} : \overline{QR}=\sqrt{a}-\sqrt{b} : \sqrt{b}$ 이므로 **카발리에리의 원리**에서

$S_1 : S_2=\sqrt{a}-\sqrt{b} : \sqrt{b}$

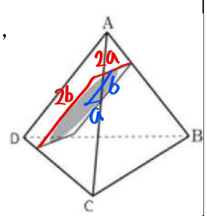
③ 부피가 4인 정사면체 $A-BCD$를 선분 AD와 선분 BC에 동시에 평행한 평면으로 자르면 단면은 직사각형이다. 단면을 무한히 많이 잘랐을 때, 이 직사각형에 내접하는 타원이 이루는 입체도형의 부피를 구하여라.



풀이 자른 단면인 직사각형의 가로, 세로 길이를 각각 $2a$, $2b$라 하면

타원:직사각형$=\pi ab : 4ab$ 이므로

카발리에리의 원리에서 $4\times\frac{\pi ab}{4ab}=\pi$



세미나(182)-완전(교란)순열

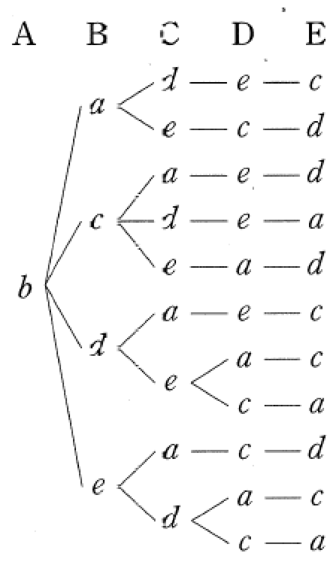
몽모르트 순열 → $a_n=(n-1)(a_{n-1}+a_{n-2})$ (단, $n\geq 3$)

$1,2,3,\cdots,n$의 번호가 적힌 카드를 $1,2,3,\cdots,n$ 의 번호가 적힌 봉투에 넣을 때, 각 카드가 제 번호의 봉투에 들어가지 않는 모든 경우의 수는 $n!\left\{\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\cdots(-1)^n\cdot\frac{1}{n!}\right\}$이다.

[관련 문제] 반장과 부반장을 포함한 7명의 학생이 쪽지시험을 본 후 7장의 답안지를 섞은 다음에 임의로 하나씩 뽑는다. 반장과 부반장은 답안지를 서로 바꾸고, 나머지 5명은 다른 학생의 답안지를 뽑을 경우의 수를 구하여라.

일반 풀이

반장과 부반장은 답안지를 서로 바꾸므로 7명의 학생 중 반장과 부반장을 제외한 5명의 학생을 A, B, C, D, E라 하고, 각각의 답안지를 a, b, c, d, e라 하면 A학생이 b답안지를 뽑는 경우 나머지 학생들도 각각 다른 학생의 답안지를 뽑아야 하므로 그 경우의 수는 오른쪽 수형도와 같이 11 이다.



이때, A학생이 뽑을 수 있는 답안지는 b, c, d, e의 4개이므로 5명의 학생이 다른 학생의 답안지를 뽑는 경우의 수는 $11\cdot 4=44$(가지)

랑데뷰 풀이

몽모르트 순열에서 $n=5$ 인 경우이므로

$5!\left\{\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}\right\}=60-20+5-1=44$ 이다.

설명 : (완전순열 또는 교란순열이라고도 한다.)

$1,2,3,\cdots,n$의 번호가 적힌 카드를 $1,2,3,\cdots,n$ 의 번호가 적힌 봉투에 넣을 때, 각 카드가 제 번호의 봉투에 들어가지 않는 모든 경우의 수를 a_n이라 하고 (카드, 봉투) 로 순서쌍을 만들 때

카드 1번을 기준으로 생각하면 (1, 2) 일 때

(2, 1) 또는 (2, not 1) 인 경우가 생기고

(1, 2), (2, 1) 이면 나머지 카드 3~n가 나머지 봉투 3~n에 정해진 규칙에 들어가면 되므로 a_{n-2}가 생긴다. (1, 2), (2, not 1)인 경우는 카드 1번을 없애고 봉투 2번을 없앤 뒤 봉투 1번에 2번 번호를 부여하면 카드 2~n가 봉투 2~n에 정해진 규칙에 들어가면 되므로 a_{n-1}이 된다. 이런 경우가 (1,2),(1,3)...(1,n)인 $n-1$가지가 생기므로

$a_n=(n-1)(a_{n-1}+a_{n-2})$

n에 $n+2$를 대입하면 $a_{n+2}=(n+1)(a_{n+1}+a_n)$

$a_{n+2}-(n+2)a_{n+1}=-\{a_{n+1}-(n+1)a_n\}$

$a_{n+1}-(n+1)a_n=(-1)^{n-1}$ 양변을 $\div(n+1)!$

$$\frac{a_{n+1}}{(n+1)!}-\frac{a_n}{n!}=\frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)!}=\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\frac{a_n}{n!}=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}\quad(a_1=0)$$

$$a_n=n!\left\{\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\cdots(-1)^n\cdot\frac{1}{n!}\right\}$$

세미나(192)-직육면체 색칠

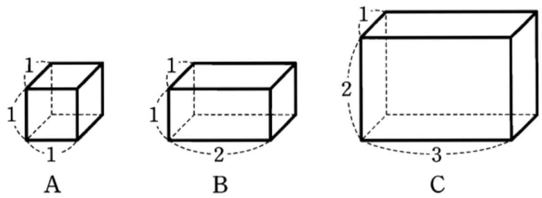
직육면체 색칠방법의 수

→ 정육면체를 고무줄 당기듯이 늘여서 만든 도형으로 생각한다.

가로, 세로, 높이 세 가지($3!$) 방향 중 두 가지($2!$) 방향이 같을 때는 $\dfrac{3!}{2!}$을 한 가지 방향도 같지 않을 때는 $\dfrac{3!}{0!}$을 곱해준다.

[관련 문제]

그림과 세 직육면체 A, B, C가 있다. 각 직육면체의 겉면을 서로 다른 6가지의 색을 모두 사용하여 한 면에 한 가지 색으로 칠하는 방법의 수를 각각 $n(\mathrm{A})$, $n(\mathrm{B})$, $n(\mathrm{C})$라 할 때, $n(\mathrm{A})+n(\mathrm{B})+n(\mathrm{C})$의 값을 구하여라.
(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)



일반 풀이

(ⅰ) 정육면체 A의 겉면을 칠하는 방법의 수
먼저 한 면에 한 가지 색을 칠하고 이를 밑면으로 고정하면 윗면에 색을 칠하는 방법의 수는 5가지이다.
또한, 나머지 4가지의 색으로 옆면을 칠하는 방법의 수는 나머지 4가지의 색을 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같으므로 $(4-1)!=3!=6$

$\therefore n(\mathrm{A})=5\times6=30$

(ⅱ) 직육면체 B의 겉면을 칠하는 방법의 수
직육면체 B는 가로의 길이, 세로의 길이를 나타내는 순서쌍이 $(1,\ 1)$인 면 2개와 $(2,\ 1)$인 면 4개로 이루어져 있다.
서로 다른 6가지의 색 중에서 $(1,\ 1)$인 면 2개에 칠할 2가지 색을 정하는 방법의 수는
${}_6\mathrm{P}_2=6\times5=30$
이때, 각 경우에 대하여 회전하여 같은 경우가 2가지씩 생기므로 $\dfrac{30}{2}=15$
또한, 나머지 4가지의 색으로 $(2,\ 1)$인 면 4개를 칠하는 방법의 수는 나머지 4가지의 색을 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같으므로
$(4-1)!=3!=6 \quad \therefore n(\mathrm{B})=15\times6=90$

(ⅲ) 직육면체 C의 겉면을 칠하는 방법의 수
직육면체 C는 가로의 길이, 세로의 길이를 나타내는 순서쌍이 $(1,\ 2)$인 면 2개, $(3,\ 1)$인 면 2개, $(3,\ 2)$인 면 2개로 이루어져 있다.
먼저 $(1,\ 2)$인 면에 한 가지 색을 칠할 때, 그 맞은 편 면에 색을 칠하는 방법의 수는 5가지이고, 나머지 4가지의 색으로 옆면을 칠하는 방법의 수는 $\dfrac{4!}{2}=12$이므로 그 방법의 수는 $5\times12=60$
같은 방법으로 $(3,\ 1)$인 면, $(3,\ 2)$인 면에 대해서도 각각 60가지씩 있으므로 $n(\mathrm{C})=60\times3=180$
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서
$n(\mathrm{A})+n(\mathrm{B})+n(\mathrm{C})=30+90+180=300$

랑데뷰 풀이

정육면체 색칠하는 방법의 수는 30가지

$n(\mathrm{A})=30\times\dfrac{3!}{3!}=30$

$n(\mathrm{B})=30\times\dfrac{3!}{2!}=90$

$n(\mathrm{C})=30\times\dfrac{3!}{0!}=180$