랑데뷰 수학

수능을 완성하다!-미적분B

목차

유형 2 수열의 극한의 활용

출제유형 | 주어진 방정식이나 함수의 그래프 및 도형에서 일반항을 찾아 극한값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 주어진 함수의 그래프의 성질, 도형의 성질을 이용하여 수열의 일반항을 찾을 수 있어야 한다.

2)

수열 $\{a_n\}$은 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $a_1 = 1$
>
> (나) $a_{n+1} = \dfrac{\sqrt{a_n^2+1}-1}{a_n}$

이때, $\lim_{n\to\infty} 2^n a_n$의 값은?

① $\sqrt{2}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{\pi}{2}$ ④ 2 ⑤ π

3)

수열 $\{a_n\}$은 다음 조건을 만족시킨다.

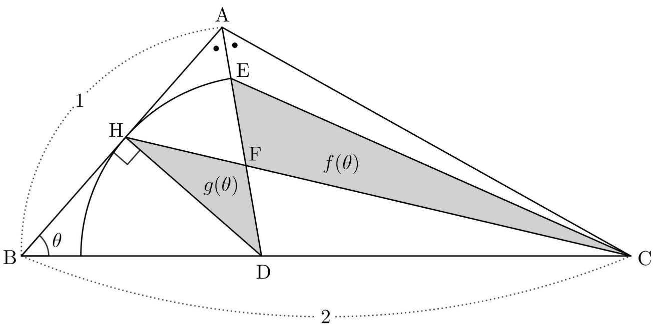
> (가) $a_1 = \dfrac{1}{2}$
>
> (나) $a_n = 2a_{n+1}\sqrt{1-a_{n+1}^2}$

이때, $\lim_{n\to\infty} 2^n a_n$의 값은?

① 0 ② $\frac{\pi}{12}$ ③ $\frac{\pi}{3}$ ④ $\sqrt{2}$ ⑤ 2

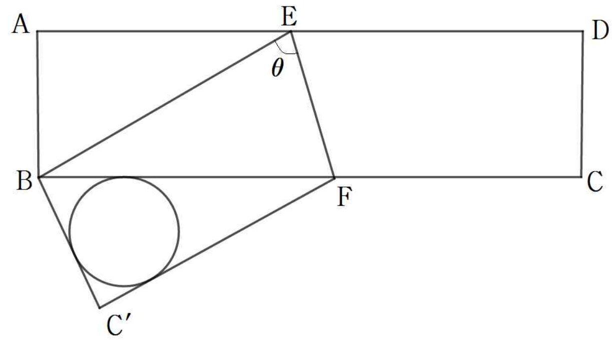
12)

그림과 같이 $\overline{AB}=1$, $\overline{BC}=2$인 삼각형 ABC에 대하여 각 A의 이등분선과 선분 BC가 만나는 점을 D, 점 D에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자. 중심이 D이고 반지름의 길이가 DH인 원이 선분 AD와 만나는 점을 E, 선분 HC가 선분 DE와 만나는 점을 F라 하자. $\angle ABC=\theta$라 할 때, 삼각형 CEF의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 DFH의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)-g(\theta)}{\theta^3}=a$일 때, $80a$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$)



13)

그림과 같이 세로의 길이가 2인 직사각형 모양의 종이 ABCD를 점 D가 점 B에 겹쳐지게 접을 때 점 C가 이동된 점을 C′라 하고 접는 선을 $\overline{EF}$라 하자. $\overline{DE}=f(\theta)$, $\angle BEF=\theta$라 할 때, 삼각형 BC′F에 내접하는 원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$라 하자. 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $\overline{CD}=2$)



| 보 기 |

ㄱ. $\tan\theta=\frac{f(\theta)+\sqrt{\{f(\theta)\}^2-4}}{2}$

ㄴ. $r(\theta)=\frac{2\sqrt{\{f(\theta)\}^2-4}}{f(\theta)+2+\sqrt{\{f(\theta)\}^2-4}}$

ㄷ. $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}+}\frac{\tan\theta-1}{r(\theta)}=1$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

53)

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases} xf(x) & (x \geq 0) \\ xf(-x) & (x<0) \end{cases}$$

이고 $g(x)$의 역함수를 $h(x)$라 할 때, $g(x)$와 $h(x)$는 다음 조건을 만족한다.

(가) 함수 $|g(x)-h(x)|$는 실수 전체에서 미분 가능하다.
(나) 방정식 $g(x)-h(x)=0$의 근을 작은 수부터 차례대로 나열하면 α_1, α_2, α_3 이다.
(다) $k(x)=\{h(x)\}^2$이라 할 때, $k'(\alpha_3)=\dfrac{4}{3}$이다.

$f(1)=2$일 때, $9f(2)$의 값을 구하시오.

54)

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f(x)e^{x-1}$$

이라 하자.
실수 t에 대하여 함수 $y=|g(x)-g(t)|$가 미분가능하지 않은 실수 x의 개수를 $h(t)$라 할 때, 함수 $h(t)$는 $t=\alpha$에서만 불연속이고 $g(\alpha)=2$이다.
함수 $y=|g(x)-t|$가 미분가능하지 않은 실수 x의 개수를 $k(t)$라 하자. 함수 $k(t)$가 불연속인 t의 값을 크기가 작은 거부터 차례로 β_1, β_2, $\cdots$, β_n이라 할 때, $\beta_n \times f(\alpha-\beta_1)$의 값을 구하시오.

77)

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$와 세 실수 $a,\ b,\ c\ (a<b<c)$에 대하여 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는다고 할 때, 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

| 보 기 |

ㄱ. $f(a)=f(b)=f(c)$이면 $f'(d)=0$을 만족하는 d가 열린 구간 (a, c)에 적어도 2개 이상 존재한다.

ㄴ. $f(a)=f(b)=f(c)$이면 $f''(d)=0$을 만족하는 d가 열린 구간 (a, c)에 적어도 1개 이상 존재한다.

ㄷ. $\dfrac{\left(\dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}\right)-\left(\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)}{c-a}=f''(d)$을 만족하는 d가 열린 구간 (a, c)에 적어도 1개 이상 존재한다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

유형 6 좌표평면 위를 움직이는 점의 속도와 거리

출제유형 | 좌표평면 위를 움직이는 점의 위치가 주어질 때, 점이 움직인 거리를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(a \le t \le b)$에서의 위치 (x, y)가 $x=f(t)$, $y=g(t)$일 때, 점 P가 $t=a$에서 $y=b$까지 움직인 거리 s는

$$s=\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$=\int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt$$

임을 이용하여 문제를 해결한다.

87)

실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(t)$에 대하여 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \ge 0)$에서의 위치 $(x,\ y)$가

$$\begin{cases} x=f(t) \\ y=4\sqrt{e^t} \end{cases}$$

이다. 점 P가 점 $(f(0),\ 4)$로부터 움직인 거리가 s가 될 때 시각 t와 s는 $\ln|s-t|=t$를 만족한다. $t=2$일 때 점 P의 속도는 $(1-e^2,\ 2e)$이다. 시각 $t=2$일 때, 점 P의 가속도를 $(a,\ b)$라 할 때, $\ln(a^2b^3)$의 값을 구하시오.

154)

함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족한다.

> (가) $-1 \le x \le 1$일 때 $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$
>
> (나) 모든 실수 x에 대하여
>
> $\int_{x-1}^{x+1} f(m)\,dm = 2x$이다.

실수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 x좌표를 x_t라 할 때, 정의역이 $\{s \mid s \ge 0\}$인 함수 $g(s)$가 음이 아닌 정수 k에 대하여

$$(k+1)g(s+2k) = \int_0^s \frac{t}{f'(x_t)}dt - \frac{1}{2}x_s^2 \quad (0 \le s < 2)$$

를 만족시킨다.

함수 $h(x) = \int_a^x g(s)ds$에 대하여 열린 구간 $(0, \infty)$에서 방정식 $(h^{-1})'(0)h'(x) = 1$의 서로 다른 실근의 개수가 11이 되도록 하는 실수 a에 대하여 $g(a) = \frac{p}{3\pi} - \frac{1}{q}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p, q는 자연수이다.)

155)

실수 전체의 집합에서 미분 가능한 함수 $f(x)$가 두 상수 a, b에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $-a \le x \le a$일 때, $f(x) = \sin\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\pi\right)$
>
> 이다.
>
> (나) 모든 실수 x에 대하여
>
> $f(x+2a) = f(x) + b$이다. (단, $\ln 2 \le a \le \ln 7$)

$\sum_{k=1}^{10} f(ka)$의 값이 최대일 때의 a를 α, 함수 $f(x)$를 $g(x)$, 최댓값을 M이라 하자.

$\sum_{k=1}^{10} f(ka)$의 값이 최소일 때의 a를 β, 함수 $f(x)$를 $h(x)$, 최솟값을 m이라 하자.

$\left(\int_0^{10\alpha} g(x)dx + M\right) - \sqrt{2}\left(\int_0^{10\beta} h(x)dx + m\right)$의 값은?

① $50\ln 3$　② $50\ln 7$　③ $50\ln\left(\frac{7}{3}\right)$

④ $50\ln\left(\frac{3}{7}\right)$　⑤ $50\ln\left(\frac{2}{3}\right)$

7) 정답 178

주어진 방정식 $2\sin^2 x+\cos x=a$ $\cdots(\star)$

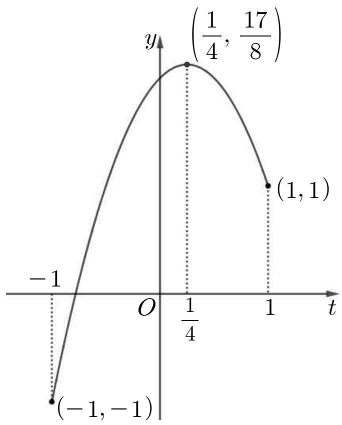
에서 좌변을 정리하면

$$y=2\sin^2 x+\cos x=2(1-\cos^2 x)+\cos x$$
$$=-2\cos^2 x+\cos x+2$$

$\cos x=t$ 라 놓으면

$y=-2t^2+t+2$ $(-1\le t\le 1)$

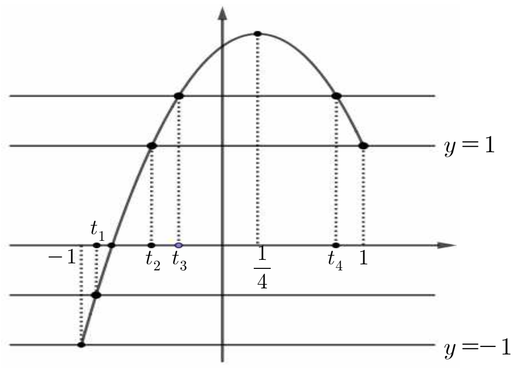
$$=-2\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{17}{8}$$

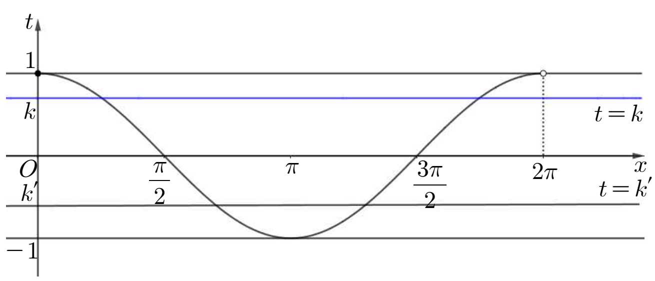


$(\star)$의 실근은 우선

$y=-2\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{17}{8}$ 와 $y=a$의 교점의 t를 구하고

$\cos x=t$ 에서 실근 x를 구하면 되므로





(1) $a>\frac{17}{8}$ 또는 $a<-1$일 때, 교점이 없으므로

$f(a)=0$

(2) $a=-1$일 때, $t=-1$이므로

위의 그래프에서 $x=\pi$이므로 $f(-1)=1$

(3) $-1<a<1$일 때, $t=t_1$ $(-1<t_1<0)$뿐이므로

$f(a)=2$

(4) $a=1$일 때, $t=t_2, t=1(-1<t_2<0)$이므로

$\cos x=t_2$의 실근은 2개이고, $\cos x=1$의 실근은

$x=0$이므로

$f(a)=3$

(5) $1<a<\frac{17}{8}$일 때,

$t=t_3, t_4(-1<t_3<1, -1<t_4<1)$ 이므로

$f(a)=4$

(6) $a=\frac{17}{8}$일 때, $t=\frac{1}{4}$이므로 $f(a)=2$

a	$a<-1$	$a=-1$	$-1<a<1$	$a=1$
$f(a)$	0	1	2	3

$1<a<\frac{17}{8}$	$a=\frac{17}{8}$	$a>\frac{17}{8}$
4	2	0

(가)에서 $\lim_{n\to\infty}f\left(1+\frac{1}{n}\right)=4, \lim_{n\to\infty}f\left(1-\frac{1}{n}\right)=2$,

$f(1)=3$이므로 $\therefore p=9$

(나)에서 $\lim_{n\to\infty}f\left(q+\frac{1}{n}\right)+\lim_{n\to\infty}f\left(q-\frac{1}{n}\right)+f(q)=6$ 을

만족하는 $q>1$인 수는

$\lim_{n\to\infty}f\left(\frac{17}{8}+\frac{1}{n}\right)=0, \lim_{n\to\infty}f\left(\frac{17}{8}-\frac{1}{n}\right)=4, f\left(\frac{17}{8}\right)=2$ 이므로

$\therefore q=\frac{17}{8}$

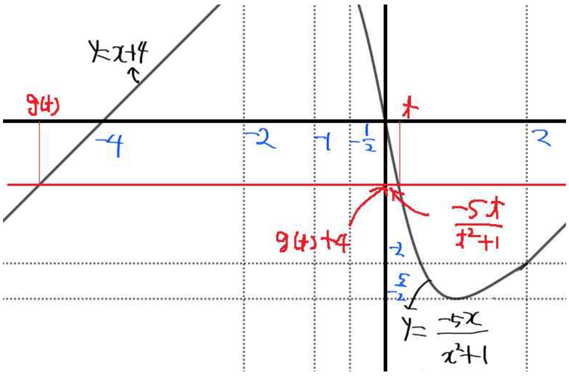
$\therefore$ $16(p+q)=178$

정리하면 $t\{g(t)\}^2-(t^2+1)g(t)+t=0$

$$g(t)=\frac{t^2+1\pm\sqrt{(t^2+1)^2-4t^2}}{2t}=\frac{(t^2+1)\pm(t^2-1)}{2t}$$

따라서 $g(t)=t$ 또는 $g(t)=\frac{1}{t}$이고 $-1\le t<-\frac{1}{2}$에서 $\frac{1}{t}<t$이므로 $g(t)=\frac{1}{t}$

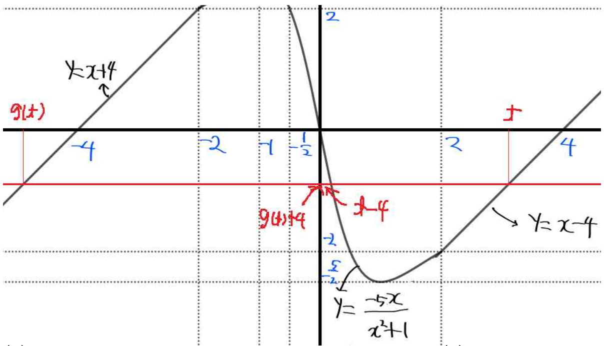
(iii) $-\frac{1}{2}\le t<2$일 때



$g(t)+4=\frac{-5t}{t^2+1}$이 성립한다.

따라서 $g(t)=\frac{-5t}{t^2+1}-4$

(iv) $2\le t<6$일 때



$g(t)+4=t-4$이 성립한다. 따라서 $g(t)=t-8$

$$\int_{-2}^{6}g(t)\,dt$$

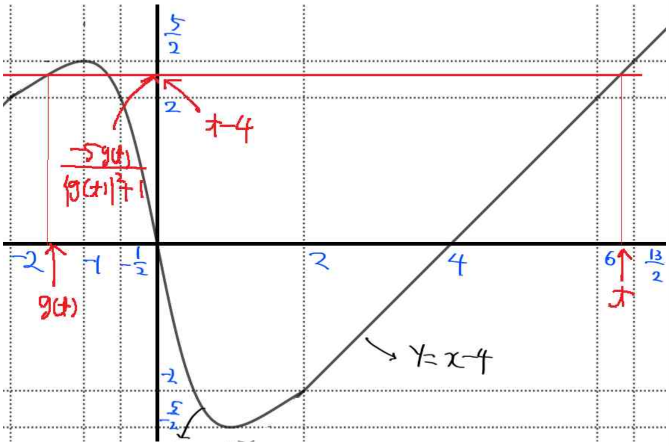
$$=\int_{-2}^{-1}t\,dt+\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{t}\,dt+\int_{-\frac{1}{2}}^{2}\left(\frac{-5t}{t^2+1}-4\right)dt+\int_{2}^{6}(t-8)\,dt$$

$$=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_{-2}^{-1}+[\ln|t|]_{-1}^{-\frac{1}{2}}+\left[-\frac{5}{2}\ln|t^2+1|-4t\right]_{-\frac{1}{2}}^{2}+\left[\frac{1}{2}t^2-8t\right]_{2}^{6}$$

$$=\left(-\frac{3}{2}\right)+(-\ln2)+(-5\ln2-10)+(-16)$$

$$=-6\ln2-\frac{55}{2}\cdots㉠$$

(v) $6\le t<\frac{13}{2}$일 때



$\frac{-5g(t)}{\{g(t)\}^2+1}=t-4$이 성립한다.

$t=\frac{25}{4}$을 대입하고 $g\left(\frac{25}{4}\right)=k\ (-2<k<-1)$라 두면

$\frac{-5k}{k^2+1}=\frac{9}{4}$ ⇨ $9k^2+20k+9=0$에서

$$k=\frac{-10-\sqrt{19}}{9}$$

따라서 $9g\left(\frac{25}{4}\right)=-10-\sqrt{19}\cdots㉡$

한편 $t\ge\frac{13}{2}$일 때, 함수 $g(t)=t$이므로

$\lim_{t\to\frac{13}{2}-}g(t)=-1,\ \lim_{t\to\frac{13}{2}+}g(t)=\frac{13}{2}$에서

함수 $g(t)$는 $t=\frac{13}{2}$에서 불연속이다.

따라서 $\alpha=\frac{13}{2}$이다.

따라서 $g\left(\alpha-\frac{1}{4}\right)=g\left(\frac{25}{4}\right)$이다.

㉠, ㉡에서

$$\int_{-2}^{6}g(t)\,dt+9g\left(\alpha-\frac{1}{4}\right)$$

$$=-6\ln2-\frac{55}{2}-10-\sqrt{19}$$

$$=-6\ln2-\sqrt{19}-\frac{75}{2}$$