랑데뷰 수학

수능을 완성하다!-미적분A

목차

NOTE

유형 1 수열의 극한에 대한 기본성질

출제유형 | 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이용하여 극한값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하고

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ (α, β는 실수) 일 때

(1) $\lim_{n\to\infty} ka_n = k\lim_{n\to\infty} a_n = k\alpha$ (단, k는 상수)

(2) $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha+\beta$

(3) $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha-\beta$

(4) $\lim_{n\to\infty} a_nb_n = \lim_{n\to\infty} a_n \times \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha\beta$

(5) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$ (단, $b_n \neq 0$, $\beta \neq 0$)

1)

모든 항이 양수인 세 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$이

$(2n-1)^2 b_n = (n^2+1)c_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$,

$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n+c_n} = 4$을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$의 값은?[

① 4 ② $\frac{15}{4}$ ③ -1 ④ $-\frac{15}{4}$ ⑤ -4

2)

수열 $\{a_n\}$이 $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n) = \frac{1}{4}$를 만족시킬 때,

$\lim_{n\to\infty}(a_{n+20}-a_n)$ 의 값은?

① $\frac{15}{4}$ ② 5 ③ $\frac{25}{4}$ ④ $\frac{15}{2}$ ⑤ $\frac{35}{3}$

유형 6 급수의 계산

출제유형 | 급수와 급수의 성질을 이해하고 여러 가지 급수의 합을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | (1) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$에서 첫째항부터 제 n항까지의 부분합을 S_n이라 할 때, 수열 $\{S_n\}$의 극한값으로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 합을 구한다.

(2) 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 모두 수렴할 때.

① $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n = k\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (단, k는 상수)

② $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

③ $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

17)

모든 항이 양수인 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\angle \mathrm{ABC} = \frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC의 세 변의 길이가 $\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt[4]{a_{n+1}}$, $\overline{\mathrm{BC}} = \sqrt{b_n}$, $\overline{\mathrm{AC}} = \sqrt[4]{a_n}$이고 $\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{AC}} = \sqrt[4]{2} : \sqrt[4]{3}$이 성립한다.

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 10$일 때, a_1의 값은?

① 10 ② 50 ③ 80 ④ 100 ⑤ 130

18)

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_n = -\frac{\cos n\pi}{n^2}$이고 수열 $\{b_n\}$이

$$b_n = \begin{cases} a_n & (a_n < a_{n+1}) \\ a_{n+1} & (a_n \geq a_{n+1}) \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{b_{2n-1} b_{2n+1}}$의 값은?

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

32)

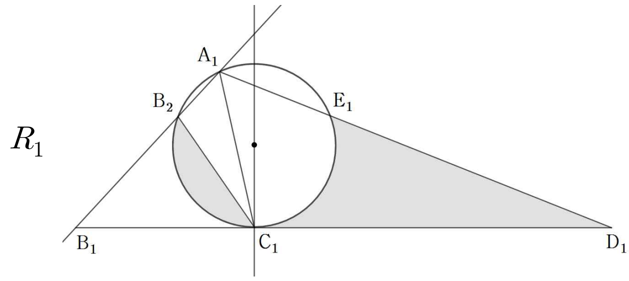
그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=3$, $\overline{A_1C_1}=2$이고 $\angle B_1A_1C_1=\dfrac{\pi}{3}$인 삼각형 $A_1B_1C_1$이 있다. 점 A_1을 지나고 직선 B_1C_1위의 점 C_1에 접하는 원이 직선 A_1B_1과 만나는 점을 B_2라 하자.

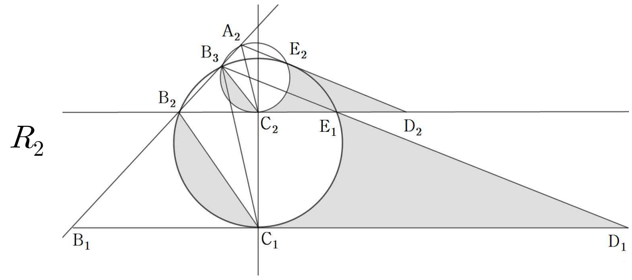
직선 B_1C_1위에 $\angle C_1A_1D_1=\dfrac{\pi}{3}$가 되도록 하는 점을 D_1라 하고 선분 A_1D_1이 원과 만나는 점을 E_1이라 하자. 선분 B_2C_1과 호 B_2C_1로 둘러싸인 부분과 호 C_1E_1, 선분 C_1D_1, 선분 D_1E_1으로 둘러싸인 부분인 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 두 점 B_2, E_1을 지나는 직선이 직선 B_1D_1에 평행하고 점 C_1을 지나는 직선과 만나는 점을 C_2라 하고 점 C_2를 지나고 선분 A_1C_1에 평행한 직선이 직선 A_1B_1을 지나는 직선과 만나는 점을 A_2라 하자. 점 A_2를 지나고 직선 B_2C_2위의 점 C_2에 접하는 두 번째 원을 그리고 직선 A_2B_1과 두 번째 원이 만나는 점을 $B_3(A_1)$, $\angle C_2A_2D_2=\dfrac{\pi}{3}$가 되도록 하는 점을 D_2라 하고 선분 A_2D_2가 두 번째 원과 만나는 점을 E_2라 하자.

선분 B_3C_2과 호 B_3C_2로 둘러싸인 부분과 호 C_2E_2, 선분 C_2D_2, 선분 D_2E_2으로 둘러싸인 부분인 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$의 값은? (단, $A_1=B_3$)





① $\dfrac{341}{45\sqrt{3}}$ ② $\dfrac{343}{45\sqrt{3}}$ ③ $\dfrac{23}{3\sqrt{3}}$
④ $\dfrac{81}{11\sqrt{3}}$ ⑤ $\dfrac{83}{11\sqrt{3}}$

1단원 수열의 극한 단원평가

35)

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 일반항이

$$a_n = p \times (-1)^n + q,\ b_n = \frac{(-1)^{n+1}-2}{3}$$

이다.

두 수열 $\{a_n + b_n\}$, $\{a_n b_n\}$이 모두 수렴한다고 할 때, $\lim_{n\to\infty}\{(a_n)^2 + (b_n)^2\} = \frac{\beta}{\alpha}$이다. $\alpha + \beta$의 값을 구하시오.

(단, p, q는 실수이고 α, β는 서로소인 자연수이다.)

36)

집합 $\mathrm{A} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$의 두 원소 a, b에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{12\times(2a)^n + 12\times(6b)^n}{(2a)^{n+1} + (6b)^{n+1}}$$

의 값이 자연수가 되도록 하는 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하시오.

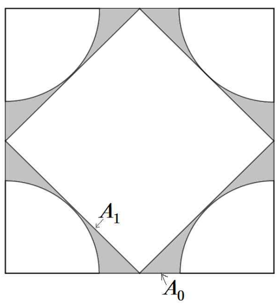
37)

첫째항이 $-\frac{15}{8}$이고 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 직선 $y = a_n$과 $y = \frac{-2x+17}{x-9}$의 교점의 x좌표를 x_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x_{n+1}}} - \frac{1}{\sqrt{x_n}}\right)$의 값은?

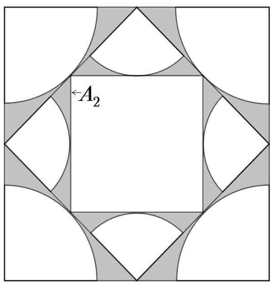
① $-\frac{4}{3}$ ② $-\frac{10}{9}$ ③ $-\frac{8}{9}$ ④ $-\frac{2}{3}$ ⑤ $-\frac{4}{9}$

53)

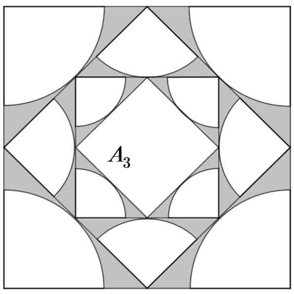
그림과 같이 한 변의 길이가 4 인 정사각형 A_0 가 있다. A_0 의 각 변의 중점을 연결한 사각형을 A_1 이라 하고 A_0 와 A_1 으로 이루어진 4 개의 삼각형에서 A_0 의 각 꼭짓점을 중심으로 하고 A_1 의 한 변에 접하는 부채꼴을 제외한 부분을 각각 색칠하여 얻은 그림을 [그림1]이라 하자. [그림1]에서 A_1 의 각 변의 중점을 연결한 사각형을 A_2 라 하고 A_1 과 A_2 로 이루어진 4 개의 삼각형에서 [그림1]과 같은 방법으로 색칠하여 얻은 그림을 [그림2]라 하자. [그림2]에서 A_2 의 각 변의 중점을 연결한 사각형을 A_3 이라 하고 A_2 와 A_3 으로 이루어진 4 개의 삼각형에서 같은 방법으로 색칠하여 얻은 그림을 [그림3]이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 [그림n]에서 색칠되어 있는 부분의 넓이의 합을 S_n 이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$ 의 값은?



[그림1]



[그림2]



[그림3]

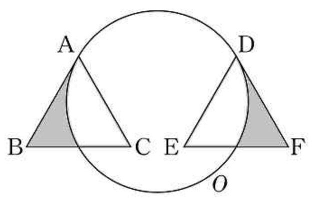
…

① $16-4\pi$ ② $32-4\pi$ ③ $32-6\pi$
④ $32-8\pi$ ⑤ $64-8\pi$

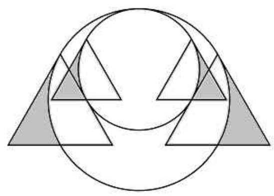
54)

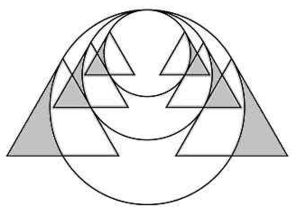
반지름의 길이가 $\sqrt{3}$ 인 원 O가 있다. 그림과 같이 원 O 위의 한 점 A 에 대하여 정삼각형 ABC 를 높이가 원 O의 반지름의 길이와 같고 선분 BC 의 중점이 원 O 위의 점이 되도록 그린다. 그리고 정삼각형 ABC 와 합동인 정삼각형 DEF 를 점 D 가 원 O 위에 있고 네 점 B, C, E, F 가 한 직선 위에 있도록 그린다. 두 정삼각형 ABC 와 DEF 에서 원 O와 겹치지 않는 부분을 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자. 그림 R_1 에서 두 선분 AC, DE 에 동시에 접하고 원 O에 내접하는 원을 그린 후, 새로 그려진 원에 그림 R_1 을 얻은 것과 같은 방법으로 만들어지는 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$ 의 값은?



R_1


R_2


R_3

…

…

① $\frac{11}{2}\sqrt{3}-\frac{11}{5}\pi$ ② $\frac{11}{2}\sqrt{3}-\frac{9}{5}\pi$
③ $\frac{9}{2}\sqrt{3}-\frac{11}{5}\pi$ ④ $\frac{9}{2}\sqrt{3}-\frac{9}{5}\pi$
⑤ $\frac{7}{2}\sqrt{3}-\frac{9}{5}\pi$

64)

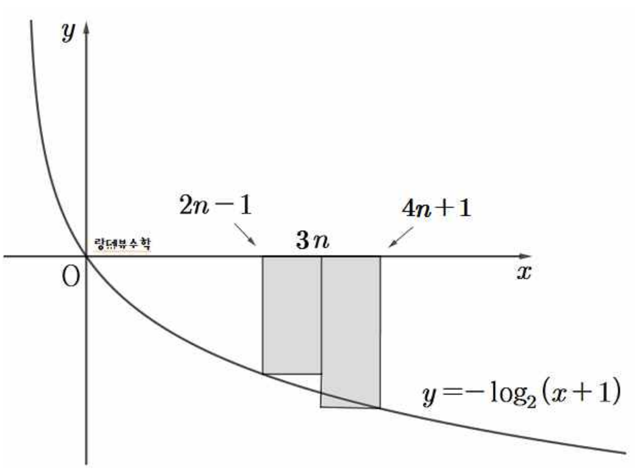
자연수 n에 대하여

$$a_n = \lim_{x \to 0+} \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + k\right) + \frac{1}{2}\ln x}{\sqrt{x}}$$ 라 할 때,

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$의 값을 구하시오.

65)

그림과 같이 자연수 n에 대하여 곡선 $y = -\log_2(x+1)$ 위의 점 $(2n-1, -\log_2 2n)$과 점 $(3n, 0)$을 연결한 선분을 대각선으로 갖고 가로는 x축과 평행한 직사각형과 점 $(4n+1, -\log_2(4n+2))$와 점 $(3n, 0)$을 연결한 선분을 대각선으로 갖고 가로는 x축과 평행한 직사각형의 넓이의 차를 a_n이라 하자. $b_n = a_n - (n+1)$일 때, $\lim_{n \to \infty} b_n$의 값은?

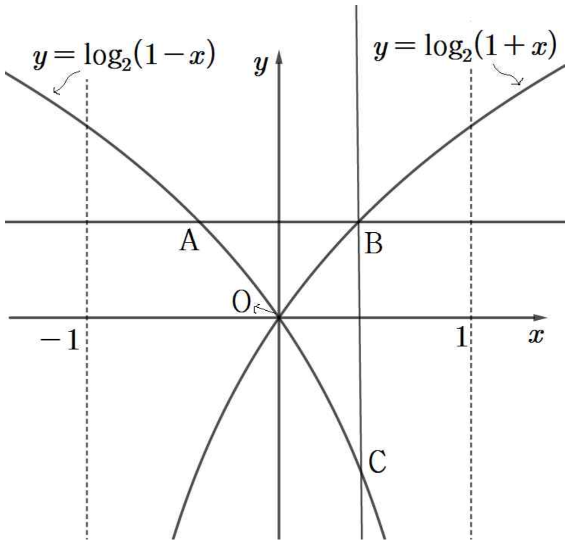


① $\frac{1}{\ln 2}$ ② $\frac{1}{2\ln 2}$ ③ $\frac{2}{\ln 2}$ ④ $\frac{1}{\log 2}$ ⑤ $\log 2$

66)

그림과 같이 양수 k에 대하여 직선 $y = k$ $(0 < k < 1)$가 두 함수 $y = \log_2(1-x)$, $y = \log_2(1+x)$의 그래프와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 B를 지나고 x축에 수직인 직선이 $y = \log_2(1-x)$의 그래프와 만나는 점을 C라 하자.

$\lim_{k \to 0+} \frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$의 값은?



① $\frac{1}{2\ln 2}$ ② $\frac{1}{\ln 2}$ ③ $\frac{2}{\ln 2}$ ④ 1 ⑤ $\ln 2$

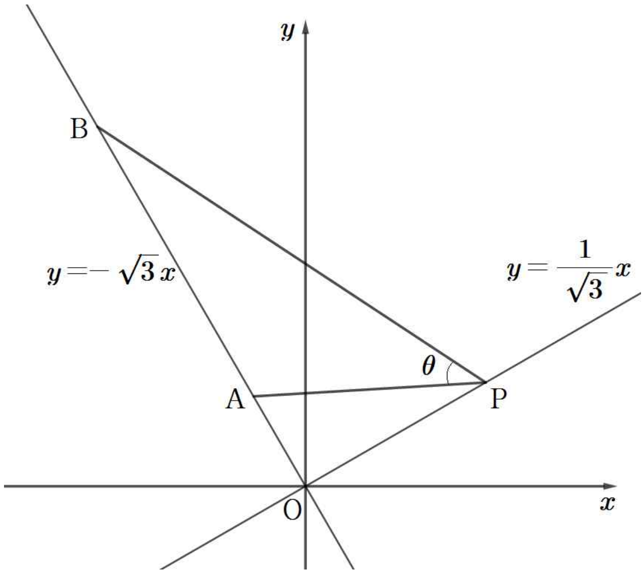
73)

$\overline{AB}=\overline{DC}$인 등변사다리꼴 ABCD에서 $\angle A=\alpha$, $\angle B=\beta$라 하자. $\tan(\alpha-\beta)=-\frac{4}{3}$일 때, $\sec^2\alpha$의 값은? (단, $0<\beta<\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ 이다.)

① $\frac{6}{5}$ ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

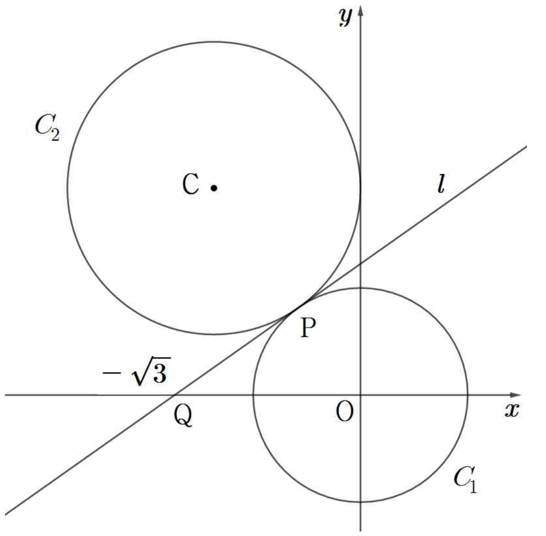
74)

그림과 같이 $y=-\sqrt{3}x$위의 두 점 $A(-1,\ \sqrt{3})$, $B(-4,\ 4\sqrt{3})$와 $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$ 위의 점 P에 대하여 $\angle APB=\theta$ 라고 할 때, $\tan\theta$ 의 값이 최대가 되는 점 P의 x좌표를 a라 하자. a^2의 값을 구하시오. (단, $a>0$)



75)

그림과 같이 좌표평면에서 원 C_1 : $x^2+y^2=1$ 위의 제2사분면에 있는 점 P에서의 접선 l과 x축이 만나는 점 Q의 x좌표는 $-\sqrt{3}$이다. 원 C_1과 점 P에서 접하고 y축에 동시에 접하는 원을 C_2라 하고, 원 C_2의 중심을 C라 하자. $\angle CQO=\theta$일 때, $\tan\theta$의 값은?



① $\sqrt{6}+\sqrt{2}$ ② $\sqrt{6}+2\sqrt{2}$

③ $2\sqrt{6}+\sqrt{2}$ ④ $\frac{3}{2}\sqrt{6}+2\sqrt{2}$

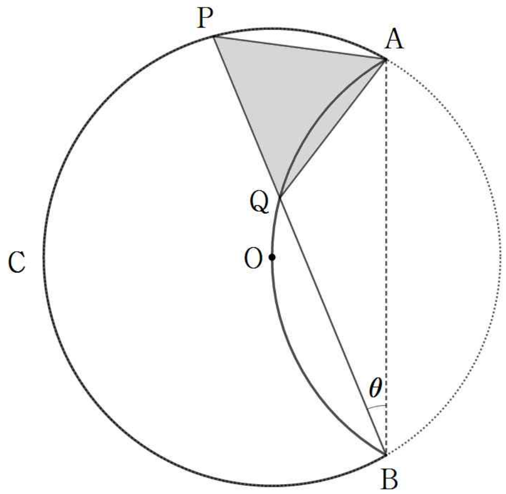
⑤ $\frac{5}{2}\sqrt{6}+2\sqrt{2}$

8월2차

91)

그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심이 O인 원 C가 있다. 원 위의 두 점 A, B에 대하여 선분 AB를 접는 선으로 하여 원 C의 일부를 접으면 원의 중심 O가 원 C의 접힌 부분의 원주위에 있다. 점 B를 지나는 직선이 원 C와 만나는 점을 P, 원 C의 접힌 부분과 만나는 점을 Q라 하자. $\angle ABP=\theta$일 때, 삼각형 APQ의 넓이를 $S(\theta)$, 선분 BQ의 길이를 $l(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta\{\sqrt{3}-l(\theta)\}}$의 값은?

(단, $0<\theta<\frac{\pi}{6}$)



① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

92)

사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x>0$에서 $\lim_{x\to1}\frac{\ln f(x)}{x-1}=2$

(나) $\lim_{x\to0}\frac{f(x^2)}{(1-\cos2x)(e^{3x}-1)\sin4x}=\frac{1}{12}$

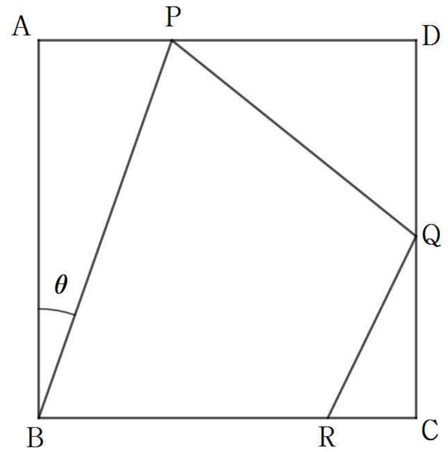
$f(2)$의 값을 구하시오.

93)

한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD에서 그림과 같이 선분 AD위의 점 P와 선분 CD 위의 점 Q, 선분 BC위의 점 R을

$$\angle ABP : \angle PQD : \angle QRC = 1:2:3$$

이 되도록 잡는다. $\angle ABP=\theta$라 할 때, $\lim_{\theta\to0+}\{\theta(\overline{RC}+\cot3\theta\cot2\theta)\}$의 값은?

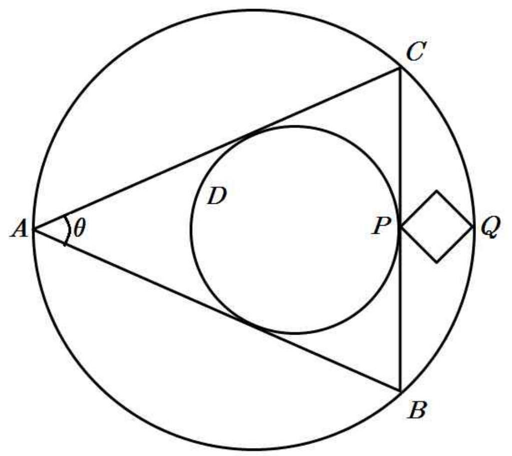


① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

2단원 미분 단원 평가

143)

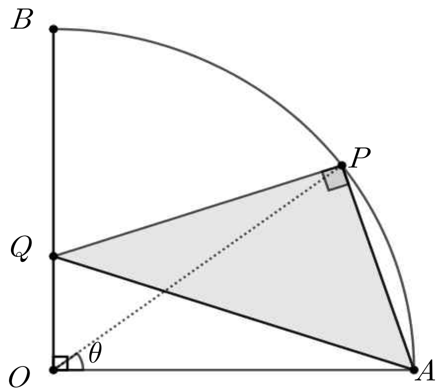
그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원 위의 세 점 A, B, C 에 대하여 $\angle CAB=\theta$이고 삼각형 ABC는 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변 삼각형이다. 삼각형 내부에서 삼각형 세 변에 모두 접하는 원 D가 있다. 원 D의 넓이를 $f(\theta)$라 하고 원 D와 $\overline{BC}$의 접점을 점 P라 하자. 직선 AP의 연장선이 큰 원과 만나는 점을 Q라 할 때, $\overline{PQ}$를 대각선으로 하는 정사각형의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\theta^2\times f(\theta)}{g(\theta)}$의 값은? (단, θ는 예각이다.)



① $\dfrac{17}{2}\pi$ ② 8π ③ $\dfrac{15}{2}\pi$ ④ 7π ⑤ $\dfrac{13}{2}\pi$

144)

그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\dfrac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB위의 점 P와 선분 OB위의 점 Q는 $\angle APQ=\dfrac{\pi}{2}$을 유지한 채 움직인다. $\angle POA=\theta$일 때, 삼각형 APQ의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{S(\theta)}{\theta}$의 값은?



① $\dfrac{5}{2}$ ② 2 ③ $\dfrac{3}{2}$ ④ 1 ⑤ $\dfrac{1}{2}$

유형 14 곡선의 길이

출제유형 | 곡선 $y=f(x)$가 주어질 때, $a \le x \le b$에서 곡선 $y=f(x)$의 길이를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | $a \le x \le b$ 에서 곡선 $y=f(x)$의 길이 l은

$$l=\int_{a}^{b}\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

임을 이용하여 문제를 해결한다.

247)

$x=0$에서 $x=t$ $\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$까지 함수 $f(x)=\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}\sin 2x-\frac{1}{2}\tan x$의 곡선의 길이를 $l(t)$라 하자. 실수 $k\left(0<k<\frac{\pi}{2}\right)$에 대하여 $l(k)-f(k)=1$을 만족시키는 실수 k의 값은?

① $\frac{\pi}{6}$ ② $\frac{\pi}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{\pi}{3}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

248)

정의역이 $\left\{x \mid \frac{\pi}{3}<x<\frac{\pi}{2}\right\}$인 함수 $f(x)=\int_{\frac{\pi}{3}}^{x}\ln(\sin\theta)\,d\theta$가 있다. $\frac{\pi}{3}<t<\frac{\pi}{2}$인 실수 t에 대하여 $\frac{\pi}{3}\le x\le t$일 때 곡선 $y=f'(x)$의 곡선의 길이를 $l(t)$라 하자.

$\lim_{t\to\frac{\pi}{2}-} l(t)+\lim_{t\to\frac{\pi}{3}+}\ln\left\{\frac{l(t)}{3t-\pi}\right\}$의 값은?

① $\ln\frac{2}{3}$ ② $\ln\frac{3}{2}$ ③ 1 ④ $\ln 2$ ⑤ $2\ln 3$

298)

곡선 $y=e^x$ $(0 \le x \le 2)$위의 임의의 두 점 P, Q에 대하여 선분 PQ의 중점 R이 움직이는 영역의 넓이는? (단, 두 점 P, Q가 일치할 때 점 R는 점 P 또는 점 Q로 생각한다.)

① 1　② 2　③ e　④ 3　⑤ $e+1$

299)

실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖고 $f(0)=1$, $f(1)=4$를 만족시키는 모든 함수 $f(x)$에 대하여 $\int_0^1 \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$의 최솟값을 m이라 할 때, m^2의 값을 구하시오.

300)

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t \ge 0)$에서의 위치 (x, y)가 $x=\cos t$, $y=1$일 때, 시각 $t=0$에서 시각 $t=2\pi$까지 점 P가 움직인 거리와 점 P가 나타내는 곡선의 길이의 합을 구하시오.

따라서

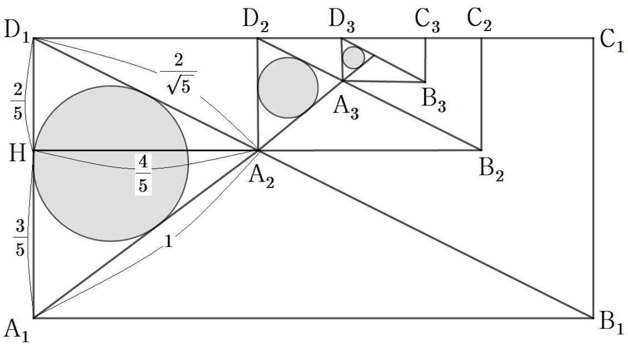
$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}+1}{2}}{1-\frac{7-4\sqrt{3}}{4}}$$

$$=\frac{\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}+1}{2}}{\frac{4\sqrt{3}-3}{4}}=\frac{8\pi-6\sqrt{3}-6}{12\sqrt{3}-9}$$

25) 정답 ④

다음 그림과 같이 A_2에서 $\overline{A_1D_1}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{D_1A_2}:\overline{D_1B_1}=2:5$이므로

삼각형 D_1HA_2와 삼각형 $D_1A_1B_1$은 닮음비가 $2:5$인 닮은 도형이다.



따라서 $D_1A_1A_2$에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r이라 하면

$\overline{A_2H}=\frac{4}{5}$, $\overline{A_1A_2}=1$에서 삼각형 $A_1A_2D_1$의 넓이는

$\frac{1}{2}\times1\times\frac{4}{5}=\frac{2}{5}$ 이므로

$$\frac{2}{5}=\frac{1}{2}\times\left(1+1+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\times r$$

$r=\frac{2}{5}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1}=\frac{2}{5+\sqrt{5}}=\frac{5-\sqrt{5}}{10}$ 이다.

따라서 $S_1=\pi\left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)^2$

한편 $\overline{D_2A_2}=\frac{2}{5}$ 이므로 닮음 관계가 $1:\frac{2}{5}$ 이다.

따라서 공비는 $\frac{4}{25}$

$\sum_{n=1}^{\infty}S_n$

$$=\frac{\pi\left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)^2}{1-\frac{4}{25}}=\frac{\pi\left(\frac{30-10\sqrt{5}}{100}\right)}{\frac{21}{25}}=\frac{5(3-\sqrt{5})}{42}\pi$$

26) 정답 ①

삼각형 $A_1M_1D_1$의 넓이는 $\frac{1}{2}\times2\times2=2$이고

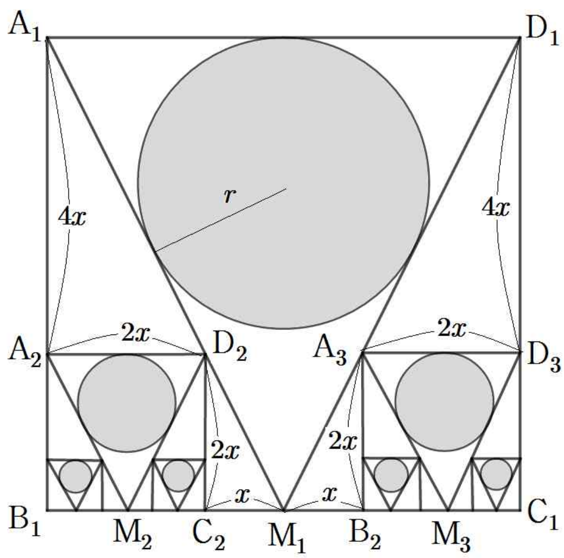
$\overline{A_1M_1}=\overline{D_1M_1}=\sqrt{5}$ 이므로 삼각형 $A_1M_1D_1$에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r이라 두면

$\frac{1}{2}\times(2+\sqrt{5}+\sqrt{5})\times r=2$에서

$$r=\frac{2}{\sqrt{5}+1}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

따라서 $S_1=\pi\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}\pi$

그림에서 $\overline{A_1B_1}:\overline{B_1M_1}=2:1$이므로 $\overline{C_2M_1}=x$라 두면 $\overline{C_2D_2}=2x$이고



정사각형 $A_2B_1C_2D_2$에서 $\overline{A_2D_2}=2x$이다.

또한 $\overline{A_1A_2}=4x$이다.

따라서 $\overline{A_1B_1}=4x+2x=2$에서 $x=\frac{1}{3}$이다.

80) 정답 ⑤

선분 AB가 원 C 의 지름이므로

$\angle \mathrm{ACB} = \angle \mathrm{ADB} = \dfrac{\pi}{2}$ 이다.

$\angle \mathrm{CAB} = \alpha$, $\angle \mathrm{DAB} = \beta$라 하면

$\overline{\mathrm{AC}} \times \overline{\mathrm{AD}} - \overline{\mathrm{BC}} \times \overline{\mathrm{BD}}$
$= (2\cos\beta)(2\cos\beta) - (2\sin\alpha)(2\sin\alpha)$
$= 4\cos(\beta+\alpha) = \dfrac{20}{13}$

따라서 $\cos(\alpha+\beta) = \dfrac{5}{13}$

그러므로 $\sin(\alpha+\beta) = \dfrac{12}{13}$

삼각형 ACD에서 사인법칙을 적용하면

$\dfrac{\overline{\mathrm{CD}}}{\sin(\alpha+\beta)} = 2$

$\therefore\ \overline{\mathrm{CD}} = 2 \times \dfrac{12}{13} = \dfrac{24}{13}$

[랑데뷰팁] -톨레미 정리&브라마굽타 항등식

$\overline{\mathrm{AC}} = a$, $\overline{\mathrm{BC}} = b$, $\overline{\mathrm{AD}} = c$, $\overline{\mathrm{BD}} = d$, $\overline{\mathrm{CD}} = x$라 할 때,

$a^2 + b^2 = 4,\ c^2 + d^2 = 4$

$ad + bc = 2x$ ($\because$ 톨레미 정리)

$ac - bd = \dfrac{20}{13}$ (조건)

브라마굽타-피보나치 항등식

$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ad+bc)^2 + (ac-bd)^2$

$4 \times 4 = (2x)^2 + \left(\dfrac{20}{13}\right)^2$

$4x^2 = 16 - \dfrac{400}{169}$

$x^2 = 4 - \dfrac{100}{169} = \dfrac{576}{169}$

$x = \dfrac{24}{13}$

81) 정답 50

삼각형 OCA가 정삼각형이므로 $\angle \mathrm{OAD} = \dfrac{\pi}{3}$ 이다.

삼각형 OAD에서 $\angle \mathrm{ODA} = \dfrac{2}{3}\pi - \theta$이므로

사인법칙에 의해 $\dfrac{\overline{\mathrm{OA}}}{\sin\left(\dfrac{2}{3}\pi - \theta\right)} = \dfrac{\overline{\mathrm{OD}}}{\sin\dfrac{\pi}{3}}$

$$\overline{\mathrm{OD}} = \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\sin\left(\frac{2}{3}\pi - \theta\right)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin\frac{2}{3}\pi\cos\theta - \cos\frac{2}{3}\pi\sin\theta}$$
$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta}$$

따라서

$$f(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{OA}} \times \overline{\mathrm{OD}} \times \sin\theta$$
$$= \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta} \times \sin\theta$$
$$= \frac{\sqrt{3}\sin\theta}{2(\sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta)}$$

이다.

$\angle \mathrm{BEA} = \dfrac{\theta}{2}$, $\angle \mathrm{EOC} = \dfrac{2}{3}\pi$이다.

삼각형 EOF에서 $\angle \mathrm{EFO} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\theta}{2}$이므로

사인법칙에 의해 $\dfrac{\overline{\mathrm{OE}}}{\sin\left(\dfrac{\pi}{3} - \theta\right)} = \dfrac{\overline{\mathrm{OF}}}{\sin\dfrac{\theta}{2}}$

$$\overline{\mathrm{OF}} = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)} = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\pi}{3}\cos\theta - \cos\frac{\pi}{3}\sin\theta}$$
$$= \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta - \frac{1}{2}\sin\theta} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}}{\sqrt{3}\cos\theta - \sin\theta}$$

239) 정답 18

$f(-x)=\dfrac{(-x)^3-2}{-x}=-\dfrac{x^2+2}{x}=-g(x)$

즉, 함수 $f(x)$와 함수 $g(x)$는 y축 대칭이다.

$f(x)=x^2-\dfrac{2}{x}$에서

$f'(x)=2x+\dfrac{2}{x^2}=\dfrac{2(x^3+1)}{x^2}$

$f'(x)=0$의 해는 $x=-1$이다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$	↘	3	↗		↗

$y=f(x)$와 x축의 교점의 좌표는

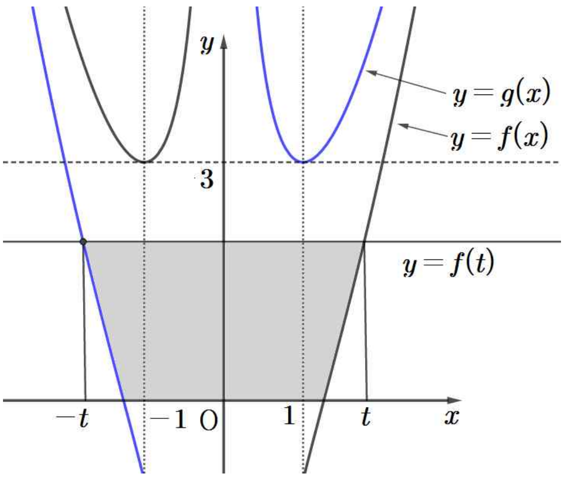
$\dfrac{x^3-2}{x}=0$에서 $x=\sqrt[3]{2}$ 이고

$y=f(x)$와 $y=3$의 교점의 좌표는

$\dfrac{x^3-2}{x}=3$에서 $x^3-3x-2=0\rightarrow(x+1)^2(x-2)=0$

$\rightarrow x=2$이다.

따라서 $f(x)$의 그래프와 $g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



그러므로 $S(t)$는 전체 직사각형 넓이에서 $y=f(x)$와 $x=t$, x축으로 둘러싸인 부분의 넓이의 2배를 뺀 값과 같다.

$S(t)=2t\times\left(\dfrac{t^3-2}{t}\right)-2\displaystyle\int_{\sqrt[3]{2}}^{t}\left(\dfrac{x^3-2}{x}\right)dx\cdots$㉠

$=2t^3-4-2\left[\dfrac{1}{3}x^3-2\ln x\right]_{\sqrt[3]{2}}^{t}$

$=2t^3-4-\dfrac{2}{3}t^3+4\ln t+2\left(\dfrac{2}{3}-\dfrac{2}{3}\ln 2\right)$

$=\dfrac{4}{3}t^3+4\ln t-\dfrac{8}{3}-\dfrac{4}{3}\ln 2$

$\displaystyle\lim_{h\rightarrow 0-}\dfrac{S(2+h)-S(2)}{h}=S'(2)$에서

$S'(t)=4t^2+\dfrac{4}{t}$이므로

$S'(2)=16+2=18$

[다른 풀이]

㉠에서 양변 미분하면

$S'(t)=6t^2-2\left(t^2-\dfrac{2}{t}\right)=4t^2+\dfrac{4}{t}$이고

$S'(2)=18$

240) 정답 ①

점 P의 좌표를 $(t,\ t+t\sin t)$라 하고 접선 l의 방정식을 구해보자.

$f'(x)=1+\sin x+x\cos x$

따라서 접선 l의 기울기는 $1+\sin t+t\cos t$이다.

$y=(1+\sin t+t\cos t)(x-t)+t+t\sin t$

접선 l이 $(0,\ 0)$을 지나므로

$0=-t-t\sin t-t^2\cos t+t+t\sin t$

$t^2\cos t=0$에서 $0<t<4$에서 $t=\dfrac{\pi}{2}$이다.

점 $\mathrm{P}\left(\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right)$이므로 접선 l의 방정식은 $y=2x$이다.

따라서 S는

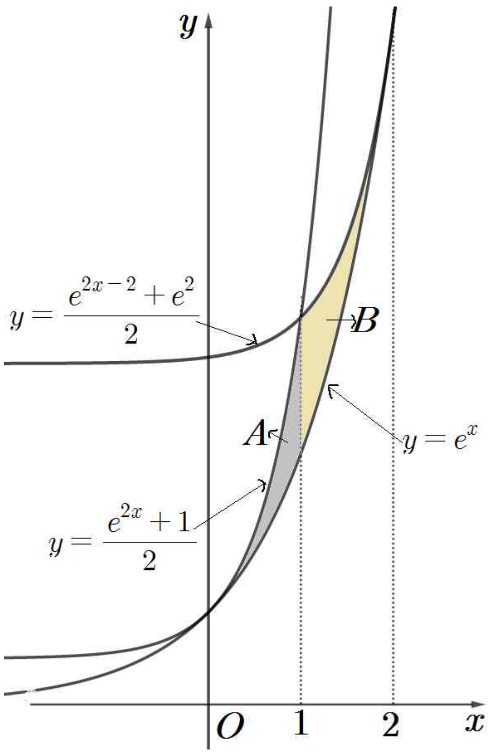
$S=\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\{2x-(x+x\sin x)\}dx$

$=\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(x-x\sin x)dx$

$=\left[\dfrac{1}{2}x^2\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}-\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx$

$=\dfrac{\pi^2}{8}-\left[x(-\cos x)-(-\sin x)\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$

다음 그림과 같이 구하는 영역의 넓이는 $A+B$이다.



$$A=\int_0^1\left(\frac{e^{2x}+1}{2}-e^x\right)dx=\frac{5-4e+e^2}{4}$$

$$B=\int_1^2\left(\frac{e^{2x-2}+e^2}{2}-e^x\right)dx=\frac{-1+4e-e^2}{4}$$

이므로

$$A+B=\frac{(5-4e+e^2)+(-1+4e-e^2)}{4}$$

$$=1$$

299) 정답 10

$\int_0^1\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$는 곡선 $y=f(x)$ $(0\le x\le 1)$의 길이를 의미하므로 이 곡선의 길이의 최솟값은 두 점 $(0,\ 1)$, $(1,\ 4)$을 잇는 선분의 길이와 같다.
따라서 구하는 최솟값은

$\sqrt{(1-0)^2+(4-1)^2}=\sqrt{10}$

따라서 $m=\sqrt{10}$

$\therefore\ m^2=10$

300) 정답 6

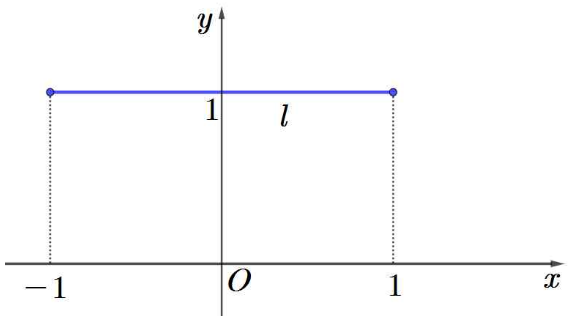
점 P가 움직인 거리 d를 구해보자.

$$d=\int_0^{2\pi}\sqrt{(-\sin t)^2+(0)^2}\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi}|\sin t|\,dt=4\times\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,dt$$

$$=4\left[-\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=4$$

따라서 점 P가 움직인 거리는 4이다.
점 P가 나타내는 곡선의 길이 l을 구해보자.
점 $P(\cos t,\ 1)$이라 할 때
$t=0$이면 $P(1,\ 1)$
$t=\pi$이면 $P(-1,\ 1)$
$t=2\pi$이면 $P(1,\ 1)$이다.
따라서 점 P가 나타내는 곡선은 다음 그림과 같으므로 곡선의 길이는 2이다.



따라서 움직인 거리와 곡선의 길이의 합은 6이다.