



# 랑데뷰 수학

수능을 완성하다!-수학I

**Q 유형 1 거듭제곱근의 뜻과 성질**

출제유형 | 거듭제곱근의 뜻과 성질을 이용하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 거듭제곱근의 뜻과 성질을 이용하는 문제를 해결한다.

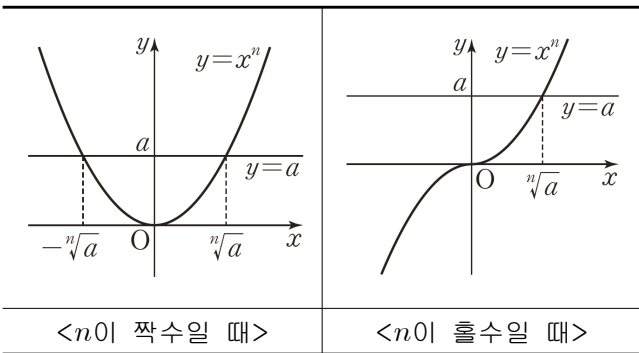
(1) 실수  $a$ 와 2 이상의 자연수  $n$ 에 대하여  $x^n = a$ 를 만족시키는 실수  $x$ , 즉  $a$ 의  $n$ 제곱근 중 실수인 것은 다음과 같다.

①  $n$ 이 짝수인 경우

- $a > 0$ 일 때 :  $\sqrt[n]{a}$ ,  $-\sqrt[n]{a}$ 로 2개다.
- $a = 0$ 일 때 : 0으로 1개다.
- $a < 0$ 일 때 : 없다.

②  $n$ 이 홀수인 경우

$\sqrt[n]{a}$ 로 1개뿐이다.



(2)  $a > 0$ ,  $b > 0$ 이고  $m$ ,  $n$ 이 2 이상의 자연수일 때,

- ①  $\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
- ②  $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$
- ③  $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$
- ④  $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$
- ⑤  $\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$  (단,  $p$ 는 자연수)

1)

등식  $\sqrt[5]{-288} + \sqrt[5]{a} \times \sqrt[5]{b^2} = 0$ 을 만족시키는 두 자연수  $a$ ,  $b$ 에 대하여  $a-b$ 의 최댓값을  $M$ , 최솟값을  $m$ 이라 할 때,  $M+m$ 의 값을 구하시오.

2)

모든 실수  $x$ 에 대하여  $\sqrt[3]{(a-2)x^2 + 2(a-2)x - 6}$  이 음의 실수가 되도록 하는 정수  $a$ 의 최댓값을  $M$ , 최솟값을  $m$ 이라고 할 때,  $M^2+m^2$ 의 값을 구하면?

- ① 2      ② 5      ③ 8      ④ 10      ⑤ 13

68)

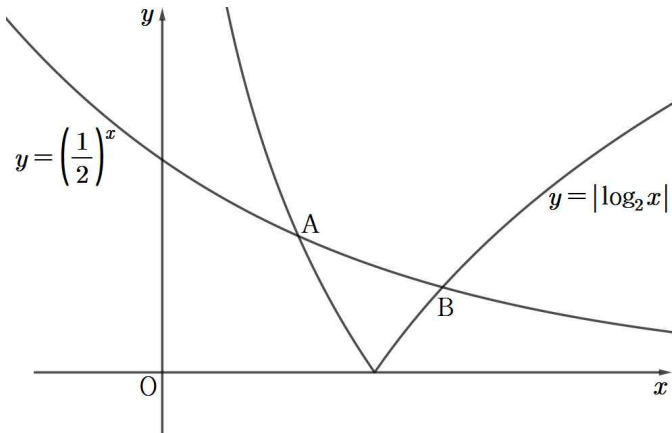
그림과 같이 두 곡선  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  와  $y = |\log_2 x|$ 의  
두 교점을  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ 라 할 때, 다음 중  
옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?  
(단,  $x_1 < x_2$ )

보기

㉠.  $\frac{1}{2} < y_1 < \frac{2}{3}$

㉡.  $-2 < \frac{x_1}{x_1 - 1} < -1$

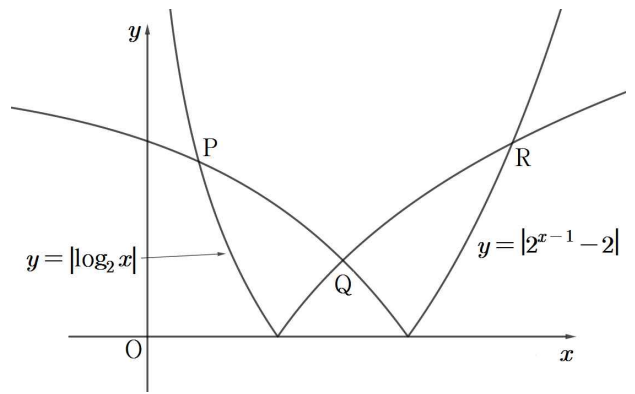
㉢.  $x_2 - y_2 < 1$



- ① ㉠                      ② ㉡                      ③ ㉠, ㉡  
④ ㉡, ㉢                ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

69)

그림과 같이 두 곡선  $y = |\log_2 x|$ ,  $y = |2^{x-1} - 2|$   
가 만나는 세 점을 각각  
 $P(x_1, y_1)$ ,  $Q(x_2, y_2)$ ,  $R(x_3, y_3)$   
라 하자. 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것  
은?



보기

㉠.  $y_2(x_3 - 1) < y_3(x_2 - 1)$

㉡.  $y_1(2 - x_2) < y_2(2 - x_1)$

㉢.  $(x_2 - 1)(y_1 - 1) < (1 - x_1)(1 - y_2)$

- ① ㉠                      ② ㉡                      ③ ㉠, ㉡  
④ ㉡, ㉢                ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

## 지&로함수 단원평가

77)

$$(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)\cdots(2^{2^{2018}}+1)=2^a-1$$

을 만족하는 정수  $a$ 에 대하여  $\log_2 a$ 의 값은?

- ① 2018                      ② 2019                      ③ 2020  
 ④  $2^{2019}$                       ⑤  $\log_2(2^{2019}-1)$

78)

$-25$ 의 세제곱근 중 실수인 것의 개수를  $a$ ,  $\sqrt{23}$ 의 네제곱근 중 실수인 것의 개수를  $b$ 라 할 때,  $a+b$ 의 값을 구하시오.

79)

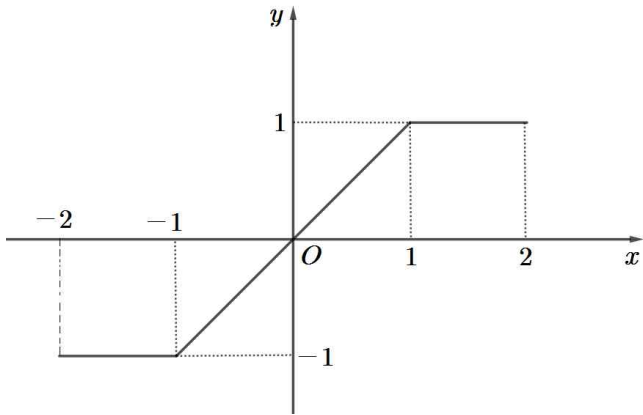
$(\sqrt[3]{2}\sqrt[4]{8})^n$ 이 자연수가 되도록 하는 자연수  $n$ 의 최솟값을 구하시오.

80)

$x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}=\sqrt{3}$ 일 때,  
 $(5-x^{\frac{2}{3}})(5-x^{-\frac{2}{3}})+(x^{\frac{1}{3}}-x^{-\frac{1}{3}})^2$ 의 값을 구하시오.

112)

함수  $y=f(x)$  ( $-2 \leq x \leq 2$ )의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 함수  $g(x)=a^{f(x)}$  ( $a > 0, a \neq 1$ )에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?



| 보기 |

- ㄱ. 함수  $y=g(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.
- ㄴ. 함수  $g(x)$ 의 최댓값과 최솟값의 곱은 1이다.
- ㄷ. 함수  $g(x)$ 의 최댓값과 최솟값의 차가 2일 때, 가능한  $a$ 의 값들의 합은 2이다.

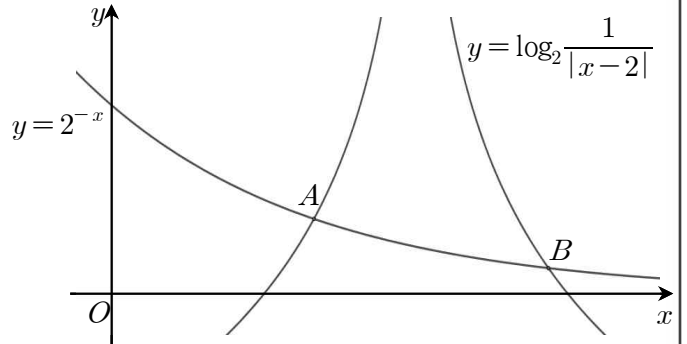
- ① ㄱ                      ② ㄴ                      ③ ㄱ, ㄷ
- ④ ㄴ, ㄷ                ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

113) 킬러

그림과 같이 곡선  $y=2^{-x}$ 이 곡선  $y=\log_2 \frac{1}{|x-2|}$ 와 만나는 점을  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 라 하자. 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

| 보기 |

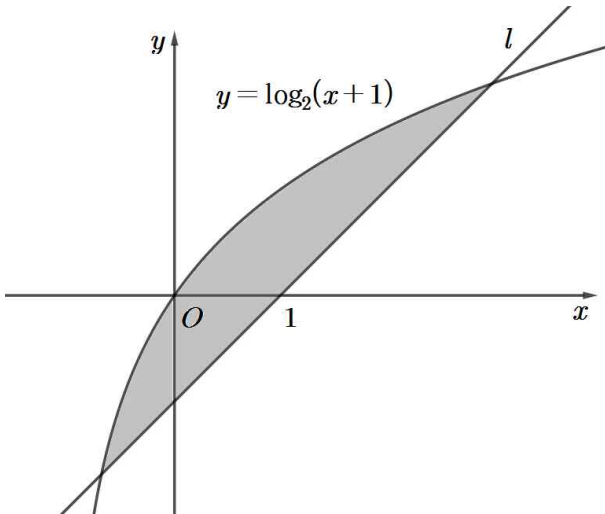
- ㄱ.  $x_1 < 2 - 2^{-\frac{1}{2}}$
- ㄴ.  $x_2 > 2 + 2^{-\frac{1}{8}}$
- ㄷ.  $\frac{y_1}{y_2} > 2^{\sqrt{2}}$



- ① ㄱ                      ② ㄴ                      ③ ㄱ, ㄷ
- ④ ㄴ, ㄷ                ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

114) 킬러

그림과 같이 곡선  $y = \log_2(x+1)$ 과 점  $(1, 0)$ 을 지나고 기울기가 양수인 직선  $l$ 의 두 교점의  $x$ 좌표를 각각  $\alpha, \beta$  ( $\alpha < 0 < \beta$ )라 하자. 곡선  $y = \log_2(x+1)$ 과 직선  $l$ 로 둘러싸인 도형의 넓이가 최소일 때,  $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값은?



- ① 2      ② 4      ③ 6      ④ 8      ⑤ 10

154)

실수 전체의 집합에서 정의된 함수  $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) f(x) = \sin \frac{\pi}{3} x \quad (0 \leq x \leq 3)$$

(나) 모든 실수  $x$ 에 대하여

$$f\left(x + \frac{3}{2}\right) = f\left(x - \frac{3}{2}\right) \text{이다.}$$

자연수  $n$ 에 대하여 구간  $[0, 3n]$ 에서 방정식  $nf(x) = \frac{x}{3}$ 의 모든 실근의 개수를  $a_n$ 이라 할 때,

$\sum_{n=1}^{10} a_n$ 의 값을 구하시오.

155)

두 실수  $a$ 와  $b$ 에 대하여 닫힌구간  $\left[-\frac{\pi}{a}, \frac{2\pi}{a}\right]$ 에서 정의된 함수  $f(x) = 3\cos(ax) + b$ 가 있다.

곡선  $y = f(x)$ 와 직선  $y = k$ 가 두 점  $A\left(-\frac{\pi}{4}, k\right)$ ,

$B\left(\frac{9}{4}\pi, k\right)$ 을 지나고  $f\left(\frac{5}{2}\pi\right) = 2$ 일 때,  $k$ 의 값과 같은

것은? (단,  $0 < a < \frac{8}{9}$ 이고  $k$ 는 상수이다.)

①  $3\cos\frac{\pi}{5} + 1$       ②  $3\cos\frac{\pi}{5} - 1$

③  $3\cos\frac{2\pi}{5} + 1$       ④  $3\cos\frac{2\pi}{5} - 1$

⑤  $3\cos\frac{2\pi}{5} + 2$

156) 킬러

자연수  $k$ 에 대하여 집합  $A_k$ 를

$$A_k = \left\{ \cos \frac{2(m-1)}{k} \pi \mid m \text{은 자연수} \right\}$$

라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

— | 보기 | —

ㄱ. 집합  $A_5$ 의 1이 아닌 모든 원소의 합을  $p$ 라 할 때,  $p < 0$ 이다.

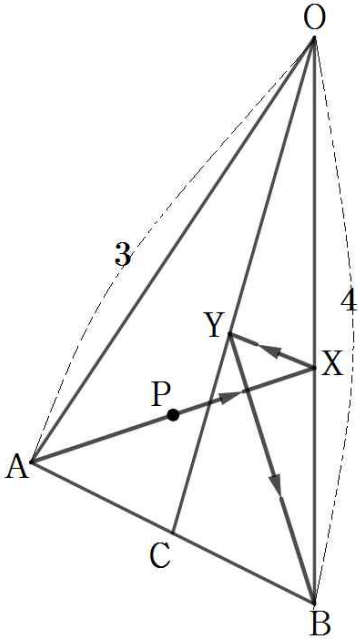
ㄴ. 집합  $A_k$ 의 모든 원소의 곱이 0이 되도록 하는 100이하의  $k$ 의 개수는 25이다.

ㄷ.  $n(A_k) = 15$ 을 만족시키는 모든  $k$ 의 값의 합은 57이다.

- ① ㄱ                      ② ㄱ, ㄴ                      ③ ㄱ, ㄷ  
 ④ ㄴ, ㄷ                      ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

164)

그림과 같이  $\overline{OA}=3$ ,  $\overline{OB}=4$ 인 삼각형 OAB가 있다.  $\angle AOB$ 의 이등분선이  $\overline{AB}$ 와 만나는 점을 C라 하자. 움직이는 점 P가 점 A에서 출발하여 변 OB와 선분 OC 위의 두 점 X, Y를 차례대로 거쳐 점 B까지 도달한다. 점 P가 이동한 거리의 최솟값이 5일 때, 변 AB의 길이를  $l$ 이라 하자.  $l^2$ 의 값은?



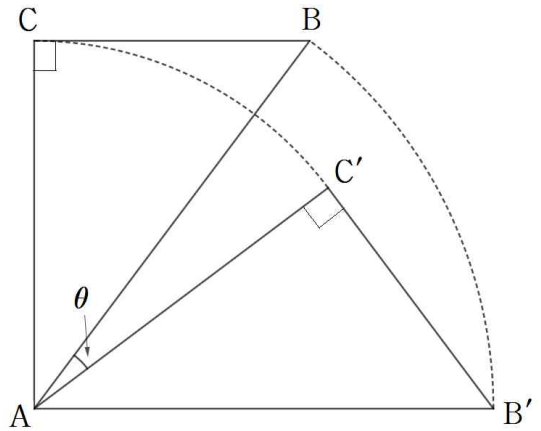
- ①  $25 - 12\sqrt{3}$       ②  $25 - 12\sqrt{2}$   
 ③  $25 - 9\sqrt{2}$       ④  $\frac{17}{2}$               ⑤ 9

165)

그림과 같이  $\overline{AC}=4$ ,  $\overline{BC}=3$ ,  $\angle ACB = \frac{\pi}{2}$ 인 직각 삼각형 ABC를 꼭짓점 A를 중심으로 시계방향으로 회전한 삼각형  $AB'C'$ 에 대하여  $\overline{BC}$ 와  $\overline{AB'}$ 가 평행할 때,  $\angle BAC' = \theta$ 라 하자.  $\sin\theta$ 의 값은?

(단,  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ )

- ①  $\frac{7}{25}$       ②  $\frac{8}{25}$       ③  $\frac{9}{25}$       ④  $\frac{2}{5}$       ⑤  $\frac{11}{25}$





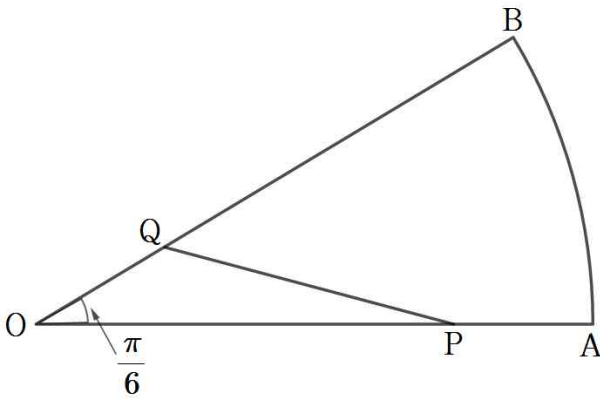
182)

그림과 같이 중심각의 크기가  $\frac{\pi}{6}$ 인 부채꼴 AOB에서 선분 OA 위의 점 P와 선분 OB 위의 점 Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(가)  $\overline{OP} \times \overline{OQ} = \overline{AP} \times \overline{BQ}$

(나) 부채꼴 AOB의 넓이와 삼각형 POQ의 넓이의 비는  $16\pi : 9$ 이다.

선분 OQ의 길이를  $x$ , 선분 OP의 길이를  $y$ , 삼각형 POQ의 넓이를  $z$ 라 할 때,  $x, y, z$ 는 이 순서대로 등차수열을 이룬다.  $x+y+z$ 의 값을 구하시오. (단,  $x < y$ )

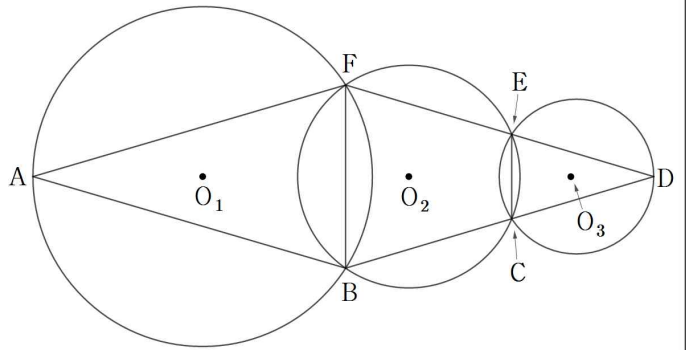


183)

그림과 같이 한 평면 위에 있는 삼각형 ABF의 외심을  $O_1$ , 사각형 FBCE의 외접원의 중심을  $O_2$ , 삼각형 ECD의 외심을  $O_3$ 라 하고  $\angle FAB = \angle FDB = \alpha$ ,  $\angle FEB = \beta$ ,  $\angle EBC = \gamma$ 라 할 때,

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{3}{2}, \quad \cos(\alpha + \beta) = \frac{1}{3}, \quad \overline{O_1 O_2} = \sqrt{17}$$

이 성립한다. 삼각형 ABF의 외접원의 넓이와 삼각형 ECD의 외접원의 넓이의 합이  $\frac{q}{p}\pi$ 일 때,  $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, 세 점 B, C, D와 세 점 D, E, F는 한 직선 위에 있고  $p$ 와  $q$ 는 서로소인 자연수이다.)



255)

수열  $\{a_n\}$  은  $a_1 = 4$ 이고, 다음 조건을 만족시킨다.

(가)  $a_{n+2} = a_n - 3$  ( $n = 1, 2, 3$ )

(나) 모든 자연수  $n$ 에 대하여  $a_{n+5} = a_n$  이다.

$\sum_{k=1}^{102} a_k = 209$ 일 때,  $a_2$ 의 값을 구하시오.

256)

수열  $a_n$ 에서  $a_1 = -20$ ,  $a_{n+1} = a_n + 2$  이다.

$S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ 일 때,  $\sum_{k=m}^{m+5} S_k$  값이 최소가 되는  $m$ 의 값

을  $a$ ,  $a_k = 0$ 을 만족하는  $k$ 의 값을  $b$ 라고 하자.

$a+b$ 의 값은?

- ① 15    ② 16    ③ 17    ④ 18    ⑤ 19

257)

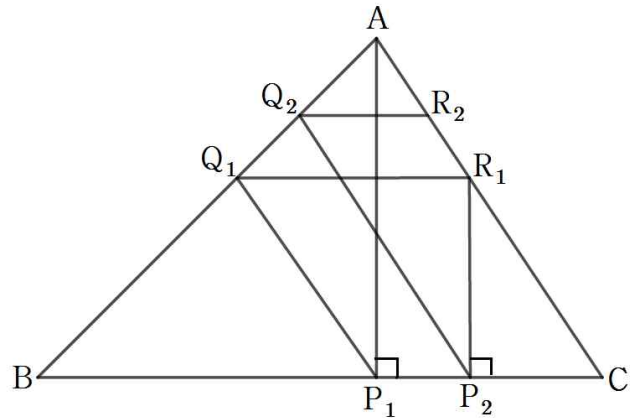
그림과 같이 삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을  $P_1$ 이라 할 때,  $\overline{AP_1} = 10$ 이고,  $P_1$ 은 선분 BC를 3:2로 내분하는 점이다.

자연수  $n$ 에 대하여 세 점  $Q_n, R_n, P_{n+1}$ 을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) 선분 BC위의 점  $P_n$ 을 지나고 직선 AC에 평행한 직선이 선분 AB와 만나는 점을  $Q_n$ 이라 한다.

(나) 선분 AB위의 점  $Q_n$ 을 지나고 직선 BC에 평행한 직선이 선분 AC와 만나는 점을  $R_n$ 이라 한다.

(다) 점  $R_n$ 에서 선분 BC에 내린 수선의 발을  $P_{n+1}$ 이라 한다.



선분  $R_n P_{n+1}$ 의 길이를  $l_n$ 이라 할 때, 모든 자연수  $n$ 에 대하여

$$l_{n+1} = pl_n + q$$

가 성립한다.  $5(l_1 + p + q)$ 의 값을 구하시오. (단,  $p$ 와  $q$ 는 유리수이다.)

320)

첫째항이 음의 정수이고 공차가 자연수인 등차수열  $\{a_n\}$ 과 첫째항이 자연수이고 공비가 음의 정수인 등비수열  $\{b_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킬 때,  $a_7 + b_7$ 의 값을 구하시오.

$$(가) \sum_{n=1}^5 (a_n + b_n) = 43$$

$$(나) \sum_{n=1}^5 (a_n + |b_n|) = 103$$

$$(다) \sum_{n=1}^5 (|a_n| + |b_n|) = 119$$

5) 정답 45

$$a_n = \sqrt[n]{n^2 - 19n + 60} = \sqrt{(n-4)(n-15)}$$

이고  $n$ 이 홀수 이고  $(n-4)(n-15) < 0$ 일 때,

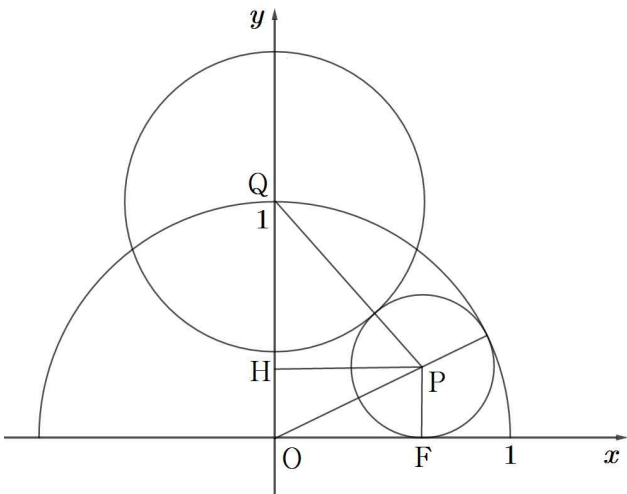
$a_n < 0$ 이다.

따라서  $4 < n < 15$ 의 홀수는 5, 7, 9, 11, 13이므로

모든  $n$ 의 합은  $5+7+9+11+13=45$ 이다.

6) 정답 ②

반원 A의 중심을 원점 O, 원 C의 중심을 점 P, 원 B의 중심을 점 Q라 하자.



원 C의 반지름의 길이를  $r$ 이라 하면  $\overline{OP} = 1 - r$ 이다.

점 P에서  $x$ 축,  $y$ 축에 내린 수선의 발을 각각 F, H라 하면

직각삼각형 POF에서

$$\overline{OF} = \sqrt{(1-r)^2 + r^2} = \sqrt{1-2r}$$

원 B와 원 C의 접점을 점 R이라 하면

$$\overline{QR} = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}, \overline{PR} = r, \overline{QH} = 1 - r,$$

$$\overline{PH} = \overline{OF} = \sqrt{1-2r} \text{이다.}$$

직각삼각형 QHP에서

$$(1-r)^2 + (\sqrt{1-2r})^2 = \left(\sqrt[3]{\frac{1}{3}} + r\right)^2$$

$$r^2 - 4r + 2 = \sqrt[3]{\frac{1}{9}} + 2\sqrt[3]{\frac{1}{3}}r + r^2$$

$$\left(4 + 2\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right)r = 2 - \sqrt[3]{\frac{1}{9}}$$

에서  $\sqrt[3]{\frac{1}{3}} = a$ 라 두면

$$(4 + 2a)r = 2 - a^2$$

$$r = \frac{2 - a^2}{4 + 2a}$$

$$\text{따라서 } l = 2\pi \frac{2 - a^2}{2a + 4} = \pi \frac{2 - a^2}{a + 2}$$

$$25l + 6S$$

$$= \pi \left( \frac{50 - 25a^2}{a + 2} + 6a^2 \right)$$

$$= \pi \left( \frac{50 - 25a^2 + 6a^3 + 12a^2}{a + 2} \right)$$

$$= \pi \left( \frac{52 - 13a^2}{a + 2} \right) \left( \because a^3 = \frac{1}{3} \right)$$

$$= 13\pi \left( \frac{4 - a^2}{a + 2} \right) = 13\pi(2 - a)$$

$$= 13\pi \left( 2 - \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \right)$$

**[다른 풀이]**

직각삼각형 QHP에서

$$(1-r)^2 + (\sqrt{1-2r})^2 = \left(\sqrt[3]{\frac{1}{3}} + r\right)^2$$

$$r^2 - 4r + 2 = \sqrt[3]{\frac{1}{9}} + 2\sqrt[3]{\frac{1}{3}}r + r^2$$

$$\left(4 + 2\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right)r = 2 - \sqrt[3]{\frac{1}{9}}$$

따라서

$$r = \frac{1}{2} \times \frac{2 - \sqrt[3]{\frac{1}{9}}}{2 + \sqrt[3]{\frac{1}{3}}}$$

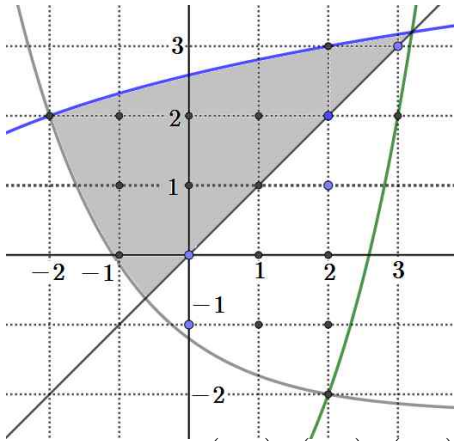
$$= \frac{1}{2} \times \frac{\left(2 - \sqrt[3]{\frac{1}{9}}\right)\left(4 - 2\sqrt[3]{\frac{1}{3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{9}}\right)}{2^3 + \frac{1}{3}}$$

$$= \frac{3}{50} \left( 8 - 4\sqrt[3]{\frac{1}{3}} + 2\sqrt[3]{\frac{1}{9}} - 4\sqrt[3]{\frac{1}{9}} + 2 \times \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{3}} \right)$$

$$= \frac{3}{50} \left( \frac{26}{3} - \frac{13}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{3}} - 2\sqrt[3]{\frac{1}{9}} \right)$$

$$= \frac{13}{25} - \frac{13}{50}\sqrt[3]{\frac{1}{3}} - \frac{3}{25}\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$$

다음 그림과 같이  $x < y \leq \log_2(x+6)$ 에 속하는 격자점의 개수는 8개다.



$y=x$  위의 점은  $(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)$ 로 4개다.

따라서 그림의 색칠된 부분의 격자점의 개수는  $8 \times 2 + 4 = 20$ 이다. (거짓)

ㄷ. 선분  $AB$  위에 원점  $O$ 가 있고  $\overline{AB} \perp \overline{OC}$ 이므로

$$S = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{OC} \text{이다.}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2} \text{ 이고 } C(t, t) \text{라 할 때}$$

$$\overline{OC} = t\sqrt{2} \text{이다.}$$

$$\text{따라서 } S = 4t$$

$$y = 2^x - 6 \text{과}$$

$y = x$ 에서  $h(x) = x - (2^x - 6) = (x + 6) - 2^x$ 라 할 때 색칠된 부분은  $h(x) > 0$ 에 속한다.

$$h\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{19}{2} - 2^{\frac{7}{2}} \text{에서 } 19 < 2^{\frac{9}{2}} \text{이므로 } h\left(\frac{7}{2}\right) < 0 \text{이다.}$$

$$\text{따라서 } \frac{7}{2} < 2^{\frac{7}{2}} - 6 \text{이므로 } t < \frac{7}{2} \text{이다.}$$

$$\text{따라서 } 3 < t < \frac{7}{2} \text{이므로}$$

$$12 < S = 4t < 14 \text{이다. (참)}$$

### [랑데뷰팁]-Pick's Theorem

픽(George Pick)은 격자평면에서 모든 꼭짓점이 격자점 위에 놓인 다각형과 이의 넓이와의 관계를 발견하여 다음 식을 증명하였다.

$$S = \alpha + \frac{\beta}{2} - 1$$

( $S$ : 다각형의 넓이,  $\alpha$ : 내부의 격자점의 개수,  $\beta$ : 경계 위의 격자점의 개수)

ㄴ. 을 이용하여 ㄷ. 에 적용해보면

점  $C$  바로 아래에 점  $D(3, 3)$ 라 하고  $\triangle ABD$ 의 넓이를  $S'$ 라 하면  $S' < S$ 이다.

$S'$ 의 넓이를 픽의 정리로 구해보자.

$\alpha$ (내부의 격자점의 개수) : 10

$\beta$ (경계 위의 격자점의 개수) : 6

$$\text{따라서 } S' = 10 + \frac{6}{2} - 1 = 12$$

점  $C$  바로 위의 점  $E(4, 4)$ 라 하고  $\triangle ABE$ 의 넓이를  $S''$ 라 하면  $S < S''$ 이다.

$S''$ 의 넓이를 픽의 정리로 구해보자.

$\alpha$ (내부의 격자점의 개수) : 13

$\alpha$ (경계 위의 격자점의 개수) : 6

$$\text{따라서 } S'' = 13 + \frac{6}{2} - 1 = 15$$

$12 < S < 15$ 임을 알 수 있다.

241) 정답 7

점  $(2n-1, -\log_2 2n)$ 과 점  $(2n, 0)$ 을 연결한 선분을 대각선으로 갖고 가로는  $x$ 축과 평행한 직사각형은 가로의 길이가 1이고 세로의 길이가  $\log_2 2n$ 이므로 넓이는  $\log_2 2n$ 이다.

점  $(2n+1, -\log_2(2n+2))$ 와 점  $(2n, 0)$ 을 연결한 선분을 대각선으로 갖고 가로는  $x$ 축과 평행한 직사각형은 가로의 길이가 1이고 세로의 길이가  $\log_2(2n+2)$ 이므로 넓이는  $\log_2(2n+2)$ 이다.

따라서 두 직사각형의 넓이의 차  $a_n$ 은

$$a_n = \log_2(2n+2) - \log_2 2n = \log_2\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{127} a_n = \sum_{n=1}^{127} \log_2\left(\frac{n+1}{n}\right) = \log_2 128 = 7$$

242) 정답 ④

$A\left(n, \frac{4}{n}\right)$ ,  $B\left(n, -\frac{2}{n}\right)$ ,  $C(n+1, 0)$ 로 이루어진 삼각형의 넓이는

$$a_n = \left(\frac{4}{n} - \left(-\frac{2}{n}\right)\right) \times 1 \div 2 = \frac{3}{n}$$

$$\sum_{k=1}^{10} \frac{9}{a_n a_{n+1}} = \sum_{k=1}^{10} n(n+1) = \frac{10 \times 11 \times 12}{3} = 440$$

243) 정답 ②

$$\sum_{k=1}^n a_k = n^2 \text{으로부터 } a_1 = 1 \text{이고}$$

$$a_n = \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k = n^2 - (n-1)^2 = 2n-1 \quad (n \geq 2)$$

$$\therefore a_n = 2n-1 \quad (n \geq 1)$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{10} \left( \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{2p+1} \right\} = \frac{21}{43}$$

$$1 - \frac{1}{2p+1} = \frac{42}{43}$$

$$\frac{1}{2p+1} = \frac{1}{43}$$

$$2p+1 = 43$$

$$\therefore p = 21$$

244) 정답 65

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \left\{ x - \frac{1}{k(k+1)} \right\}^2 \text{에서}$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \left\{ x^2 - \frac{2}{k(k+1)}x + \frac{1}{k^2(k+1)^2} \right\}$$

$$= nx^2 - 2x \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2(k+1)^2}$$

이때, 이차함수  $f(x)$ 에서  $x^2$ 의 계수  $n$ 이 자연수, 즉 양수이므로  $x = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$ 일 때  $f(x)$ 는 최솟값

$$\text{을 가지므로 } g(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \text{이다.}$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= \frac{1}{n} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{n+1} \text{이므로}$$

$$\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{g(n)} = \sum_{n=1}^{10} (n+1) = \frac{10(2+11)}{2} = 65$$

320) 정답 210

(가)와 (나) 식을 변변 빼면  $\sum_{n=1}^5 (|b_n| - b_n) = 60 \cdots \text{㉠}$

(나)와 (다) 식을 변변 빼면  $\sum_{n=1}^5 (|a_n| - a_n) = 16 \cdots \text{㉡}$

등비수열  $\{b_n\}$ 은 첫째항  $b_1$ 이 양수, 공비  $r$ 이 음수  
이므로

$b_n > 0$ 이면  $|b_n| = b_n$ ,  $b_n < 0$ 이면  $|b_n| = -b_n$ 이다.

따라서  $b_1 > 0, b_2 < 0, b_3 > 0, b_4 < 0, b_5 > 0$  이므로

㉠에서  $-2b_2 - 2b_4 = 60$

$$\therefore b_1 r(1+r^2) = -30$$

만족하는  $b_1$ 과  $r$ 은  $b_1 = 15, r = -1$ (i) 또는

$b_1 = 3, r = -2$ (iii) 또는  $b_1 = 1, r = -3$ (ii) 이다.

(i)  $b_1 = 15, r = -1$ 일 때

$$\sum_{n=1}^5 b_n = \frac{15(1 - (-1)^5)}{2} = 15 \text{이므로}$$

(가)에서  $\sum_{n=1}^5 a_n = 28$ 이다.

그런데  $\sum_{n=1}^5 a_n = \frac{5(a_1 + a_5)}{2} = 17$ 에서  $a_1, a_5$ 가 모두

정수이므로  $a_1 + a_5 = \frac{56}{5}$ 는 모순이다.

(ii)  $b_1 = 1, r = -3$ 일 때

$$\sum_{n=1}^5 b_n = \frac{1(1 - (-3)^5)}{2} = 122 \text{이므로}$$

(가)에서  $\sum_{n=1}^5 a_n = -79$ 이다.

그런데  $\sum_{n=1}^5 a_n = \frac{5(a_1 + a_5)}{2} = -79$ 에서  $a_1, a_5$ 가 모두

정수이므로  $a_1 + a_5 = -\frac{158}{5}$ 는 모순이다.

(iii)  $b_1 = 3, r = -2$ 일 때

$$\sum_{n=1}^5 b_n = \frac{3(1 - (-2)^5)}{3} = 33 \text{이므로}$$

(가)에서  $\sum_{n=1}^5 a_n = 10$ 이다.

그런데  $\sum_{n=1}^5 a_n = \frac{5(a_1 + a_5)}{2} = 10$ 에서  $a_1 + a_5 = 4$ 이다.

한편, ㉡에서  $\sum_{n=1}^5 |a_n| = 26$ 이므로

$\{a_n\}$ 의 첫째항  $a_1$ 은 음의 정수이고 공차  $d$ 는 자연수  
이므로  $2a_1 + 4d = 4$ 에서  $a_1 + 2d = 2$ 을 만족하는  $a_1$

과  $d$ 를 정한 뒤  $\sum_{n=1}^5 |a_n|$ 을 구해보면

$d = 1$ 일 때  $a_1 = 0 \Rightarrow$ 모순

$d = 2$ 일 때  $a_1 = -2$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^5 |a_n| = |-2| + 0 + 2 + 4 + 6 = 14$$

$d = 3$ 일 때  $a_1 = -4$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^5 |a_n| = |-4| + |-1| + 2 + 5 + 8 = 20$$

$d = 4$ 일 때  $a_1 = -6$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^5 |a_n| = |-6| + |-2| + 2 + 6 + 10 = 26$$

따라서 등차수열  $\{a_n\}$ 은  $a_1 = -6, d = 4$ 이다.

따라서  $a_n = 4n - 10, b_n = 3 \times (-2)^{n-1}$

$a_7 = 18, b_7 = 192$

따라서  $a_7 + b_7 = 210$