주제 55 구간이 나누어진 함수의 미분가능성: 미분계수

미분계수의 정의가 아닌 도함수를 이용하여 미분가능성을 판단할 수도 있다.

실전이론

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 함수

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & (x \geq a) \\ g(x) & (x < a) \end{cases}$$

가 $x=a$에서 미분가능할 필요충분조건은

$f(a)=g(a)$, $f'(a)=g'(a)$

임을 증명하시오.

참고

위의 정리에 대하여 다음의 세 가지를 생각할 수 있다.

❶ '두 다항함수' 를 '두 미분가능한 함수' 로 두어도 이 명제는 참이다.

❷ 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능하므로 $f'(a)$, $g'(a)$는 각각 두 도함수 $f'(x)$, $g'(x)$의 $x=a$에서의 함숫값이다.

❸ 다항함수의 도함수는 다항함수 또는 상수함수이므로
두 함수 $f'(x)$, $g'(x)$는 연속이다.
그러므로 $f'(a)=\lim_{x\to a} f'(x)$, $g'(a)=\lim_{x\to a} g'(x)$로 둘 수 있다.

증명

(1) ($\Rightarrow$)

함수 $h(x)$가 $x=a$에서 미분가능하므로

함수 $h(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

함수의 연속에 대한 정의에 의하여

$\lim_{x\to a} h(x) = h(a)$

즉, $\lim_{x\to a+} h(x) = f(a) = h(a)$, $\lim_{x\to a-} h(x) = g(a) = h(a)$

따라서 $f(a)=g(a)$이다.

함수 $h(x)$가 $x=a$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to a+}\frac{h(x)-h(a)}{x-a}=\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$

$$\lim_{x\to a-}\frac{h(x)-h(a)}{x-a}=\lim_{x\to a-}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=g'(a)$$

따라서 $f'(a)=g'(a)$이다.

(2) ($\Leftarrow$)

$x\geq a$일 때, $h(x)=f(x)$이므로 $h(a)=f(a)$

$$\lim_{x\to a+}h(x)=\lim_{x\to a+}f(x)=f(a)$$

$$\lim_{x\to a-}h(x)=\lim_{x\to a-}g(x)=g(a)$$

주어진 조건에서 $f(a)=g(a)$이므로

$$\lim_{x\to a+}h(x)=\lim_{x\to a-}h(x)=h(a)$$

함수의 연속에 대한 정의에 의하여

함수 $h(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

$$\lim_{x\to a+}\frac{h(x)-h(a)}{x-a}=\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$

$$\lim_{x\to a-}\frac{h(x)-h(a)}{x-a}=\lim_{x\to a-}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=g'(a)$$

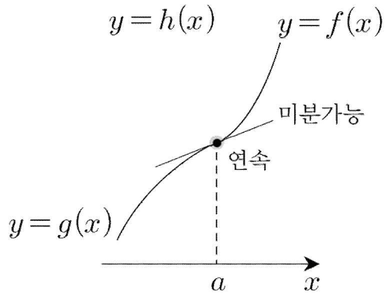
주어진 조건에서 $f'(a)=g'(a)$이므로

$$\lim_{x\to a+}\frac{h(x)-h(a)}{x-a}=\lim_{x\to a-}\frac{h(x)-h(a)}{x-a}$$

즉, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{h(x)-h(a)}{x-a}$가 존재한다.

미분가능성에 대한 정의에 의하여 함수 $h(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다. ■

기하적인 관점에서 위의 정리를 해석하면 다음과 같다.
(단, $b=f(a)=g(a)$)



$f(a)=g(a)$ ← 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 한 점 $(a,\ b)$에서 만나고

$f'(a)=g'(a)$ ← 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 기울기는 같다.

교과서 예제와 연습문제를 풀어보자.

문제 126

함수 $f(x)=\begin{cases} ax+b & (x \le 2) \\ 3x^2 & (x > 2) \end{cases}$가 $x=2$에서 미분가능하도록 상수 a, b의 값을 정하여라.

문제 127

다음과 같이 정의된 함수 $f(x)$가 있다.

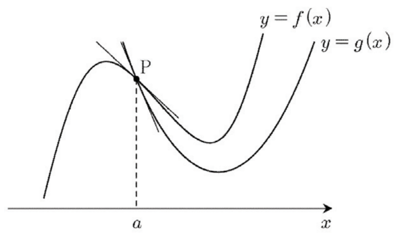
$$f(x)=\begin{cases} x^3+ax^2+3x & (x<1) \\ 3x^2-6x+b & (x \ge 1) \end{cases}$$

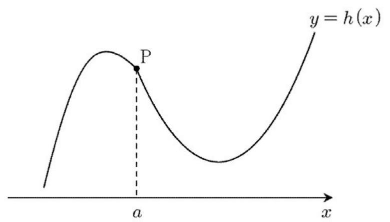
함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하도록 상수 a, b의 값을 정하여라.

주제 56 구간이 나누어진 함수의 미분가능성: 그래프

• 미분가능성과 접선의 관계에 대하여

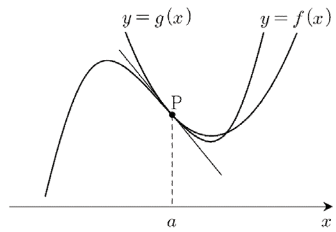
실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 점 P에서 만난다고 하자. (단, 점 P의 x좌표는 a이다.)
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기와
곡선 $y=g(x)$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기가 서로 다르면
곡선 $h(x)=\begin{cases} f(x) & (x \le a) \\ g(x) & (x > a) \end{cases}$는 점 P에서 미분가능하지 않다.

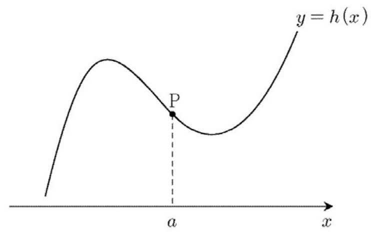




위의 그림에서 곡선 $y=h(x)$는 점 P에서 꺾여있다.

실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 점 P에서 만난다고 하자. (단, 점 P의 x좌표는 a이다.)
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기와
곡선 $y=g(x)$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기가 서로 같으면
곡선 $h(x)=\begin{cases} f(x) & (x \le a) \\ g(x) & (x > a) \end{cases}$는 점 P에서 미분가능하다.





위의 그림에서 곡선 $y=h(x)$는 점 P에서 부드럽게(smooth) 연결되어있다.

예제 17

두 함수 $f(x)=x^2$, $g(x)=-x$에 대하여

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\ge g(x)) \\ g(x) & (f(x)<g(x)) \end{cases}$$

함수 $h(x)$가 미분가능하지 않은 점의 개수를 구하시오.

접근법

이 문제에 대한 풀이는 크게 세 가지이다.

❶ 미분계수의 정의

❷ 도함수

❸ 그래프의 개형

함수 $h(x)$의 그래프의 개형을 쉽게 그릴 수 있고, 이 그래프에서 꺾이는 점과 부드럽게 연결된 점을 구별하는데 어려움이 없으므로 이 문제는 ❸으로 접근해도 좋다. 하지만 함수의 그래프의 개형을 그리기 어렵거나, 그 그래프에서 꺾이는 점과 부드럽게 연결되는 점을 구별하기 힘들다면 ❸이 아닌 ❶ 또는 ❷로 접근해야 한다.

풀이1 ❶ 미분계수의 정의

함수 $h(x)$의 방정식은

$$h(x)=\begin{cases} x^2 & (x\le -1,\ x>0) \\ -x & (-1<x\le 0) \end{cases}$$

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

함수 $h(x)$는 구간 $(-\infty,\ -1)$, $(-1,\ 0)$, $(0,\ \infty)$에서 미분가능하다.

• $x=-1$에서의 미분가능성

$$\lim_{x\to-1+}\frac{h(x)-h(-1)}{x+1}=\lim_{x\to-1+}\frac{-x-1}{x+1}=\lim_{x\to-1+}(-1)=-1,$$

$$\lim_{x\to-1-}\frac{h(x)-h(-1)}{x+1}=\lim_{x\to-1-}\frac{x^2-1}{x+1}=\lim_{x\to-1-}(x-1)=-2$$

$\displaystyle\lim_{x\to-1+}\frac{h(x)-h(-1)}{x+1}\neq\lim_{x\to-1-}\frac{h(x)-h(-1)}{x+1}$이므로

함수 $h(x)$는 $x=-1$에서 미분가능하지 않다.

• $x=0$에서의 미분가능성

$$\lim_{x\to0+}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to0+}x=0,$$

$$\lim_{x\to0-}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim_{x\to0-}\frac{-x}{x}=\lim_{x\to0-}(-1)=-1$$

$\displaystyle\lim_{x\to0+}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}\neq\lim_{x\to0-}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}$이므로

함수 $h(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

따라서 함수 $h(x)$가 미분가능하지 않은 점의 개수는 2이다.

풀이2 ❷ 도함수

함수 $h(x)$의 방정식은

$$h(x)=\begin{cases}x^2 & (x\le-1,\ x>0)\\ -x & (-1<x\le0)\end{cases}$$

함수 $h(x)$의 도함수는

$$h'(x)=\begin{cases}2x & (x<-1,\ x>0)\\ -1 & (-1<x<0)\end{cases}$$

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

함수 $h(x)$는 구간 $(-\infty,\ -1)$, $(-1,\ 0)$, $(0,\ \infty)$에서 미분가능하다.

• $x=-1$에서의 미분가능성

$f(-1)=g(-1)$이므로 함수 $h(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

$f'(-1)=-2\neq-1=g'(-1)$이므로 함수 $h(x)$는 $x=-1$에서 미분가능하지 않다.

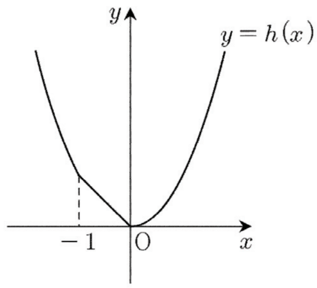
• $x=0$에서의 미분가능성

$f(0)=g(0)$이므로 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$f'(0)=0\neq-1=g'(0)$이므로 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

따라서 함수 $h(x)$가 미분가능하지 않은 점의 개수는 2이다.

풀이3 ❸ 그래프의 개형



위의 그림에서 함수 $h(x)$가 $x=-1$, $x=0$에서 미분가능하지 않음을 알 수 있다.

따라서 함수 $h(x)$가 미분가능하지 않은 점의 개수는 2이다.

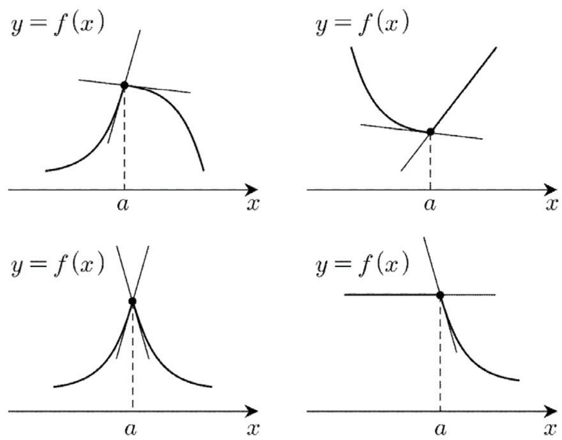
답 2개

• 그래프의 개형과 미분가능성

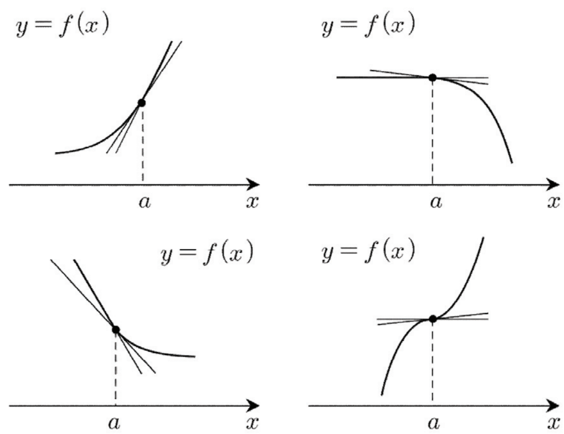
함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분가능성을 판정할 때에는
우선 함수 $f(x)$의 $x=a$에서 연속성을 판정해야 한다.

만약 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이 아니면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하지 않다.

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속인 경우 ❶ 미분계수의 정의를 이용하여 미분가능성을 판정한다. ❷ 도함수를 이용하여 미분가능성을 판정할 수도 있다. 이때, 계산과정이 줄어든다. ❸ 함수 $f(x)$의 그래프의 개형을 그려서 미분가능성을 판정할 수도 있다. 만약 기하적으로(즉, 눈으로 보아서) 미분가능성을 판정할 수 없는 경우에는 ❶ 혹은 ❷의 방법 즉, 대수적인 방법으로 미분가능성을 판정해야 한다.



예를 들어 위의 곡선들이 $x=a$에서 미분가능하지 않음을 눈으로 보아서 판정할 수 있다.



(위의 네 가지 경우 모두 $x=a$에서 $f(x)$가 미분가능하지 않다.)

예를 들어 위의 곡선들이 $x=a$에서 미분가능하지 않음을 눈으로 보아서 판정할 수 없다.

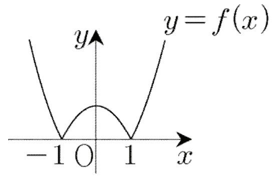
〈문제128〉

- 미분가능성의 판단 (대수적 vs 기하적)

이 문제를 대수적인 방법(미분계수의 정의)으로 풀고 기하적 관점에서 해석해보아라. (답을 맞히고 나서 해설집의 [참고]를 읽어보자.)

문제 128

함수 $f(x)=|x^2-1|$은 $x=1$에서 연속이지만 미분가능하지 않음을 보여라.



문제 129

다음 함수의 $x=0$에서의 연속성과 미분가능성을 조사하여라.

(1) $f(x)=x|x|$　　(2) $f(x)=x+|x|$

(3) $f(x)=x^2-2|x|$　　(4) $f(x)=x^2+3x-|x|$

〈문제129〉

• 미분가능성의 판단 (대수적 vs 기하적)

이 문제를 대수적인 방법(미분계수의 정의)으로 풀고 기하적 관점에서 해석해보아라. (답을 맞히고 나서 해설집의 [참고]를 읽어보자.)

〈문제129〉

• 함수가 미분가능하다.
⇔ 곡선이 부드럽다. (smooth)
일반적으로 부드럽지 (smooth) 않고 뾰족한 점에서는 미분가능하지 않다. 또한 끊긴 점은 연속하지 않으므로 끊긴 점에서도 미분가능하지 않다.

〈문제129〉

(4)번: 그래프의 개형으로 미분가능성을 판단할 때, 한 가지 주의해야 할 점이 있는데. 육안으로 부드럽게 연결된 점인지 뾰족한 점인지를 판단하기 힘든 경우, 반드시 미분계수의 정의를 이용하여 미분가능성을 판단해야 한다. 그리고 그래프의 개형을 그리기 힘든 경우에는 기하적 방법이 아닌 대수적 방법(즉, 미분계수의 정의)으로 미분가능성을 판단해야 한다.

〈문제130〉
ㄱ의 참, 거짓을 판단할 때, ❶ 미분계수의 정의 ❷ 도함수 ❸ 그래프의 개형 중에서 어떤 방법이 실전적일지를 생각해보아라.

문제 130

두 함수

$$f(x) = -x^3 + 6x^2,\ g(x) = f'(x)$$

에 대하여 함수 $h(x)$는

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & (f(x)g(x) \geq 0) \\ g(x) & (f(x)g(x) < 0) \end{cases}$$

이다. 다음의 보기 중에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [3점]

ㄱ. 함수 $h(x)$는 원점에서 미분가능하다.
ㄴ. 함수 $h(x) - g(x)$가 불연속인 점의 개수는 2이다.
ㄷ. 함수 $g(x-a) \times h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되게 하는 상수 a가 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

<문제131>
ㄴ: 수의 대소 관계가 주어지면 +, 0, −인 세 경우를 모두 생각해야 한다.
즉, $f'(0)f'(1)=0$, $f'(0)f'(1)>0$인 경우도 생각해 봐야 한다.

문제 131

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가 다음의 조건을 만족시킨다.

(가) $-1 \le x < 1$일 때, $g(x)=f(x)$이다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 $g(x+2)=g(x)$이다.

옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점](2010-가형17)

ㄱ. $f(-1)=f(1)$이고 $f'(-1)=f'(1)$이면 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
ㄴ. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면, $f'(0)f'(1)<0$이다.
ㄷ. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 $f'(1)>0$이면, 구간 $(-\infty, -1)$에 $f'(c)=0$인 c가 존재한다.

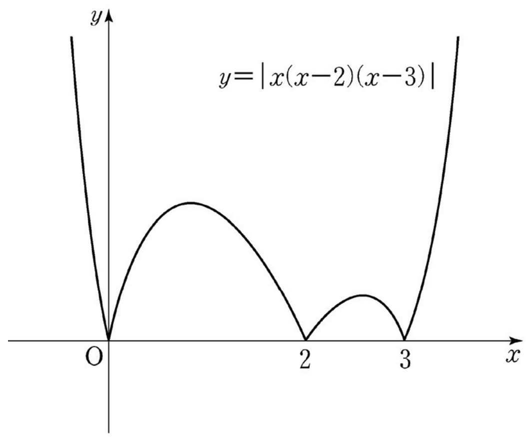
① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

〈문제132〉
문제에서 주어진 모든 조건을 만족시키는 사차함수 $f(x)$의 그래프의 개형을 그리고 나서 경계($x=0$, 2, 3)에서의 미분가능성을 따지면 된다. 논리적으로 완벽한 풀이를 쓰는 것은 어렵지만, 답을 구하는 것이 어려운 문제는 아니다.

문제 132

다음 조건을 만족시키며 최고차항의 계수가 음수인 모든 사차함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)$의 최댓값은? [4점](2017(9)-나형21)

(가) 방정식 $f(x)=0$의 실근은 0, 2, 3뿐이다. (나) 실수 x에 대하여 $f(x)$와 $\lvert x(x-2)(x-3)\rvert$ 중 크지 않은 값을 $g(x)$라 할 때, 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.



① $\dfrac{7}{6}$ ② $\dfrac{4}{3}$ ③ $\dfrac{3}{2}$
④ $\dfrac{5}{3}$ ⑤ $\dfrac{11}{6}$

주제 57 절댓값이 포함된 함수의 미분가능성

절댓값이 포함된 다항함수의 미분가능성에 대하여 알아보자.

실전이론

❶ 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(a)=0$이고,
$|f(x)|$이 $x=a$에서 미분가능하면 $f'(a)=0$이다.

❷ 다항함수 $f(x)$에 대하여
$f(a)=0,\ f'(a)=0$이면 $|f(x)|$은 $x=a$에서 미분가능하다.

위의 두 정리를 증명하자. (❷는 ❶의 역명제이다.)

증명

❶ (참)

$f(a)=0$이므로 인수정리에 의하여

$f(x)=(x-a)Q(x)$

문제에서 주어진 조건에 의하여

$$\lim_{x\to a}\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{|f(x)|}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{|(x-a)Q(x)|}{x-a}$$

가 존재한다.

$$\lim_{x\to a+}\frac{|(x-a)Q(x)|}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a+}\left|\frac{(x-a)Q(x)}{x-a}\right|=\lim_{x\to a+}|Q(x)|=|Q(a)|$$

$$\lim_{x\to a-}\frac{|(x-a)Q(x)|}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a-}-\left|\frac{(x-a)Q(x)}{x-a}\right|=\lim_{x\to a-}-|Q(x)|=-|Q(a)|$$

$|Q(a)|=-|Q(a)|$에서 $|Q(a)|=0$이므로 $Q(a)=0$

인수정리에 의하여 함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=(x-a)^2Q_0(x)$

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=2(x-a)Q_0(x)+(x-a)^2Q_0'(x)$

$\therefore\ f'(a)=0$ (그리고 $x=a$에서의 $|f(x)|$의 미분계수도 0이다.) ■

증명

❷ (참)

$f(a)=f'(a)=0$이므로 인수정리에 의하여

$f(x)=(x-a)^2Q_0(x)$

$$\lim_{x\to a+}\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a}=\lim_{x\to a+}\frac{|(x-a)^2Q_0(x)|}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a+}|(x-a)Q_0(x)|=0$$

$$\lim_{x\to a-}\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a}=\lim_{x\to a-}\frac{|(x-a)^2Q_0(x)|}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a+}-|(x-a)Q_0(x)|=0$$

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a}=0$이므로 함수 $|f(x)|$은 $x=a$에서 미분가능하다. 이때, 미분계수는 0이다. ■

따라서 다음의 필요충분조건이 성립한다.

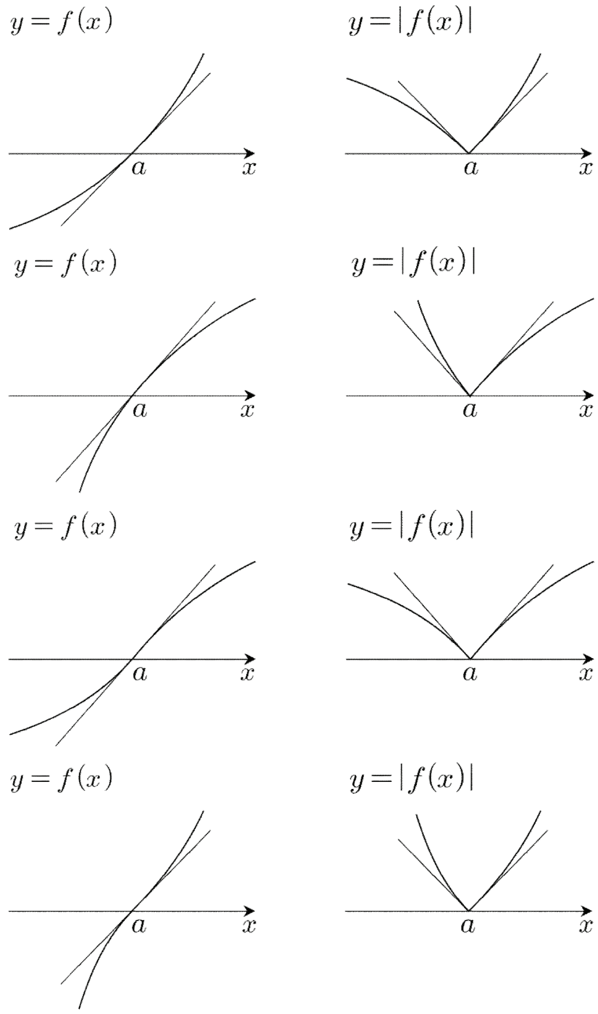
> 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(a)=0$일 때,
> 함수 $|f(x)|$이 $x=a$에서 미분가능하다.
> $\Leftrightarrow$
> $f'(a)=0$

기하적 해석은 다음과 같다.

> 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ 0)$에서의 접선이 x축이면
> 함수 $y=|f(x)|$는 $x=a$에서 미분가능하다.
> 이때, 곡선 $y=|f(x)|$ 위의 점 $(a,\ 0)$에서의 접선은 x축이다.

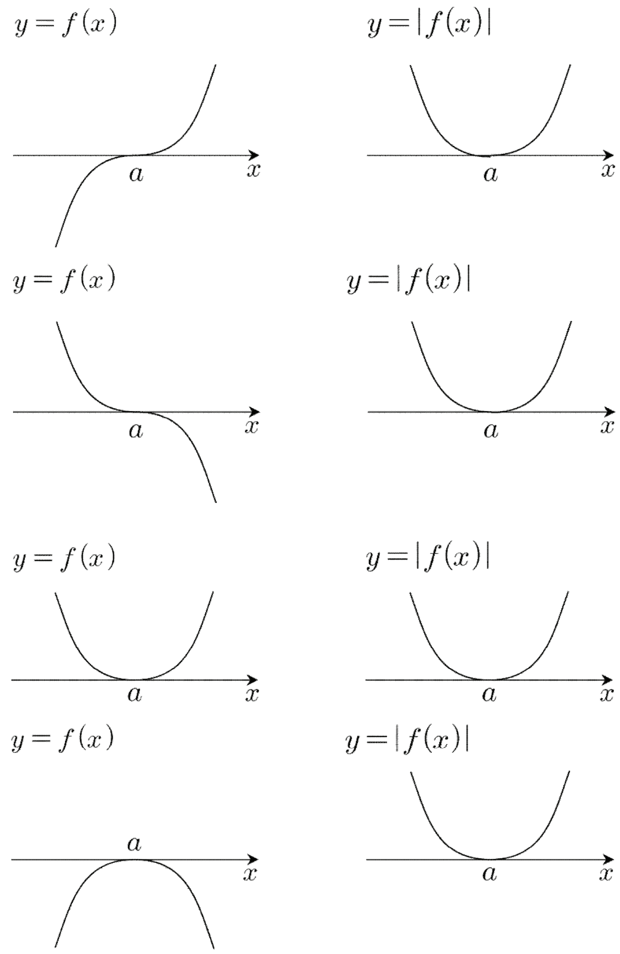
이를 그래프의 개형에서 확인해보자.

❶ $f'(a) > 0$인 경우



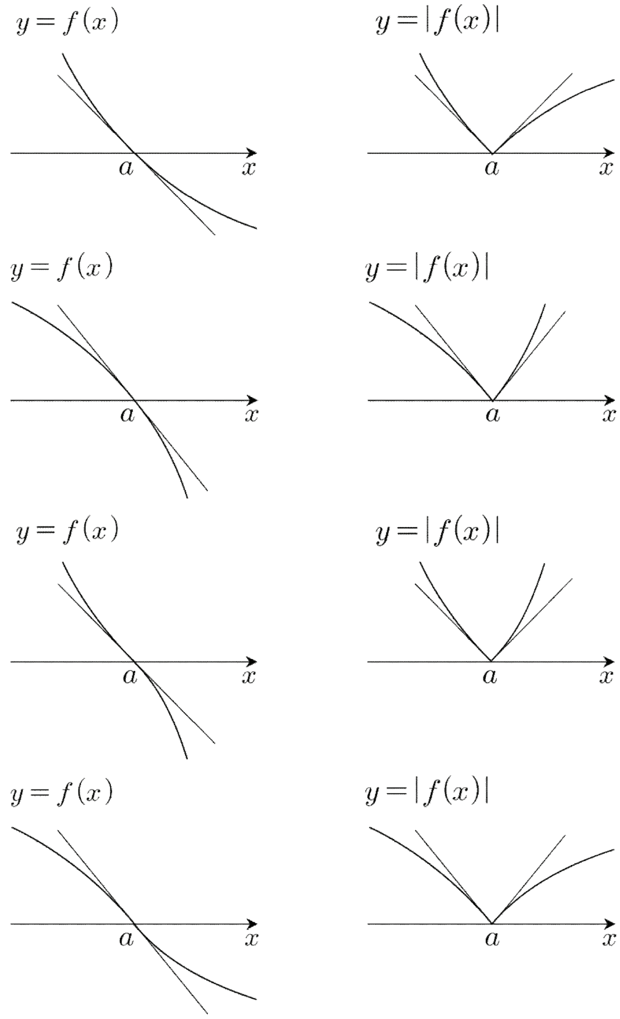
위의 그림에서 함수 $y=|f(x)|$가 $x=a$에서 미분가능하지 않음을 확인할 수 있다.

❷ $f'(a)=0$인 경우



위의 그림에서 함수 $y=|f(x)|$가 $x=a$에서 미분가능함을 확인할 수 있다.

❸ $f'(a) < 0$인 경우



위의 그림에서 함수 $y = |f(x)|$가 $x = a$에서 미분가능하지 않음을 확인할 수 있다.

〈문제133〉
이 문제를 풀면서 ❶ 미분계수의 정의 ❷ 도함수 ❸ 그래프의 개형 중에서 어떤 방법이 실전적일지를 생각해보아라.

문제 133

다음 함수 $f(x)$가 미분가능하지 않은 점을 모두 찾으시오.

(1) $f(x) = |x(x-1)|$　　(2) $f(x) = |x^2(x-1)|$

(3) $f(x) = |x^3(x-1)|$

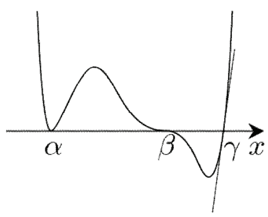
예를 들어 함수

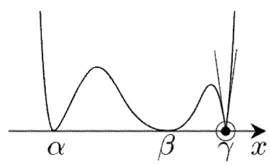
$y = |(x-\alpha)^2(x-\beta)^3(x-\gamma)|$　　$\cdots(*)$

(단, 세 수 α, β, γ는 모두 다르다.)

은 $x=\alpha$와 $x=\beta$에서 미분가능하지만, $x=\gamma$에서는 미분가능하지 않다.

$y=(x-\alpha)^2(x-\beta)^3(x-\gamma)$　　$y=|(x-\alpha)^2(x-\beta)^3(x-\gamma)|$





(위의 그림처럼 곡선이 꺾이면 접선도 함께 꺾인다!)

❶ 곡선 $y=(x-\alpha)^2(x-\beta)^3(x-\gamma)$가 두 점 $(\alpha,\ 0)$, $(\beta,\ 0)$에서 x축이 접하므로 함수 (*)는 $x=\alpha$와 $x=\beta$에서 미분가능하다. 이때, 곡선 (*)는 두 점 $(\alpha,\ 0)$, $(\beta,\ 0)$에서 x축이 접한다.

❷ 곡선 $y=(x-\alpha)^2(x-\beta)^3(x-\gamma)$ 위의 점 $(\gamma,\ 0)$에서의 접선이 x축이 아니므로 함수 (*)는 $x=\gamma$에서 미분가능하지 않다. 이때, 곡선 (*)는 점 $(\gamma,\ 0)$에서 x축에 접하지 않는다.

주제 58 절댓값이 포함된 함수의 미분가능성: 삼차함수, 사차함수의 그래프

지금까지 배운 이론과 삼차함수, 사차함수의 그래프의 개형을 알면 다음의 문제들을 풀 수 있다.

문제 134

다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $\dfrac{f'(0)}{f(0)}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. Mm의 값은? [4점](2016-A형 21)

(가) 함수 $\lvert f(x)\rvert$는 $x=-1$에서만 미분가능하지 않다. (나) 방정식 $f(x)=0$은 닫힌구간 $[3,\ 5]$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

① $\dfrac{1}{15}$　② $\dfrac{1}{10}$　③ $\dfrac{2}{15}$
④ $\dfrac{1}{6}$　⑤ $\dfrac{1}{5}$

문제 135

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=\lvert f(x)\rvert$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(x)$는 $x=1$에서 미분가능하고 $g(1)=g'(1)$이다. (나) $g(x)$는 $x=-1$, $x=0$, $x=1$에서 극솟값을 갖는다.

$g(2)$의 값은? [4점](2015(7)고3-A형21)

① 2　② 4　③ 6
④ 8　⑤ 10

〈문제136〉
이 문제를 풀고 해설집의 [풀이2]를 정독하자.

문제 136

사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\dfrac{f'(5)}{f'(3)}$의 값을 구하시오.

[4점](2010(6)-가형24)

(가) 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극값을 갖는다. (나) 함수 $\lvert f(x)-f(1)\rvert$은 오직 $x=a(a>2)$에서만 미분가능하지 않다.

문제 137

사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f'(x)=x(x-2)(x-a)$(단, a는 실수) (나) 방정식 $\lvert f(x)\rvert=f(0)$은 실근을 갖지 않는다.

보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점](2018(10)고3-나형20)

ㄱ. $a=0$이면 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다. ㄴ. $0<a<2$이고 $f(a)>0$이면, 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 네 실근을 갖는다. ㄷ. 함수 $\lvert f(x)-f(2)\rvert$가 $x=k$에서만 미분가능하지 않으면 $k<0$이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제 138

최고차항의 계수가 1이고, $f(0)=3$, $f'(3)<0$인 사차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 집합 S를

$S=\{a \mid$함수 $|f(x)-t|$가 $x=a$에서 미분가능하지 않다.$\}$

라 하고, 집합 S의 원소의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=3$과 $t=19$에서만 불연속일 때, $f(-2)$의 값을 구하시오. [4점](2011-가형24)

주제 59 절댓값이 포함된 함수의 미분가능성: 두 함수의 차의 절댓값

두 함수의 차로 정의된 함수의 미분가능성에 대하여 생각해보자.

다음의 두 명제는 참이다. (❷는 ❶의 역명제이다.)

실전이론

❶ 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(a)=g(a)$이고, $|f(x)-g(x)|$이 $x=a$에서 미분가능하면 $f'(a)=g'(a)$이다.
❷ 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(a)=g(a)$, $f'(a)=g'(a)$이면 $|f(x)-g(x)|$은 $x=a$에서 미분가능하다.

$h(x)=f(x)-g(x)$로 두고 앞선 정리를 적용하면 참임을 증명할 수 있다.

• 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때, 다음의 필요충분조건이 성립한다.

$p(x)=\begin{cases} f(x) & (x \geq a) \\ g(x) & (x < a) \end{cases}$는 $x=a$에서 미분가능하다.

$\Leftrightarrow$

$q(x)=|f(x)-g(x)|$는 $x=a$에서 미분가능하다.

따라서 다음의 필요충분조건이 성립한다.

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(a)=g(a)$일 때,
함수 $|f(x)-g(x)|$이 $x=a$에서 미분가능하다.
$\Leftrightarrow$
$f'(a)=g'(a)$

기하적 해석은 다음과 같다.

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 점 $(a,\ b)$에서 서로 접할 때,
함수 $y=|f(x)-g(x)|$는 $x=a$에서 미분가능하다.
이때, 곡선 $y=|f(x)-g(x)|$ 위의 점 $(a,\ 0)$에서의 접선은 x축이다.

다음의 명제도 참이다.

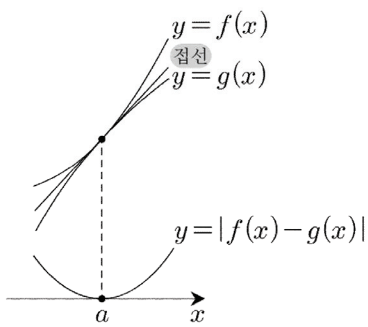
실전이론

❸ 다항함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의
접선을 $y=g(x)$라고 할 때,
함수 $|f(x)-g(x)|$은 $x=a$에서 미분가능하다.

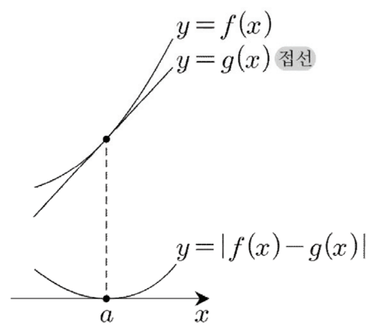
❸은 ❷의 특수한 경우이므로 참이다.

위의 세 정리는 아래의 그림과 함께 기억하면 절대 잊지 않는다.

❶+❷

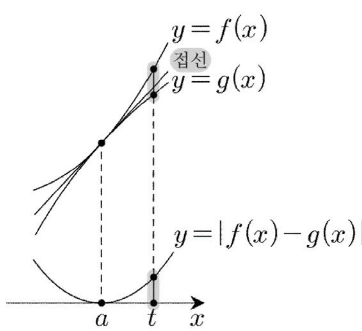


❸

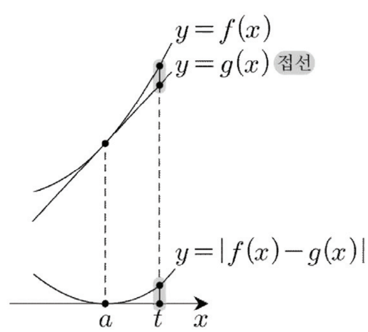


다음과 같은 관찰을 해보자.

❶+❷



❸



각각의 그림에서 두 선분의 길이는 서로 같다.
$t \to a$일 때,
(1) 두 선분의 길이는 모두 0에 수렴한다.

(2) 곡선(직선) $y=g(x)$는 곡선 $y=f(x)$에 한없이 가까워진다. 그리고 $t=a$에서 곡선(직선) $y=g(x)$는 곡선 $y=f(x)$에 접한다.

(3) 곡선 $y=|f(x)-g(x)|$는 x축에 한없이 가까워진다. 그리고 $t=a$에서 곡선 $y=|f(x)-g(x)|$는 x축에 접한다.

〈문제139〉
조건 (가)에서 주어진 점을 찍고, 조건 (나)에서 주어진 접선을 그은 후에 사차함수 $f(x)$의 그래프의 개형을 찾으면 문제를 빠르게 해결할 수 있다.

문제 139

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 곡선 $y=f(x)$는 세 점 $(-1,\ 0)$, $(0,\ 1)$, $(1,\ 0)$을 지난다.
(나) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ 1)$에서 그은 접선은 점 $(-1,\ 0)$을 지난다.

옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $f'(0)=1$
ㄴ. $f'(c)=-1$인 c가 열린구간 $(0,\ 1)$에서 존재한다.
ㄷ. 곡선 $y=|f(x)-x-1|$이 미분가능하지 않은 점의 개수는 2이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제 140

좌표평면에서 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 원점을 지나는 직선 $y=g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 27을 갖는다.
(나) 함수 $|f(x)-g(x)|$는 $x=-3$에서만 미분가능하지 않다.
(다) 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$는 서로 다른 두 점에서 만난다.

함수 $f(x)$의 극솟값을 구하시오. [4점](2016(11)고2-나형30)

주제 60 절댓값을 포함한 함수의 그래프

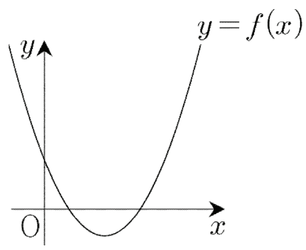
- 절댓값을 포함한 함수의 그래프

함수 $f(x)$의 그래프가 주어졌을 때, 다음의 함수들의 그래프 개형을 그려보자.
$y=|f(x)|$, $y=f(|x|)$, $|y|=f(x)$, $|y|=f(|x|)$,
$y=|f(|x|)|$, $|y|=|f(x)|$, $|y|=|f(|x|)|$

수능에서는 주로
$y=|f(x)|$, $y=f(|x|)$, $y=|f(|x|)|$
의 그래프의 개형을 그리게 하는 문제들이 출제되며,
$|y|$가 포함된 도형은 $|x|+|y|=1$ 정도만이 출제된다.

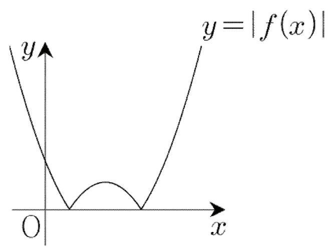
예제 18

함수 $f(x)$의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 다음 함수의 그래프를 그리시오.



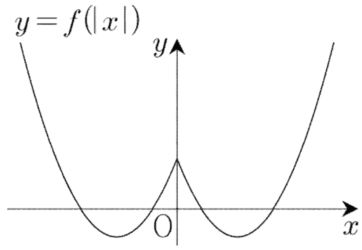
풀이

(1) $y=|f(x)|$



$$y=\begin{cases} f(x) & (|f(x)|\geq 0) \\ -f(x) & (|f(x)|<0) \end{cases}$$

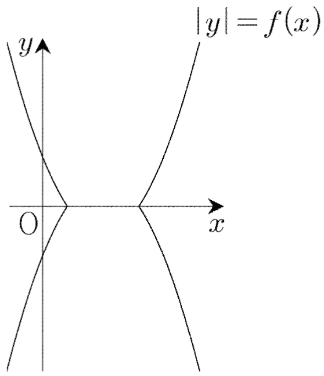
(2) $y=f(|x|)$



$$y=\begin{cases} f(x) & (x \geq 0) \\ f(-x) & (x<0) \end{cases}$$

$f(|-x|)=f(|x|)$이므로 곡선 $y=f(|x|)$가 제1사분면의 점 $(x,\ y)$를 지나면 제2사분면의 점 $(-x,\ y)$를 지난다.

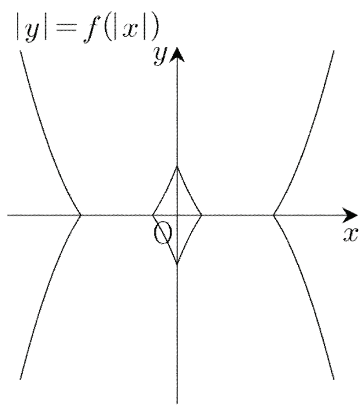
(3) $|y|=f(x)$



$y \geq 0$이면 $y=f(x)$

$y \leq 0$이면 $y=-f(x)$

(4) $|y|=f(|x|)$



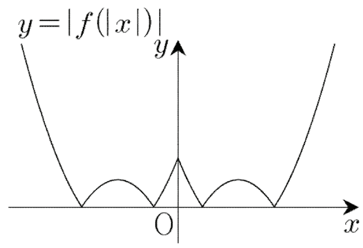
$y \geq 0$이면 $y=f(|x|)$

$y<0$이면 $y=-f(|x|)$

또는 다음의 방법을 따라도 좋다.

$x \geq 0,\ y \geq 0:\ y = f(x)$ (제1사분면)
$x \leq 0,\ y \geq 0:\ y = f(-x)$ (제2사분면)
$x \leq 0,\ y \leq 0:\ y = -f(-x)$ (제3사분면)
$x \geq 0,\ y \leq 0:\ y = -f(x)$ (제4사분면)

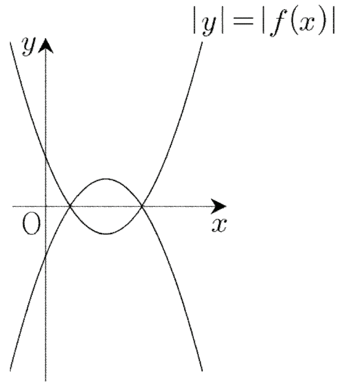
(5) $y = |f(|x|)|$



$$y = \begin{cases} f(|x|) & (f(|x|) \geq 0) \\ -f(|x|) & (f(|x|) < 0) \end{cases}$$

즉, 함수 $f(|x|)$의 그래프를 먼저 그리고 함수 $|f(|x|)|$의 그래프를 그린다.

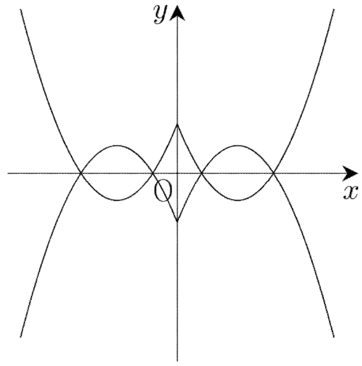
(6) $|y| = |f(x)|$



$y \geq 0$이면 $y = |f(x)|$
$y < 0$이면 $y = -|f(x)|$

(7) $|y| = |f(|x|)|$

$|y|=|f(|x|)|$



$y \geq 0$이면 $y=|f(|x|)|$

$y<0$이면 $y=-|f(|x|)|$

또는 다음의 방법을 따라도 좋다.

$x \geq 0,\ y \geq 0$: $y=|f(x)|$ (제1사분면)

$x \leq 0,\ y \geq 0$: $y=|f(-x)|$ (제2사분면)

$x \leq 0,\ y \leq 0$: $y=-|f(-x)|$ (제3사분면)

$x \geq 0,\ y \leq 0$: $y=-|f(x)|$ (제4사분면)

답 풀이참고

주제 61 2개 이상의 함수의 사칙연산으로 정의된 함수의 미분가능성

미분가능성과 연속성의 관계에 대한 교과서 본문의 명제를 정리하면 다음과 같다.

기본개념

❶ 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면
함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다. (참)
❷ 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이면
함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다. (거짓)
❸ 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 불연속이면
함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하지 않다. (참)

❷는 ❶의 역이고, ❸은 ❶의 대우이다.

• 2개 이상의 함수의 사칙연산으로 정의된 함수의 미분가능성

각 명제의 역 명제는 거짓이지만, 각 명제의 대우명제는 참이다.

실전이론

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때,
❶ 함수 $y=cf(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다. (단, c는 상수)
❷ 함수 $y=f(x)\pm g(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다.
❸ 함수 $y=f(x)g(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다.

문제 141

위의 네 명제가 모두 참임을 증명하여라. (힌트: 미분계수의 정의를 이용하면 된다.)

다음과 같이 생각할 수도 있다.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 $x=a$에서 미분가능하므로

$$f(a),\ g(a),\ f'(a),\ g'(a) \qquad \cdots ㉠$$

가 모두 존재한다.

네 함수

$$y=cf(x),\ y=f(x)\pm g(x),\ y=f(x)g(x),$$

의 도함수는 각각

$$y=cf'(x),\ y=f'(x)\pm g'(x),$$
$$y=f'(x)g(x)+f(x)g'(x),$$

이므로 이 네 함수의 $x=a$에서의 미분계수는 각각

$$cf'(a),\ f'(a)\pm g'(a),$$
$$f'(a)g(a)+f(a)g'(a),$$

㉠에 의하여 ㉡의 세 수는 모두 존재한다.

따라서 위의 세 명제가 모두 참임을 알 수 있다.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않을 때, 함수 $f(x)\pm g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 함수 $g(x)$는 $x=a$에서 미분가능하지 않아야 한다. 만약 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 함수 $f(x)\pm g(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다. 따라서 귀류법에 의하여 함수 $g(x)$는 $x=a$에서 미분가능하지 않아야 한다.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모두 $x=0$에서 미분가능하지 않지만 함수 $f(x)+g(x)$가 $x=0$에서 미분가능한 경우를 생각해보자.

예를 들어

$$f(x)=\begin{cases} 2x & (x\ge 0) \\ -x & (x<0) \end{cases},\quad g(x)=\begin{cases} -3x & (x\ge 0) \\ 0 & (x<0) \end{cases}$$

일 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 모두 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

하지만 함수 $f(x)+g(x)=-x$는 $x=0$에서 미분가능하다.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모두 $x=0$에서 미분가능하지 않지만 함수 $f(x)g(x)$가 $x=0$에서 미분가능한 경우를 생각해보자.

예를 들어
$f(x)=|x|$, $g(x)=2|x|$
일 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 모두 $x=0$에서 미분가능하지 않다.
하지만 함수 $f(x)g(x)=2x^2$은 $x=0$에서 미분가능하다.

문제 142

〈문제142〉
이 문제에서 (2)의 참, 거짓을 판단하기 쉽지 않다면 해설집의 풀이를 참고해도 좋다.

〈문제142〉
(2)는 (1)의 역명제이고, (3)은 (1)의 대우명제이다.

다음 명제의 참, 거짓을 판단하시오. 그리고 참이면 증명하고, 거짓이면 반례를 찾으시오.

(1) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면
$\{f(x)\}^2$는 $x=a$에서 미분가능하다.

(2) 함수 $\{f(x)\}^2$가 $x=a$에서 미분가능하면
$f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다.

(3) 함수 $\{f(x)\}^2$가 $x=a$에서 미분가능하지 않으면
$f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하지 않다.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 다음의 표가 성립한다.

<table>
<tr><th>f가 $x=a$ 에서</th><th>g가 $x=a$ 에서</th><th>cf가 $x=a$ 에서 (단, c는 상수)</th><th>$f\pm g$가 $x=a$ 에서</th><th>$f\times g$가 $x=a$ 에서</th></tr>
<tr><td>미분○</td><td>미분○</td><td rowspan="2">미분○</td><td>미분○</td><td>미분○</td></tr>
<tr><td>미분○</td><td>미분×</td><td rowspan="2">미분×</td><td rowspan="3">?</td></tr>
<tr><td>미분×</td><td>미분○</td><td rowspan="2">?</td></tr>
<tr><td>미분×</td><td>미분×</td><td>?</td></tr>
</table>

(?=연속일 수도 있고, 불연속일 수도 있다.)

주제 62 두 함수의 곱으로 정의된 함수의 미분가능성

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이고 좌미분계수와 우미분계수가 모두 존재하지만 같지 않아서 미분불가능하고, 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 함수 $f(x)g(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 필요충분조건은 $g(a)=0$이다.

〈증명〉

함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 우미분계수와 좌미분계수를 각각 p, q라고 하자.

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a+}\frac{g(x)\{f(x)-f(a)\}+f(a)\{g(x)-g(a)\}}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a+}\left(g(x)\times\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+f(a)\times\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right)$$

$$=g(a)\times p+f(a)g'(a) \qquad \cdots ㉠$$

마찬가지의 방법으로

$$\lim_{x\to a-}\frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a}=g(a)\times q+f(a)g'(a) \qquad \cdots ㉡$$

미분계수의 정의에서

㉠=㉡: $g(a)\times p+f(a)g'(a)=g(a)\times q+f(a)g'(a)$

즉, $g(a)\times p=g(a)\times q$

그런데 $p\neq q$이므로 $\therefore\ g(a)=0$

〈문제143〉
ㄷ의 참, 거짓을 판단할 때, ❶ 미분계수의 정의 ❷ 도함수 ❸ 그래프의 개형 중에서 어떤 방법이 실전적일지를 생각해보아라.

〈문제143〉
문제를 풀고 [참고]를 읽어보자.

문제 143

함수

$$f(x)=\begin{cases} ax+1 & (x \geq 0) \\ bx+1 & (x<0) \end{cases}$$

에 대하여 다음의 보기 중에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a, b는 상수) [3점]

ㄱ. 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 미분가능하기 위한 필요충분조건은 $a=b$이다.
ㄴ. $ab<0$이면 함수 $f(x)$는 극솟값을 갖는다.
ㄷ. 함수 $y=xf(x)$는 모든 실수 x에 대하여 미분가능하다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

〈문제144〉
해설집의 [풀이1]은 미분계수의 정의를 적용한 풀이이고, [풀이2]는 앞선 정리를 적용한 풀이이다.

〈문제144〉
수능 시험에서는.
수학2의 범위(즉, 다항함수): [풀이2]가 [풀이1]보다 실전적이다.
미적분의 범위(즉, 초월함수): [풀이2]가 [풀이1]보다 항상 실전적인 것은 아니다. 문제에 따라서 [풀이1]이 빠른 풀이일 수 있다.

문제 144

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

함수 $h(x)=\begin{cases} f(x) & (x \geq 0) \\ g(x) & (x<0) \end{cases}$가 $x=0$에서 불연속이라고 하자.

함수 $x^n h(x)$가 미분가능하게 되는 자연수 n의 최솟값을 구하시오.

〈문제145〉
이 문제에서 (1), (2)의 참, 거짓을 판단하기 쉽지 않다면 해설집의 풀이를 참고해도 좋다.

〈문제145〉
(2)는 (1)의 역명제이고, (3)은 (1)의 대우명제이다.

문제 145

다음 명제의 참, 거짓을 판단하시오. 그리고 참이면 증명하고, 거짓이면 반례를 찾으시오.

(1) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면
$|f(x)|$는 $x=a$에서 미분가능하다.

(2) 함수 $|f(x)|$가 $x=a$에서 미분가능하면
$f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다.

(3) 함수 $|f(x)|$가 $x=a$에서 미분가능하지 않으면
$f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하지 않다.

〈문제146〉
ㄱ, ㄴ, ㄷ의 참, 거짓을 판단할 때, ❶ 미분계수의 정의 ❷ 도함수 ❸ 그래프의 개형 중에서 어떤 방법이 실전적일지를 생각해보아라.

〈문제146〉
이 문제를 풀고 [참고2]를 반드시 읽어보자. 그리고 이 [참고2]가 이해된다면 이 주제를 제대로 이해한 것이다.

문제 146

함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} 1-x & (x<0) \\ x^2-1 & (0\le x<1) \\ \dfrac{2}{3}(x^3-1) & (x\ge 1) \end{cases}$$

일 때, 〈보기〉에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점](2007-가형7)

ㄱ. $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다. ㄴ. $\lvert f(x)\rvert$는 $x=0$에서 미분가능하다. ㄷ. $x^k f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하도록 하는 최소의 자연수 k는 2이다.

① ㄱ　　② ㄴ　　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

〈문제147〉
이 문제를 풀고 [참고]를 읽어보자.

문제 147

함수

$$f(x)=\begin{cases}-x & (x\le 0)\\ x-1 & (0<x\le 2)\\ 2x-3 & (x>2)\end{cases}$$

와 상수가 아닌 다항식 $p(x)$에 대하여 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점](2020-나형20)

ㄱ. 함수 $p(x)f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $p(0)=0$이다.
ㄴ. 함수 $p(x)f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $p(2)=0$이다.
ㄷ. 함수 $p(x)\{f(x)\}^2$이 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $p(x)$는 $x^2(x-2)^2$으로 나누어떨어진다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

〈문제148〉
이 문제는 완성도가 높이는 않지만, 경우 나누기 연습용으로 풀어보자.

문제 148

함수 $f(x)=|3x-9|$에 대하여 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}f(x+k) & (x<0)\\ f(x) & (x\ge 0)\end{cases}$$

이다. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $h(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, 모든 $h(k)$의 값의 합을 구하시오.
(단, $k>0$) [4점](2017(10)고3-나형30)

(가) 함수 $g(x)h(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
(나) $h'(3)=15$

두 함수 $f(f(x))$, $g^{-1}(x)$의 그래프의 4개의 교점의 x좌표를 각각 α_1, α_2, α_3, α_4라고 하자. (단, $\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3<\alpha_4$)

방정식 ㉠의 해집합을 A라고 하면

$A=\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$

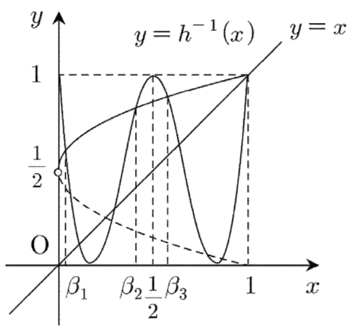
(2) 두 곡선 $y=f(f(x))$, $y=h^{-1}(x)$의 위치 관계를 생각하자.

$f(f(x))=h^{-1}(x)$ $\cdots$㉡

역함수의 성질에 의하여

$f(f(f(x)))=f(h^{-1}(x))=h(h^{-1}(x))=x$

이때, x가 갖는 값의 범위는 0 초과 1 이하이다.



두 함수 $f(f(x))$, $h^{-1}(x)$의 그래프의 4개의 교점 중에서 점 $(1, 1)$이 아닌 3개의 교점의 x좌표를 각각 β_1, β_2, β_3라고 하자. (단, $\beta_1<\beta_2<\beta_3$)

방정식 ㉡의 해집합을 B라고 하면

$B=\{\beta_1, \beta_2, \beta_3, 1\}$

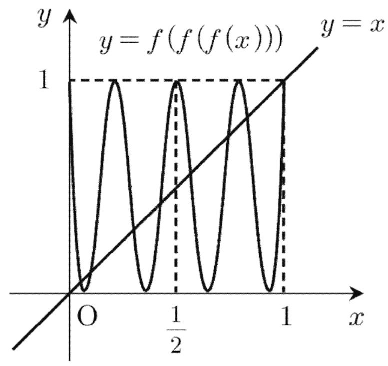
문제에서 주어진 방정식의 해집합은 $A\cup B$이다.

그런데 $A\cap B\neq\varnothing$이므로 문제에서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 8이다.

답 ③

[참고]

다음과 같이 합성함수 $y=f(f(f(x)))$의 그래프를 이용하여 문제를 풀 수도 있다.



함수 $y=f(f(f(x)))$의 그래프와 직선 $y=x$가 8개의 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 8이다.

126 | 답 $a=12$, $b=-12$

[풀이]

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이다.

함수의 연속에 대한 정의에 의하여

$\lim_{x\to 2+} f(x)=f(2)$

즉, $\lim_{x\to 2+} 3x^2=12=2a+b$

$2a+b=12$ $\cdots$㉠

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=\begin{cases} a & (x<2) \\ 6x & (x>2) \end{cases}$

$\lim_{x\to 2+} f'(x)=\lim_{x\to 2-} f'(x)$

즉, $\lim_{x\to 2+} 6x=\lim_{x\to 2-} a$

$a=12$ $\cdots$㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$a=12$, $b=-12$

답 $a=12$, $b=-12$

127 | 답 $a=-3$, $b=4$

[풀이]

다항함수는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

함수 $f(x)$는 두 구간 $(-\infty, 1)$, $(1, \infty)$에서 미분가능하다.

그러므로 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능해야 한다.
함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로
함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.
함수의 연속에 대한 정의에 의하여

$\lim_{x\to 1-} f(x)=f(1)$

$\lim_{x\to 1-}(x^3+ax^2+3x)=a+4=-3+b$

$a-b=-7$ $\cdots$ ㉠

함수 $f(x)$의 도함수는

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2+2ax+3 & (x<1)\\ 6x-6 & (x>1)\end{cases}$$

$\lim_{x\to 1+} f'(x)=\lim_{x\to 1-} f'(x)$

$\lim_{x\to 1+}(6x-6)=\lim_{x\to 1-}(3x^2+2ax+3)$

$0=6+2a$ 풀면 $a=-3$ $\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$a=-3,\ b=4$

답 $a=-3,\ b=4$

128 | 답 풀이참고

[풀이]

〈증명〉

함수 $f(x)$의 방정식은

$$f(x)=\begin{cases}x^2-1 & (|x|\geq 1)\\ 1-x^2 & (|x|<1)\end{cases}$$

$\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1+}(x^2-1)=0$,

$\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1-}(1-x^2)=0$,

$f(1)=1^2-1=0$에서

$\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

$\lim_{x\to 1+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\dfrac{x^2-1}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1+}(x+1)=2$,

$\lim_{x\to 1-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\dfrac{1-x^2}{x-1}$

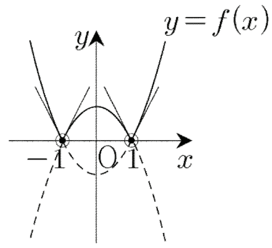
$=\lim_{x\to 1-}(-x-1)=-2$에서

$\lim_{x\to 1+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\neq\lim_{x\to 1-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

답 풀이참조

[참고]



(단, ⦿는 미분가능하지 않은 점이다.)

($x=1$에서의 우미분계수)

$=\lim_{x\to 1+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=2$

=(곡선 $y=x^2-1$ 위의
점 $(1,\ 0)$에서의 접선의 기울기) $\cdots$ ㉠

($x=1$에서의 좌미분계수)

$=\lim_{x\to 1-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=-2$

=(곡선 $y=1-x^2$ 위의
점 $(1,\ 0)$에서의 접선의 기울기) $\cdots$ ㉡

㉠$\neq$㉡이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.
마찬가지의 이유로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 미분가능하지 않다.

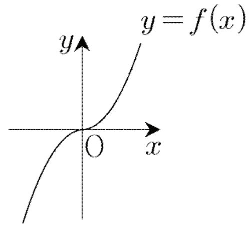
129 | 답 풀이참고

[풀이]

(1) 함수 $f(x)$의 방정식은

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & (x\geq 0)\\ -x^2 & (x<0)\end{cases}$$

함수 $f(x)$의 그래프는



$\lim\limits_{x\to0+}f(x)=\lim\limits_{x\to0+}x^2=0$,

$\lim\limits_{x\to0-}f(x)=\lim\limits_{x\to0-}(-x^2)=0$,

$f(0)=0^2=0$에서

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$$\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to0+}x=0,$$

$$\lim_{x\to0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0-}\frac{-x^2}{x}$$

$=\lim\limits_{x\to0-}(-x)=0$에서

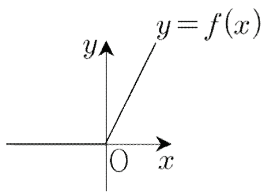
$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

(2) 함수 $f(x)$의 방정식은

$$f(x)=\begin{cases}2x & (x\geq0)\\0 & (x<0)\end{cases}$$

함수 $f(x)$의 그래프는



$\lim\limits_{x\to0+}f(x)=\lim\limits_{x\to0+}2x=0$,

$\lim\limits_{x\to0-}f(x)=\lim\limits_{x\to0-}0=0$,

$f(0)=2\cdot0=0$에서

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$$\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{2x}{x}=\lim_{x\to0+}2=2,$$

$\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{0}{x}=0$에서

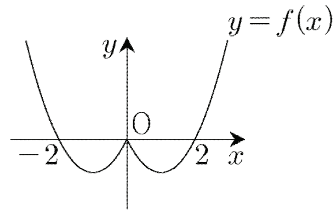
$$\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\neq\lim_{x\to0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

(3) 함수 $f(x)$의 방정식은

$$f(x)=\begin{cases}x^2-2x & (x\geq0)\\x^2+2x & (x<0)\end{cases}$$

함수 $f(x)$의 그래프는



$\lim\limits_{x\to0+}f(x)=\lim\limits_{x\to0+}(x^2-2x)=0$,

$\lim\limits_{x\to0-}f(x)=\lim\limits_{x\to0-}(x^2+2x)=0$,

$f(0)=0^2-2\cdot0=0$에서

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$$\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{x^2-2x}{x}$$

$=\lim\limits_{x\to0+}(x-2)=-2$,

$$\lim_{x\to0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0-}\frac{x^2+2x}{x}$$

$=\lim\limits_{x\to0-}(x+2)=2$에서

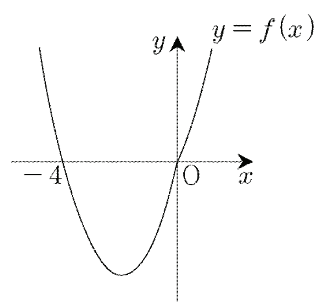
$$\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\neq\lim_{x\to0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

(4) 함수 $f(x)$의 방정식은

$$f(x)=\begin{cases}x^2+2x & (x\geq0)\\x^2+4x & (x<0)\end{cases}$$

함수 $f(x)$의 그래프는



$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} (x^2 + 2x) = 0$,

$\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} (x^2 + 4x) = 0$,

$f(0) = 0^2 + 2 \cdot 0 = 0$에서

$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$이므로 함수 $f(x)$는 $x = 0$에서 연속이다.

$\lim_{x \to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0+} \frac{x^2 + 2x}{x}$

$= \lim_{x \to 0+} (x + 2) = 2$,

$\lim_{x \to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0-} \frac{x^2 + 4x}{x}$

$= \lim_{x \to 0-} (x + 4) = 4$에서

$\lim_{x \to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \neq \lim_{x \to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

이므로 함수 $f(x)$는 $x = 0$에서 미분가능하지 않다.

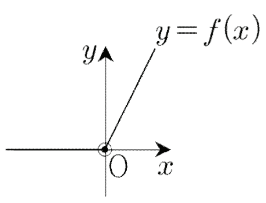
답 (1) 미분가능 (2) 미분불가능 (3) 미분불가능 (4) 미분불가능

[참고]

기하적인 관점에서 미분가능성을 판단해 보자.

(1) 함수 $f(x)$의 그래프는 원점에서 부드럽게 연결되어 있으므로, 원점에서 미분가능하다. 이 경우와 다르게 마치 부드럽게 연결된 점처럼 보이지만 계산해보면(좌, 우 미분계수를 구해서 같은지 다른지를 비교해보면) 뾰족한 점인 경우도 있으므로, 육안으로 판단하기 모호한 경우에는 산술적인 방법(미분계수의 정의)으로 미분가능성을 판단해야 한다.

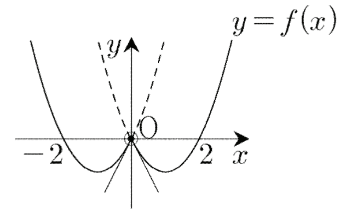
(2)



(단, ⦿는 미분가능하지 않은 점이다.)

함수 $f(x)$의 그래프는 원점에서 뾰족하므로 함수 $f(x)$는 원점에서 미분가능하지 않다.

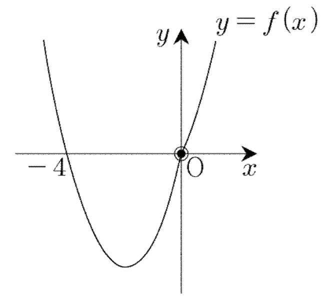
(3)



(단, ⦿는 미분가능하지 않은 점이다.)

함수 $f(x)$의 그래프는 원점에서 뾰족하므로 함수 $f(x)$는 원점에서 미분가능하지 않다.

(4)



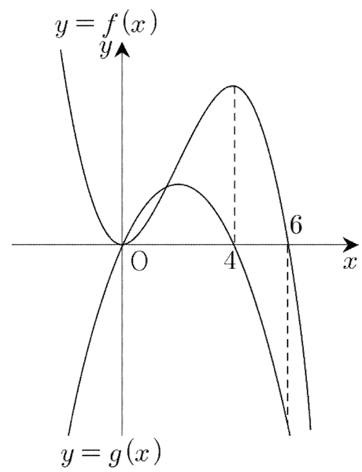
(단, ⦿는 미분가능하지 않은 점이다.)

위의 그림만으로는 원점에서의 미분가능성을 판단할 수 없으므로 대수적인 방법(미분계수)으로 미분가능성을 판단해야 한다.

130 | 답 ②

[풀이]

함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프는



구간 $(-\infty, 0)$에서 $f(x)g(x) < 0$이므로

$h(x) = g(x)$

$x = 0$일 때, $f(x)g(x) = 0$이므로 $h(x) = f(x)$

구간 $(0,\ 4)$에서 $f(x)g(x)>0$이므로

$h(x)=f(x)$

$x=4$일 때, $f(x)g(x)=0$이므로 $h(x)=f(x)$

구간 $(4,\ 6)$일 때, $f(x)g(x)<0$이므로

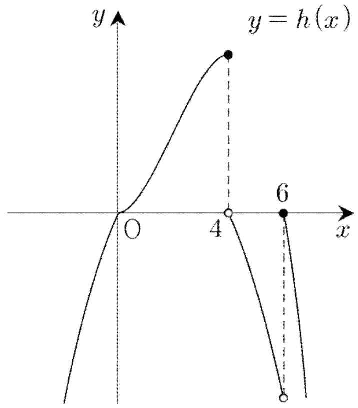
$h(x)=g(x)$

$x=6$일 때, $f(x)g(x)=0$이므로 $h(x)=f(x)$

구간 $(6,\ \infty)$에서 $f(x)g(x)>0$이므로

$h(x)=f(x)$

함수 $h(x)$의 그래프는



ㄱ. (거짓)

함수 $h(x)$의 그래프는 원점에서 꺾였으므로 함수 $h(x)$는 원점에서 미분가능하지 않다.

물론 다음과 같이 미분계수의 정의로 미분가능성을 판단해도 좋다.

$$\lim_{x\to 0+}\frac{h(x)-h(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0$$

$$\lim_{x\to 0-}\frac{h(x)-h(0)}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{g(x)-g(0)}{x}=12$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{h(x)-h(0)}{x}\neq\lim_{x\to 0-}\frac{h(x)-h(0)}{x}$$

이므로 미분계수의 정의에 의하여 함수 $h(x)$는 원점에서 미분가능하지 않다.

ㄴ. (참)

함수 $h(x)$는 $x=4$, $x=6$에서 불연속이다.

함수 $g(x)$는 모든 실수에 대하여 연속이다.

따라서 함수 $h(x)-g(x)$는 $x=4$, $x=6$에서 불연속이다.

ㄷ. (거짓)

(이차식)$\times h(x)$

즉, $(x-\alpha)(x-\beta)\times h(x)$ (단, $\alpha<\beta$)

가 실수 전체의 집합에서 연속이 되려면

$\alpha=4$, $\beta=6$가 되어야 한다.

이때, $|\alpha-\beta|=2$이다.

그런데

$g(x-a)=-3(x-a)(x-4-a)$에서

$|a-(a+4)|=4$이므로

함수 $g(x-a)\times h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되게 하는 상수 a는 존재하지 않는다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ이다.

답 ②

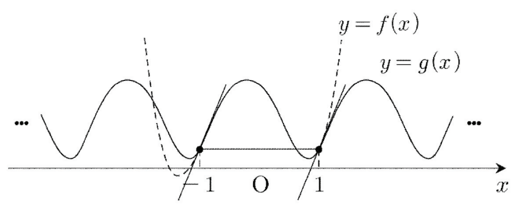
131 |답 ③

[풀이1] 시험장

최고차항의 계수가 양수인 사차함수의 그래프의 개형을 유형별로 분류하면 다음과 같다. (크게 분류한 것이고, 문제에서 주어진 조건에 따라서 세분화할 수 있다.)

위의 그래프의 개형을 이용하여 문제를 해결해보자.

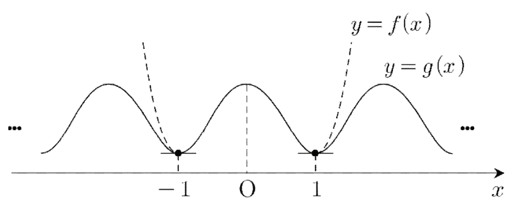
▸ ㄱ. (참)



위의 그림처럼 함수 $f(x)$의 그래프가 그려지면, 함수 $g(x)$의 그래프는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

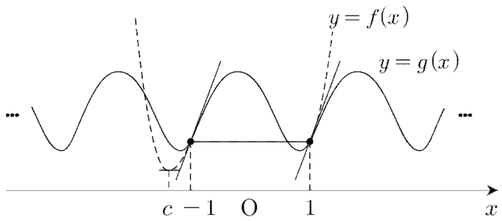
▸ ㄴ. (거짓)

(반례)



만약 $f(-1)=f(1)$, $f'(-1)=f'(1)=0$($\Rightarrow$ $f'(0)=0$)이면 함수 $g(x)$의 그래프는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. 이때, $f'(0)f'(1)=0$이다.

▸ ㄷ. (참)



위의 그림처럼 함수 $f(x)$의 그래프가 그려지면, 함수 $g(x)$의 그래프는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
이때, $f'(c)=0$인 실수 c가 구간 $(-\infty,\ -1)$에 존재한다.
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.
답 ③

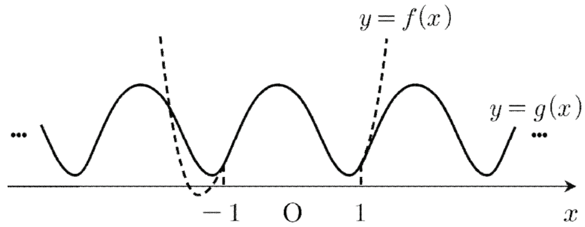
[풀이2] ★
▸ ㄱ. (참)
함수 $f(x)$의 방정식을
$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$
주어진 조건에 의하여
$f(-1)=1-a+b-c+d$
$=1+a+b+c+d=f(1)$
풀면 $c=-a$
함수 $f(x)$의 방정식은
$f(x)=x^4+ax^3+bx^2-ax+d$
함수 $f(x)$의 도함수는
$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx-a$
주어진 조건에 의하여
$f'(-1)=-4+3a-2b-a$
$=4+3a+2b-a=f'(1)$
풀면 $b=-2$
함수 $f(x)$의 방정식은
$f(x)=x^4+ax^3-2x^2-ax+d$
정리하면
$f(x)=x^4-2x^2+d+ax(x+1)(x-1)$
함수 $f(x)$의 그래프는 a의 값에 관계없이 세 점
$(-1,\ d-1)$, $(0,\ d)$, $(1,\ d-1)$
을 지난다.
조건 (가), (나)에 의하여 함수 $g(x)$의 그래프는
$(2n,\ d)$, $(2n-1,\ d-1)$
을 지난다.(단, n은 정수)
• 함수 $g(x)$의 연속성
$f(x)$가 구간 $(-1,\ 1)$에서 연속이므로
조건 (나)에 의하여 $x\neq 2n-1$인 모든 구간에서
함수 $g(x)$는 연속이다.

$$\lim_{x\to 2n-1+} g(x)=\lim_{x\to -1+} f(x)=f(-1)=d-1$$
$$\lim_{x\to 2n-1-} g(x)=\lim_{x\to 1-} f(x)=f(1)=d-1$$

함수 $g(x)$의 $x=2n-1$에서의 극한값은
$$\lim_{x\to 2n-1} g(x)=d-1$$
함수 $g(x)$의 $x=2n-1$에서의 함숫값은
$g(2n-1)=f(-1)=d-1$
$\lim_{x\to 2n-1} g(x)=g(2n-1)$이므로
함수의 연속의 정의에 의하여
함수 $g(x)$는 $x=2n-1$에서 연속이다.
따라서 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
• 함수 $g(x)$의 미분가능성
$f(x)$가 구간 $(-1,\ 1)$에서 미분가능하므로
조건 (나)에 의하여 $x\neq 2n-1$인 모든 구간에서
함수 $g(x)$는 미분가능하다.

$$\lim_{h\to 0+}\frac{g(2n-1+h)-g(2n-1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0+}\frac{g(-1+h)-g(-1)}{h}(\because (나))$$
$$=\lim_{h\to 0+}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}(\because (가))$$
$$=f'(-1)=2a$$
$$\lim_{h\to 0-}\frac{g(2n-1+h)-g(2n-1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0-}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}(\because (나))$$
$$=\lim_{h\to 0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}(\because (가))$$
$$=f'(1)=2a$$

미분계수의 정의에 의하여
$$\lim_{h\to 0}\frac{g(2n-1+h)-g(2n-1)}{h}=2a$$
이므로 함수 $g(x)$는 $x=2n-1$에서 미분가능하다.
따라서 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
예를 들어 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프는



▸ ㄴ. (거짓)

(반례)

$a=0$일 때, 함수 $f(x)$의 방정식은

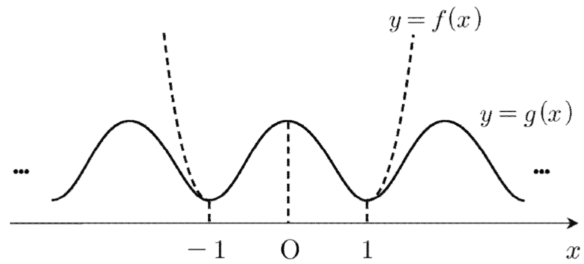
$f(x)=x^4-2x^2+d$

도함수 $f'(x)$의 방정식은

$f'(x)=4x^3-4x=4x(x-1)(x+1)$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프는



함수 $g(x)$는 모든 실수 x에 대하여 미분가능하고

$f'(0)f'(1)=0$

따라서 주어진 명제는 거짓이다.

▸ ㄷ. (참)

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $g'(1)$이 존재한다.

조건 (가), (나)에 의하여

$f'(-1)=f'(1)=g'(1)$

주어진 조건에 의하여

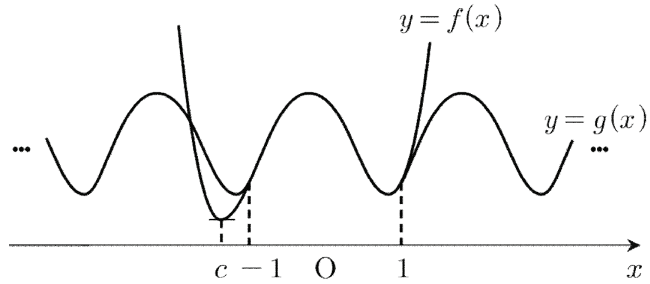
$f'(-1)>0$

$\lim_{x\to-\infty} f'(x)$

$=\lim_{x\to-\infty} x^3\left(4+\frac{3a}{x}-\frac{4}{x^2}-\frac{a}{x^3}\right)=-\infty$

이므로, 사이값 정리에 의하여 $f'(c)=0$을 만족하는 c가 구간 $(-\infty,\ -1)$에서 적어도 하나 존재한다.

예를 들어 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프는



이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

[참고] ★

보기 ㄷ이 참임을 다음과 같이 보일 수도 있다.

$f(-1)=f(1)$이므로

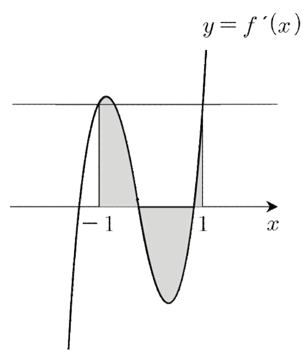
정적분의 정의(미적분의 기본 정리)에 의하여

$$\int_{-1}^{1} f'(x)dx=[f(x)]_{-1}^{1}=f(1)-f(-1)=0$$

이제 $f'(-1)=f'(1)>0$, $\int_{-1}^{1} f'(x)dx=0$

을 모두 만족시키는

삼차함수 $f'(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



위의 그림에서 $f'(c)=0$인 c가

구간 $(-\infty,\ -1)$에서 존재함을 알 수 있다.

132 | 답 ②

[풀이]

$h(x)=|x(x-2)(x-3)|$으로 두자.

$$h(x)=\begin{cases} x(x-2)(x-3) & (0\le x\le 2,\ x\ge 3) \\ -x(x-2)(x-3) & (x<0,\ 2<x<3)\end{cases}$$

함수 $h(x)$는 $x=0$, $x=2$, $x=3$에서 미분가능하지 않다.

함수 $h(x)$의 도함수는

$$h'(x)=\begin{cases}(x-2)(x-3)+x(x-3)+x(x-2) & (0<x<2,\ x>3)\\ -(x-2)(x-3)-x(x-3)-x(x-2) & (x<0,\ 2<x<3)\end{cases}$$

조건 (가)에서 인수정리에 의하여
함수 $f(x)$의 방정식은 다음의 3가지가 가능하다.

$f(x)=ax^2(x-2)(x-3)$ … (경우1)

$f(x)=ax(x-2)^2(x-3)$ … (경우2)

$f(x)=ax(x-2)(x-3)^2$ … (경우3)

(단, $a<0$)

각 경우에 대하여 함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=2ax(x-2)(x-3)+ax^2(x-3)$
$+ax^2(x-2)$ … (경우1)

$f'(x)=a(x-2)^2(x-3)+2ax(x-2)(x-3)$
$+ax(x-2)^2$ … (경우2)

$f'(x)=a(x-2)(x-3)^2+ax(x-3)^2$
$+2ax(x-2)(x-3)$ … (경우3)

(단, $a<0$)

• 경우1

$f(1)=2a<0<2=h(1)$

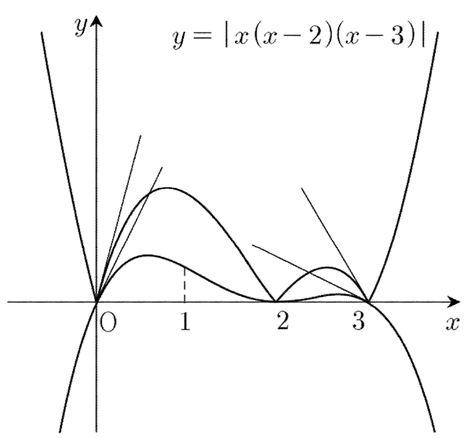
이므로 $g(1)=f(1)(<0)$이고, $f(1)$의 값은 음수이므로 최댓값일 수 없다. (경우2, 경우3에서 $f(1)$은 양수이다.)

• 경우2

아래 그림처럼 실수 전체의 집합에서

$f(x)\le|x(x-2)(x-3)|$

이어야 함수 $g(x)$가 미분가능하다.



조건 (나)를 만족시키도록 함수 $f(x)$의 그래프를 그리면 위와 같다.

이때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 같다.

(함수 $y=x(x-2)(x-3)$의 $x=0$에서의 우미분계수)

$=6\ge-12a=f'(0)$에서 $a\ge-\dfrac{1}{2}$

(함수 $y=-x(x-2)(x-3)$의 $x=3$에서의 좌미분계수)

$=-3\le3a=f'(3)$에서 $a\ge-1$

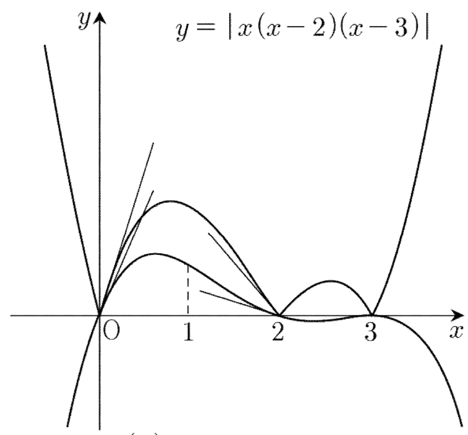
a의 범위는 $a\ge-\dfrac{1}{2}$이므로 $f(1)=-2a\le1$

• 경우3

아래 그림처럼 실수 전체의 집합에서

$f(x)\le|x(x-2)(x-3)|$

이어야 함수 $g(x)$가 미분가능하다.



조건 (나)를 만족시키도록 함수 $f(x)$의 그래프를 그리면 위와 같다.

이때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 같다.

(함수 $y=x(x-2)(x-3)$의 $x=0$에서의 우미분계수)

$=6\ge-18a=f'(0)$에서 $a\ge-\dfrac{1}{3}$

(함수 $y=x(x-2)(x-3)$의 $x=2$에서의 좌미분계수)

$=-2\le2a=f'(2)$에서 $a\ge-1$

a의 범위는 $a\ge-\dfrac{1}{3}$이므로 $f(1)=-4a\le\dfrac{4}{3}$

이상에서 '경우3' 일 때, $f(1)$의 최댓값은 $\dfrac{4}{3}$이다.

답 ②

[참고]

경우1, 경우2, 경우3에서 a의 값에 따른 두 함수

$f(x)$, $g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

- 경우1

구간 $(2, 3)$에서 방정식 $f(x)=h(x)$는

$ax^2(x-2)(x-3)=-x(x-2)(x-3)$

정리하면 $ax=-1$ 풀면 $x=-\frac{1}{a}$

이때, $2<-\frac{1}{a}<3$에서 $-\frac{1}{2}<a<-\frac{1}{3}$

$f'\left(-\frac{1}{a}\right)=-\frac{4}{a^2}-\frac{15}{a}-12$,

$h'\left(-\frac{1}{a}\right)=-\frac{3}{a^2}-\frac{10}{a}-6$

$f'\left(-\frac{1}{a}\right)$과 $h'\left(-\frac{1}{a}\right)$의 값이 같다고 가정하면

$-\frac{4}{a^2}-\frac{15}{a}-12=-\frac{3}{a^2}-\frac{10}{a}-6$

정리하면

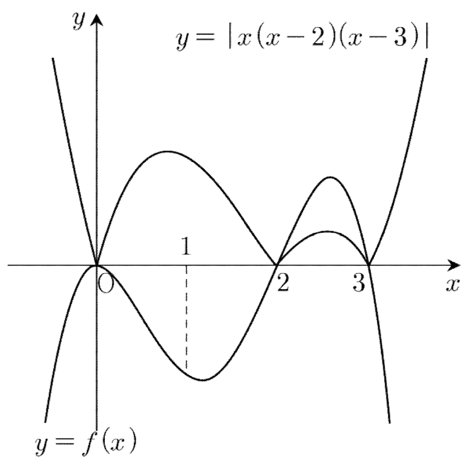
$\frac{1}{a^2}+\frac{5}{a}+6=0$, $\left(\frac{1}{a}+2\right)\left(\frac{1}{a}+3\right)=0$

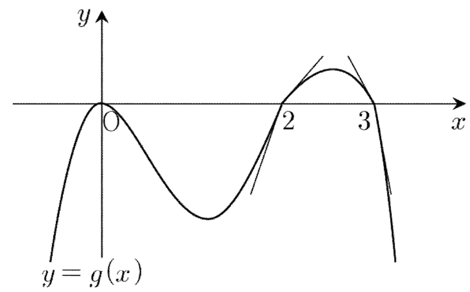
풀면 $a=-\frac{1}{2}$ 또는 $a=-\frac{1}{3}$

이는 가정에 모순이다.

따라서 $f'\left(-\frac{1}{a}\right)\neq h'\left(-\frac{1}{a}\right)$이다.

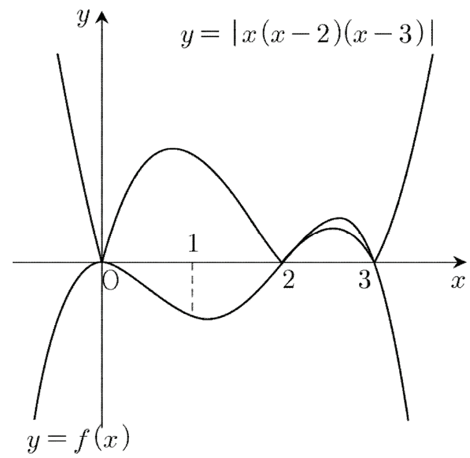
$a<-\frac{1}{2}$일 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



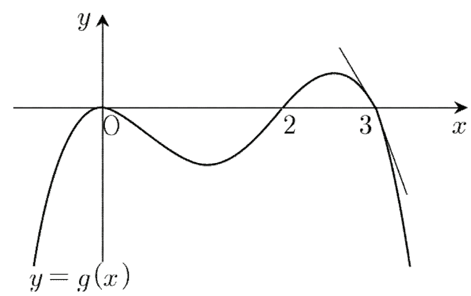


함수 $g(x)$는 $x=2$, $x=3$에서 미분가능하지 않다.

$a=-\frac{1}{2}$일 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

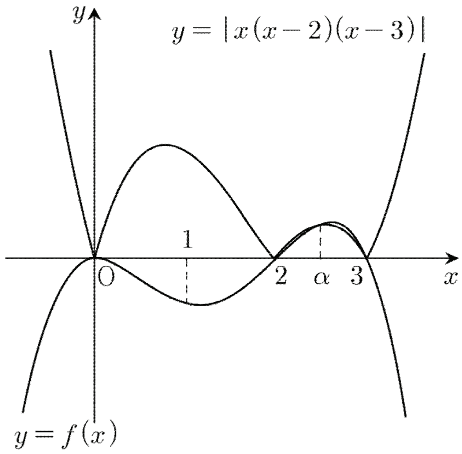


두 곡선 $y=f(x)$, $y=-x(x-2)(x-3)$은 점 $(2, 0)$에서 접한다.

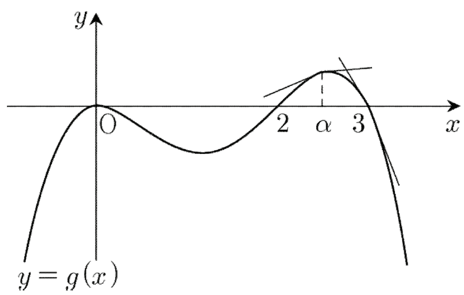


함수 $g(x)$는 $x=3$에서 미분가능하지 않다.

$-\frac{1}{2}<a<-\frac{1}{3}$일 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

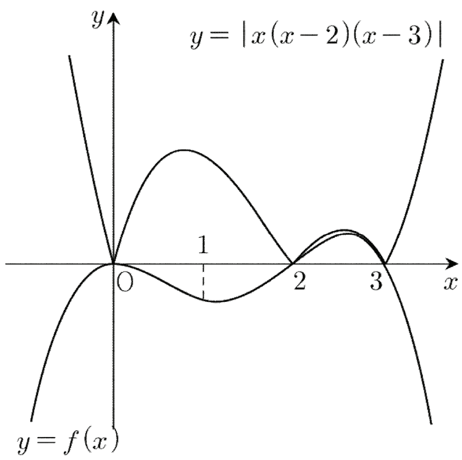


두 곡선 $y=f(x)$, $y=|x(x-2)(x-3)|$은 구간 $(2,\ 3)$에서 만난다. 이때, 교점의 x좌표를 α라고 하자.



함수 $g(x)$는 $x=\alpha$, $x=3$에서 미분가능하지 않다.

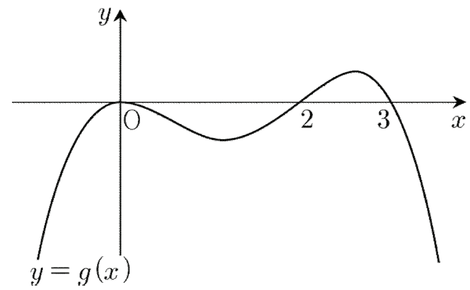
$a=-\dfrac{1}{3}$일 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



두 곡선 $y=f(x)$, $y=-x(x-2)(x-3)$은 점 $(3,\ 0)$에서 접한다.

실수 전체의 집합에서

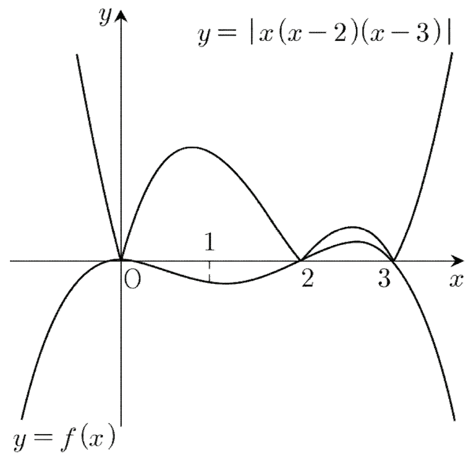
$f(x)\leq|x(x-2)(x-3)|$이므로 $g(x)=f(x)$이다.



함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

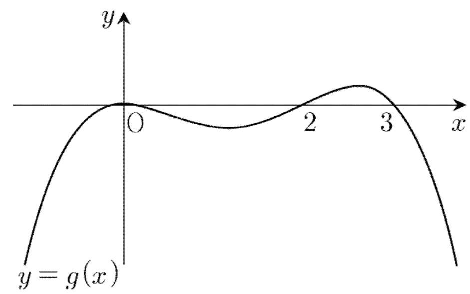
이때, $f(1)<0$이다.

$-\dfrac{1}{3}<a<0$일 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



실수 전체의 집합에서

$f(x)\leq|x(x-2)(x-3)|$이므로 $g(x)=f(x)$이다.



함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

이때, $f(1)<0$이다.

- 경우2

구간 $(0,\ 2)$에서 방정식 $f(x)=h(x)$는

$ax(x-2)^2(x-3)=x(x-2)(x-3)$

정리하면 $a(x-2)=1$ 풀면 $x=2+\dfrac{1}{a}$

이때, $0<2+\dfrac{1}{a}<2$에서 $a<-\dfrac{1}{2}$

$f'\left(2+\frac{1}{a}\right)=\frac{4}{a^2}+\frac{3}{a}-4$,

$h'\left(2+\frac{1}{a}\right)=\frac{3}{a^2}+\frac{2}{a}-2$

$f'\left(2+\frac{1}{a}\right)$과 $h'\left(2+\frac{1}{a}\right)$의 값이 같다고 가정하면

$\frac{4}{a^2}+\frac{3}{a}-4=\frac{3}{a^2}+\frac{2}{a}-2$

정리하면

$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a}-2=0$, $\left(\frac{1}{a}+2\right)\left(\frac{1}{a}-1\right)=0$

풀면 $a=-\frac{1}{2}$ 또는 $a=1$

이는 가정에 모순이다.

따라서 $f'\left(2+\frac{1}{a}\right)\neq h'\left(2+\frac{1}{a}\right)$이다.

구간 $(2,\ 3)$에서 방정식 $f(x)=h(x)$는

$ax(x-2)^2(x-3)=-x(x-2)(x-3)$

정리하면 $a(x-2)=-1$ 풀면 $x=2-\frac{1}{a}$

이때, $2<2-\frac{1}{a}<3$에서 $a<-1$

$f'\left(2-\frac{1}{a}\right)=-\frac{4}{a^2}+\frac{3}{a}+4$,

$h'\left(2-\frac{1}{a}\right)=-\frac{3}{a^2}+\frac{2}{a}+2$

$f'\left(2-\frac{1}{a}\right)$과 $h'\left(2-\frac{1}{a}\right)$의 값이 같다고 가정하면

$-\frac{4}{a^2}+\frac{3}{a}+4=-\frac{3}{a^2}+\frac{2}{a}+2$

정리하면

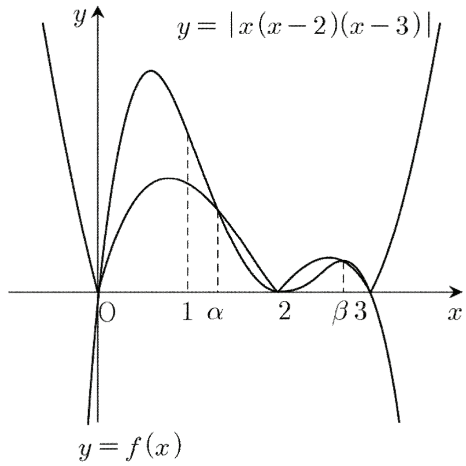
$\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a}-2=0$, $\left(\frac{1}{a}-2\right)\left(\frac{1}{a}+1\right)=0$

풀면 $a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=-1$

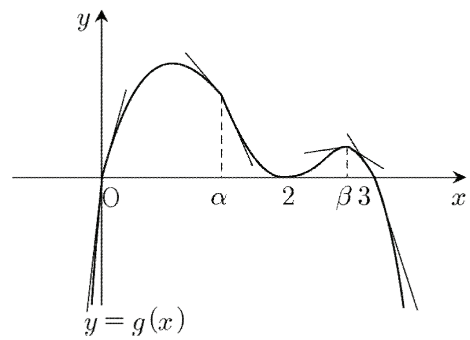
이는 가정에 모순이다.

따라서 $f'\left(2-\frac{1}{a}\right)\neq h'\left(2-\frac{1}{a}\right)$이다.

$a<-1$일 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

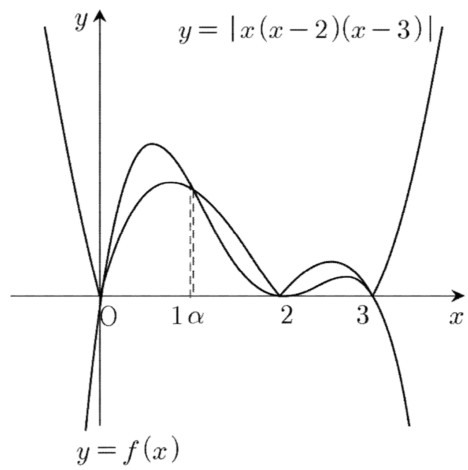


두 함수 $f(x)$, $h(x)$는 구간 $(0,\ 2)$와 구간 $(2,\ 3)$에서 각각 한번 씩 만난다. 이때, 두 교점의 x좌표를 각각 α, β라고 하자. (단, $\alpha<\beta$)



함수 $g(x)$는 $x=0$, $x=\alpha$, $x=\beta$, $x=3$에서 미분가능하지 않다.

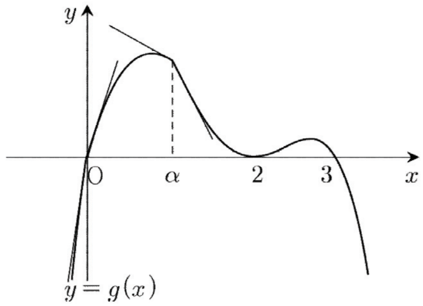
$a=-1$일 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



두 함수 $f(x)$, $h(x)$는 구간 $(0,\ 2)$에서 만난다. 이때, 교점의 x좌표를 α라고 하자.

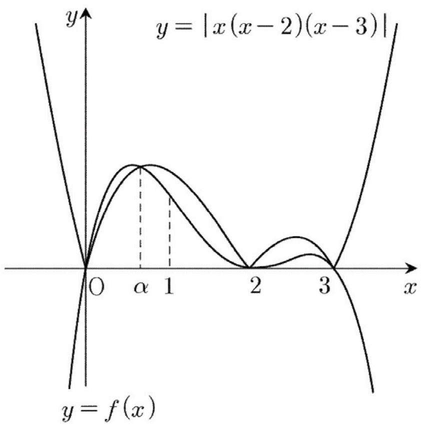
그리고 두 곡선 $y=f(x)$, $y=-x(x-2)(x-3)$은

점 $(3,\ 0)$에서 접한다.

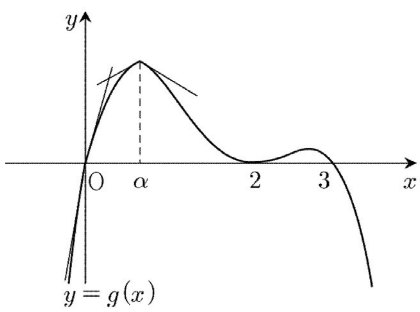


함수 $g(x)$는 $x=0$, $x=\alpha$에서 미분가능하지 않다.

$-1 < a < -\dfrac{1}{2}$일 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

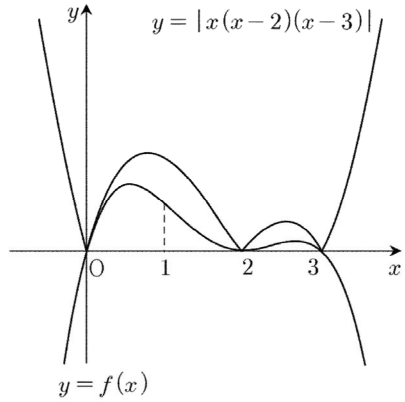


두 함수 $f(x)$, $h(x)$는 구간 $(0,\ 2)$에서 만난다. 이때, 교점의 x좌표를 α라고 하자.



함수 $g(x)$는 $x=0$, $x=\alpha$에서 미분가능하지 않다.

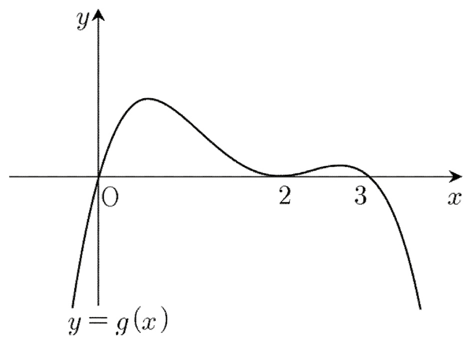
$a=-\dfrac{1}{2}$일 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



두 곡선 $y=f(x)$, $y=x(x-2)(x-3)$은 원점에서 접한다.

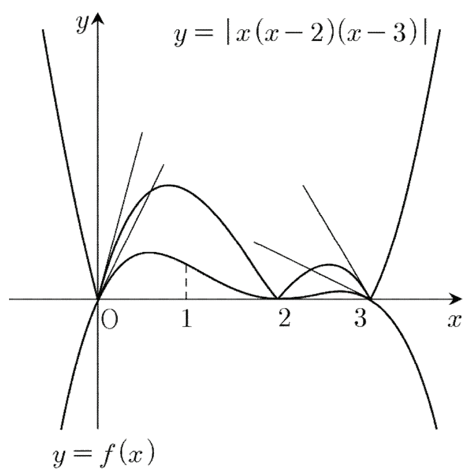
그리고 실수 전체의 집합에서

$f(x) \le |x(x-2)(x-3)|$이므로 $g(x)=f(x)$이다.



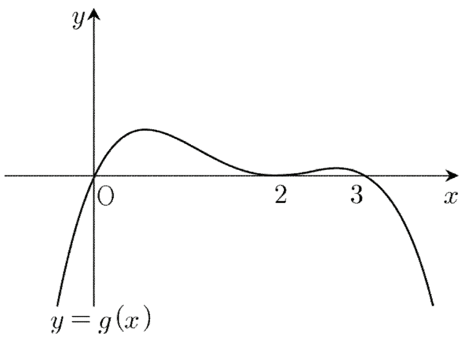
함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

$-\dfrac{1}{2} < a < 0$일 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



실수 전체의 집합에서

$f(x) \le |x(x-2)(x-3)|$이므로 $g(x)=f(x)$이다.



함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

• 경우3

구간 $(0,\ 2)$에서 방정식 $f(x)=h(x)$는

$ax(x-2)(x-3)^2=x(x-2)(x-3)$

정리하면 $a(x-3)=1$ 풀면 $x=3+\dfrac{1}{a}$

이때, $0<3+\dfrac{1}{a}<2$에서 $-1<a<-\dfrac{1}{3}$

$f'\left(3+\dfrac{1}{a}\right)=\dfrac{4}{a^2}+\dfrac{12}{a}+6$,

$h'\left(3+\dfrac{1}{a}\right)=\dfrac{3}{a^2}+\dfrac{8}{a}+3$

$f'\left(3+\dfrac{1}{a}\right)$과 $h'\left(3+\dfrac{1}{a}\right)$의 값이 같다고 가정하면

$\dfrac{4}{a^2}+\dfrac{12}{a}+6=\dfrac{3}{a^2}+\dfrac{8}{a}+3$

정리하면

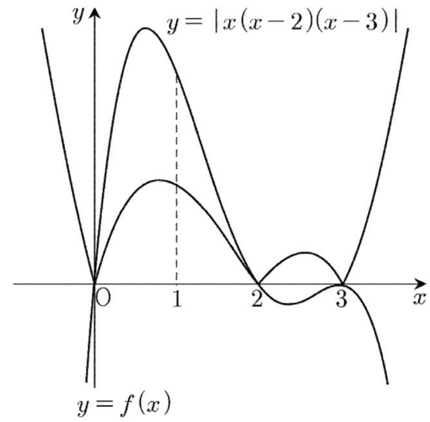
$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{4}{a}+3=0$, $\left(\dfrac{1}{a}+1\right)\left(\dfrac{1}{a}+3\right)=0$

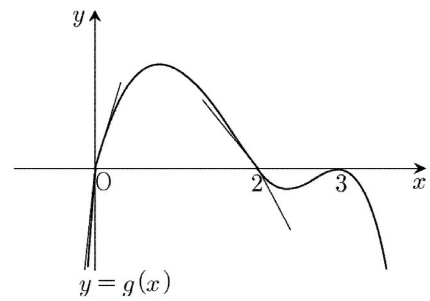
풀면 $a=-\dfrac{1}{3}$ 또는 $a=-1$

이는 가정에 모순이다.

따라서 $f'\left(3+\dfrac{1}{a}\right)\neq h'\left(3+\dfrac{1}{a}\right)$이다.

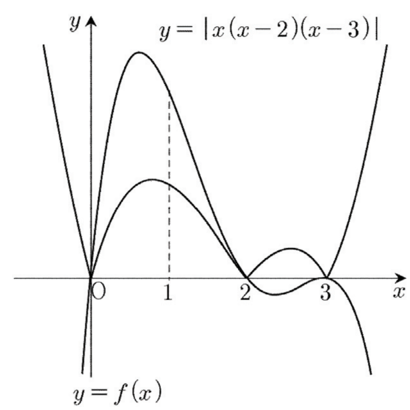
$a<-1$일 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



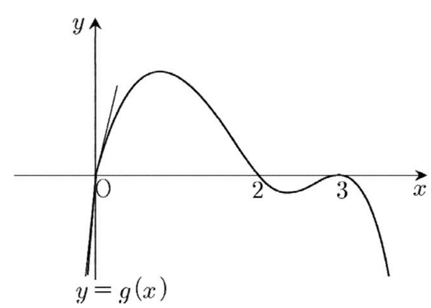


함수 $g(x)$는 $x=0$, $x=2$에서 미분가능하지 않다.

$a=-1$일 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

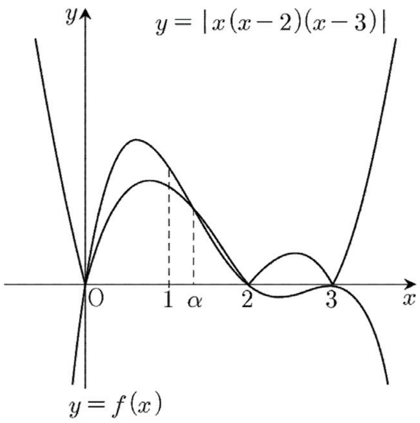


두 곡선 $y=f(x)$, $y=x(x-2)(x-3)$은 점 $(2,\ 0)$에서 접한다.

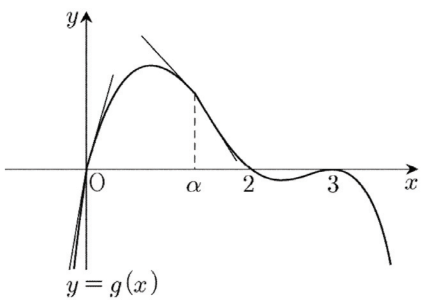


함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

$-1 < a < -\frac{1}{3}$ 일 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

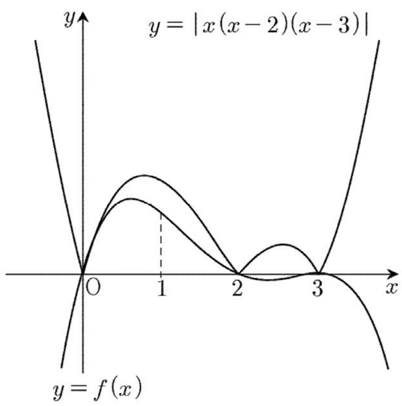


두 곡선 $y = f(x)$, $y = h(x)$는 구간 $(0,\ 2)$에서 만난다. 이때, 교점의 x좌표를 α라고 하자.

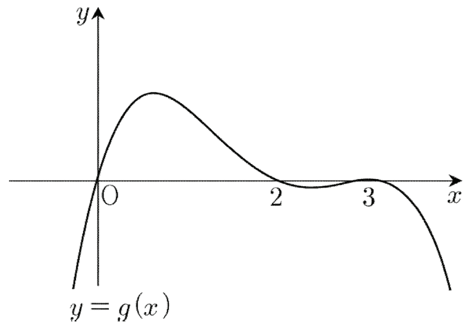


함수 $g(x)$는 $x = 0$, $x = \alpha$에서 미분가능하지 않다.

$a = -\frac{1}{3}$ 일 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

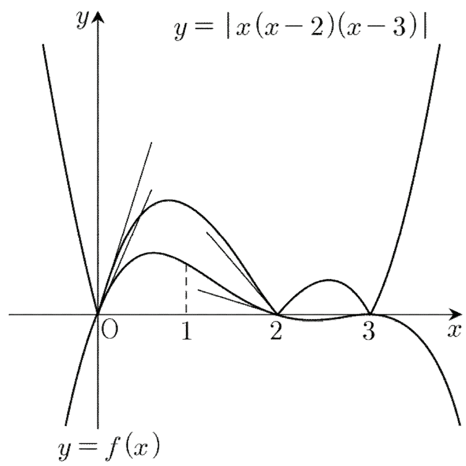


두 곡선 $y = f(x)$, $y = x(x-2)(x-3)$은 원점에서 접한다.
그리고 실수 전체의 집합에서
$f(x) \le |x(x-2)(x-3)|$ 이므로 $g(x) = f(x)$이다.

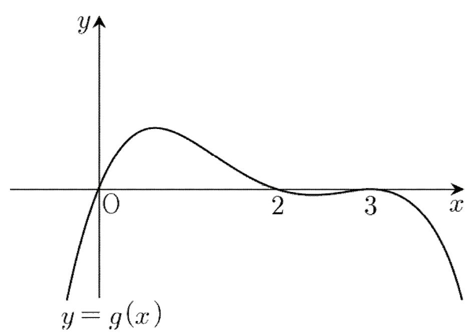


함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

$-\frac{1}{3} < a < 0$일 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



실수 전체의 집합에서
$f(x) \le |x(x-2)(x-3)|$ 이므로 $g(x) = f(x)$이다.

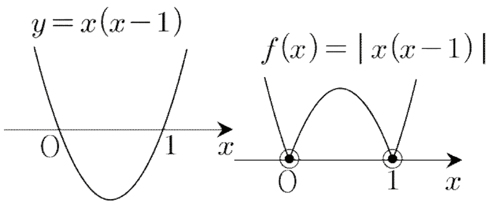


함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

133 | 답 풀이참고

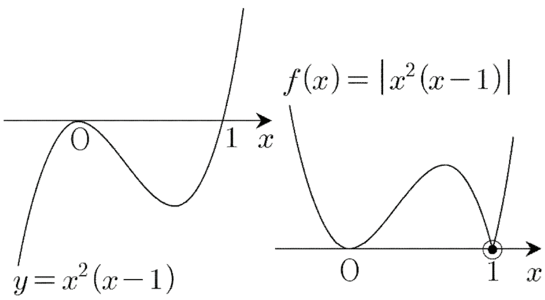
[풀이]

(1)



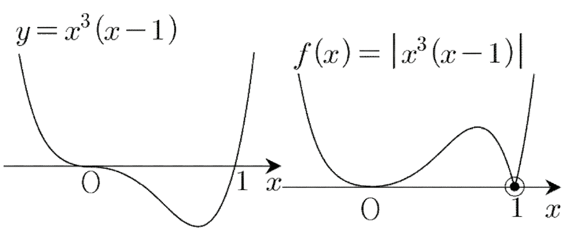
위의 그림에서 함수 $f(x)$는 $x=0$, $x=1$에서 미분가능하지 않다.

(2)



위의 그림에서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

(3)



위의 그림에서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

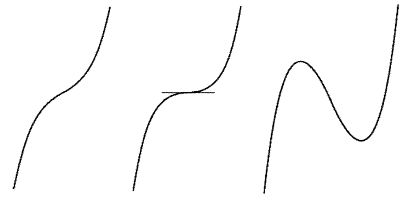
답 풀이 참조

134 | 답 ⑤

[풀이1] 시험장 ★

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수인 경우만을 생각해도 풀이의 일반성을 잃지 않는다.

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수의 그래프의 개형을 모두 그리면 다음과 같다.



조건 (가)에서 $f(-1)=0$, $f'(-1)\neq 0$이다.

조건 (나)에서 $f(\alpha)=0$라고 하자. (단, $3\leq\alpha\leq 5$)

그런데 조건 (가)에서 함수 $|f(x)|$는 $x=\alpha$에서 미분가능해야 하므로 $f'(\alpha)=0$이다.

이상을 정리하면

$f(-1)=0$, $f'(-1)\neq 0$,

$f(\alpha)=0$, $f'(\alpha)=0$

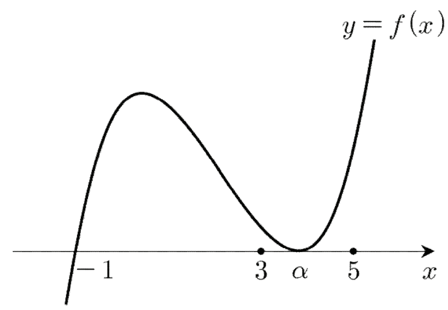
함수 $f(x)$의 그래프는

두 점 $(-1,\ 0)$, $(\alpha,\ 0)$을 지나고,

점 $(-1,\ 0)$에서 x축에 접하지 않지만

점 $(\alpha,\ 0)$에서 x축에 접해야 한다.

이를 모두 만족시키는 함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



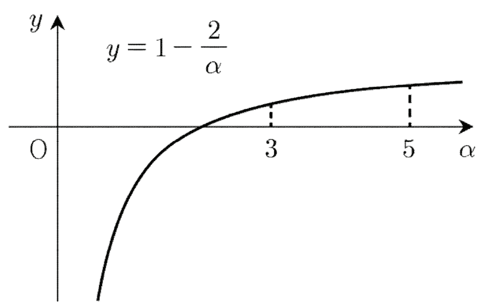
함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=a(x+1)(x-\alpha)^2$ (단, $a>0$, $3\leq\alpha\leq 5$)

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=a(x-\alpha)^2+2a(x+1)(x-\alpha)$

$$\frac{f'(0)}{f(0)}=\frac{a\alpha^2-2a\alpha}{a\alpha^2}=1-\frac{2}{\alpha}$$



구간 $[3,\ 5]$에서 α에 대한 함수 $\frac{f'(0)}{f(0)}$은 증가하므

로

$\alpha=3$일 때, 함수 $\dfrac{f'(0)}{f(0)}$은 최솟값 $m=\dfrac{1}{3}$을 갖고,

$\alpha=5$일 때, 함수 $\dfrac{f'(0)}{f(0)}$은 최솟값 $M=\dfrac{3}{5}$을 갖는다.

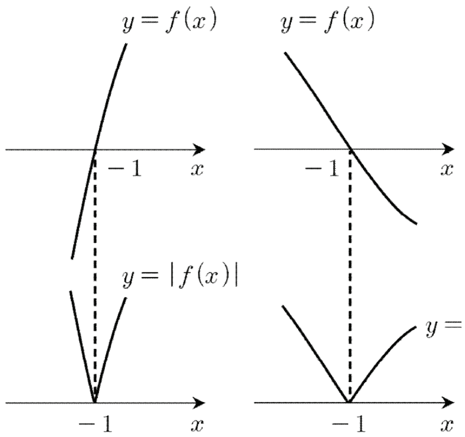
$\therefore\ Mm=\dfrac{1}{5}$

답 ⑤

[풀이2]

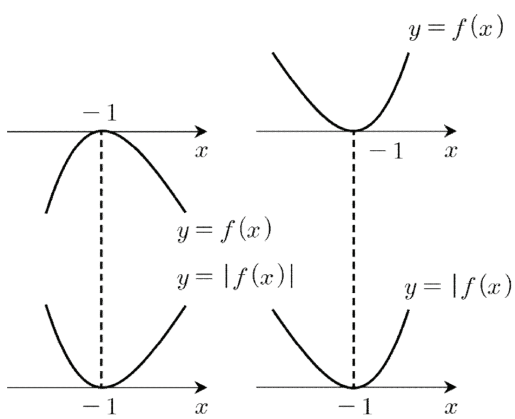
$f(x)$의 최고차항의 계수가 양수인 경우를 생각하자.

- $f(x)$가 $x+1$을 인수로 갖고 $(x+1)^2$ 또는 $(x+1)^3$을 인수로 갖지 않는 경우



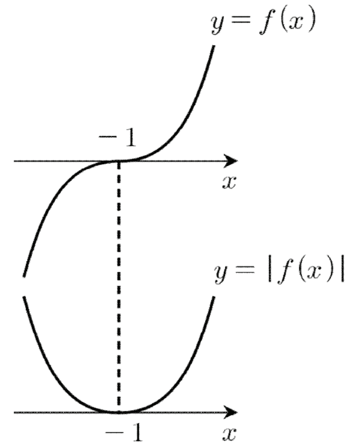
위의 그림처럼 함수 $|f(x)|$는 $x=-1$에서 미분가능하지 않다.

- $f(x)$가 $(x+1)^2$을 인수로 갖고 $(x+1)^3$을 인수로 갖지 않는 경우



위의 그림처럼 함수 $|f(x)|$는 $x=-1$에서 미분가능하다.

- $f(x)$가 $(x+1)^3$을 인수로 갖는 경우



위의 그림처럼 함수 $|f(x)|$는 $x=-1$에서 미분가능하다.

따라서 $f(x)$는 $x+1$을 인수로 갖고 $(x+1)^2$ 또는 $(x+1)^3$을 인수로 가질 수 없다.

함수 $f(x)$의 방정식을

$f(x)=(x+1)(ax^2+bx+c)(a>0)$

조건 (나)에 의하여 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$은 구간 $[3,\ 5]$에서 적어도 하나의 실근을 가지므로 이 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖거나, 중근을 가져야 한다.

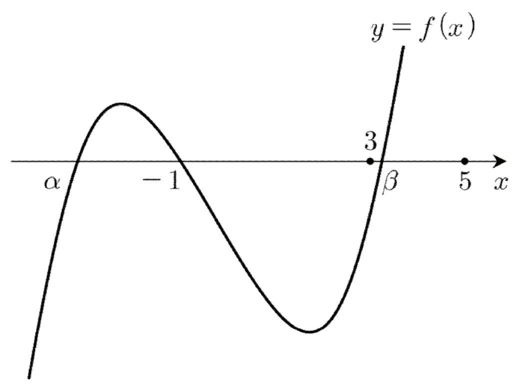
- 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 두 실근을 갖는 경우

이 두 실근을 각각 α, β라고 하자.

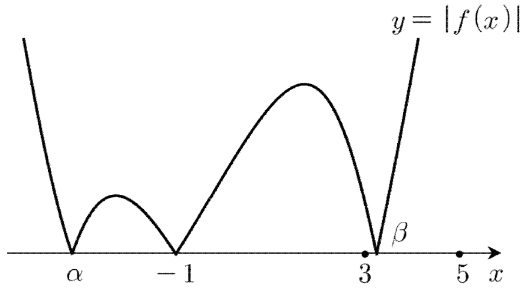
(단, $\alpha\neq\beta$, $\alpha\neq-1$, $3\leq\beta\leq5$)

$\alpha<-1<\beta$인 경우

함수 $f(x)$의 그래프는



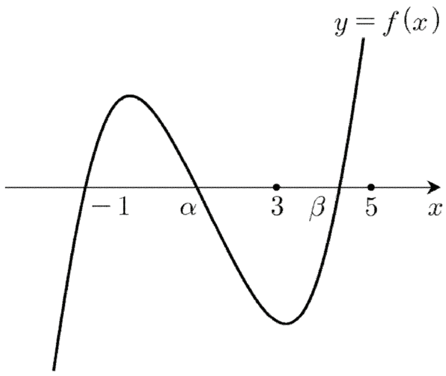
함수 $|f(x)|$의 그래프는



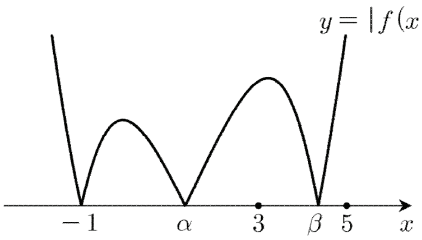
위의 그림에서 함수 $|f(x)|$는 $x=\alpha$, $x=-1$, $x=\beta$에서 미분가능하지 않다. 이는 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

$-1<\alpha<\beta$인 경우

함수 $f(x)$의 그래프는



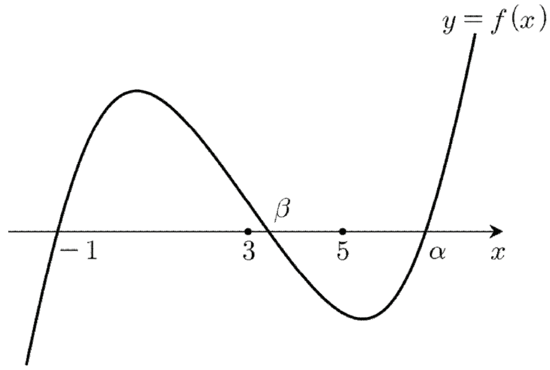
함수 $|f(x)|$의 그래프는



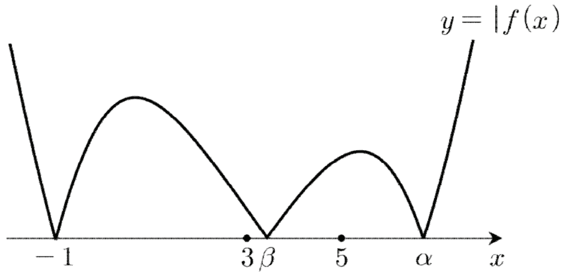
위의 그림에서 함수 $|f(x)|$는 $x=\alpha$, $x=-1$, $x=\beta$에서 미분가능하지 않다. 이는 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

$-1<\beta<\alpha$인 경우

함수 $f(x)$의 그래프는



함수 $|f(x)|$의 그래프는

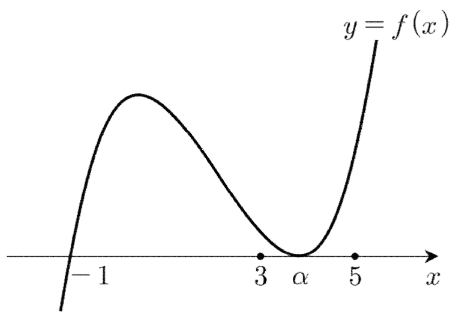


위의 그림에서 함수 $|f(x)|$는 $x=-1$, $x=\beta$, $x=\alpha$에서 미분가능하지 않다. 이는 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

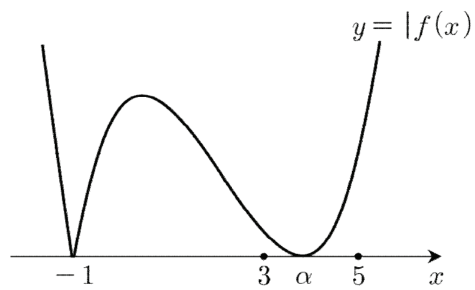
- 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 중근을 갖는 경우

중근을 α라고 하자. (단, $3\le\alpha\le5$)

함수 $f(x)$의 그래프는



함수 $|f(x)|$의 그래프는



위의 그림에서 함수 $|f(x)|$는 $x=-1$에서만 미분가능하지 않다. 즉, 조건 (가)를 만족시킨다.

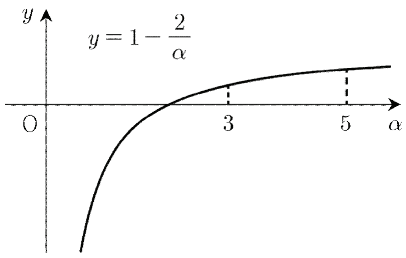
함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=a(x+1)(x-\alpha)^2$ (단, $a>0$, $3\le\alpha\le 5$)

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=a(x-\alpha)^2+2a(x+1)(x-\alpha)$

$\dfrac{f'(0)}{f(0)}=\dfrac{a\alpha^2-2a\alpha}{a\alpha^2}=1-\dfrac{2}{\alpha}$



구간 $[3,\ 5]$에서 α에 대한 함수 $\dfrac{f'(0)}{f(0)}$은 증가하므로

$\alpha=3$일 때, 함수 $\dfrac{f'(0)}{f(0)}$은 최솟값 $m=\dfrac{1}{3}$을 갖고,

$\alpha=5$일 때, 함수 $\dfrac{f'(0)}{f(0)}$은 최솟값 $M=\dfrac{3}{5}$을 갖는다.

$\therefore\ Mm=\dfrac{1}{5}$

$f(x)$의 최고차항의 계수가 음수인 경우에도 동일한 결과를 얻는다.

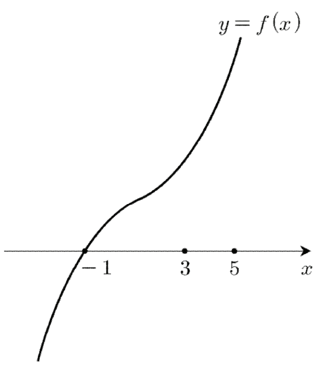
답 ⑤

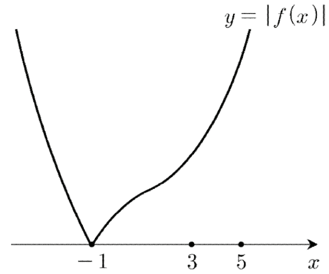
[풀이3]

$f(x)$의 최고차항의 계수가 양수인 경우를 생각하자.

• 방정식 $f'(x)=0$이 실근을 갖지 않는 경우

함수 $f(x)$의 그래프가 아래와 같다고 하자.

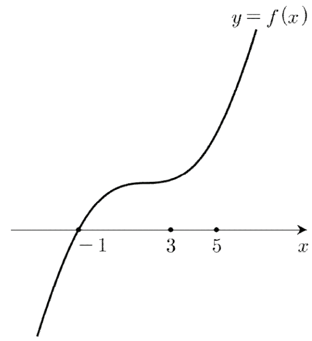


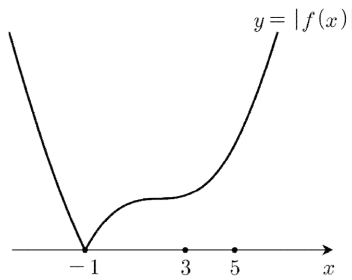


함수 $|f(x)|$의 그래프는 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

• 방정식 $f'(x)=0$이 중근을 갖는 경우

함수 $f(x)$의 그래프가 아래와 같다고 하자.

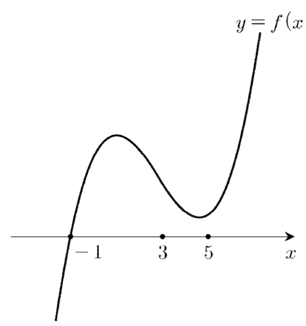


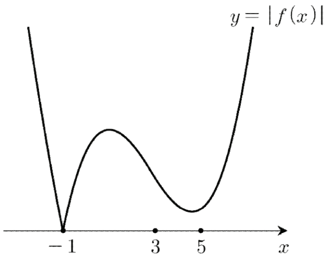


함수 $|f(x)|$의 그래프는 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

• 방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 갖는 경우

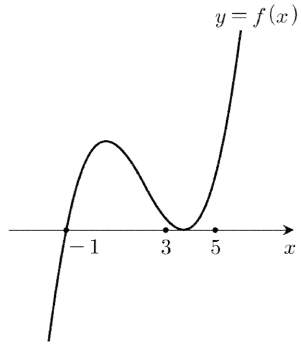
함수 $f(x)$의 그래프가 아래와 같다고 하자.

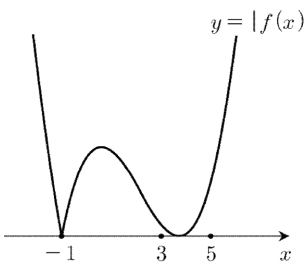




함수 $|f(x)|$의 그래프는 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

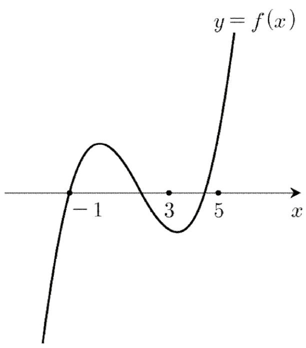
함수 $f(x)$의 그래프가 아래와 같다고 하자.

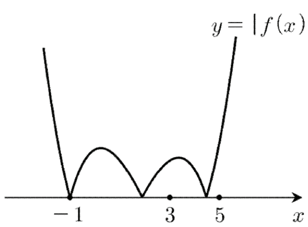




함수 $|f(x)|$의 그래프는 조건 (가), (나)를 모두 만족시킨다.

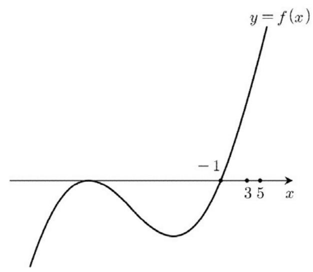
함수 $f(x)$의 그래프가 아래와 같다고 하자.

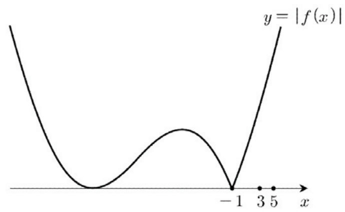




함수 $|f(x)|$의 그래프는 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

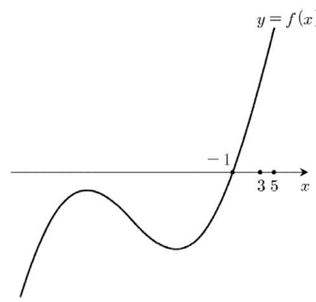
함수 $f(x)$의 그래프가 아래와 같다고 하자.

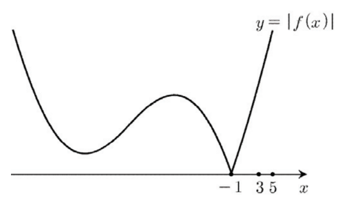




함수 $|f(x)|$의 그래프는 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

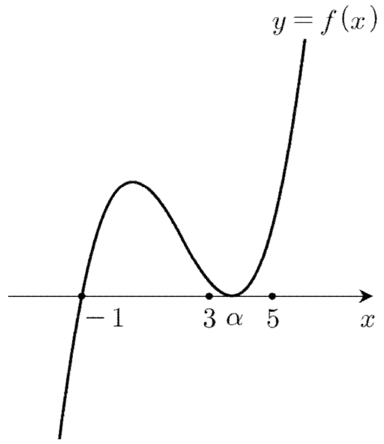
함수 $f(x)$의 그래프가 아래와 같다고 하자.



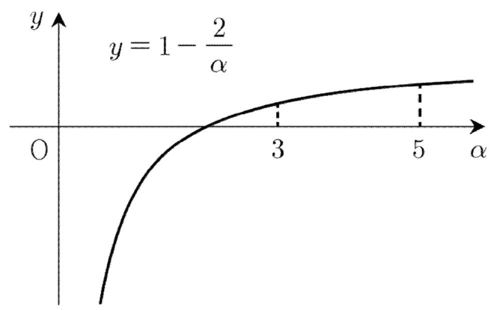


함수 $|f(x)|$의 그래프는 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

이상에서 가능한 함수 $f(x)$의 그래프의 개형은



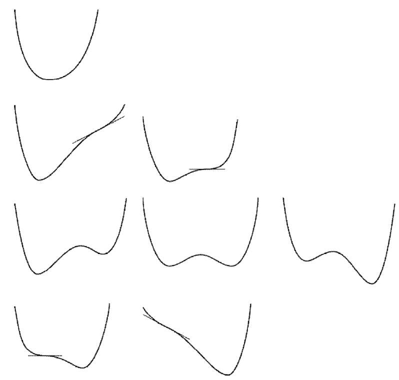
방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 두 실근을 각각 -1, α라고 하자.
함수 $f(x)$의 방정식은
$f(x)=a(x+1)(x-\alpha)^2$
(단, $a>0$, $3\le\alpha\le5$)
함수 $f(x)$의 도함수는
$f'(x)=a(x-\alpha)^2+2a(x+1)(x-\alpha)$
이므로
$\dfrac{f'(0)}{f(0)}=\dfrac{a\alpha^2-2a\alpha}{a\alpha^2}=1-\dfrac{2}{\alpha}$



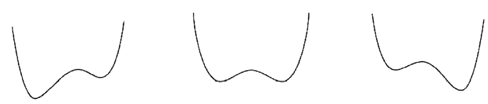
구간 $[3,\ 5]$에서 α에 대한 함수 $\dfrac{f'(0)}{f(0)}$은 증가하므로
$\alpha=3$일 때, 함수 $\dfrac{f'(0)}{f(0)}$은 최솟값 $m=\dfrac{1}{3}$을 갖고,
$\alpha=5$일 때, 함수 $\dfrac{f'(0)}{f(0)}$은 최솟값 $M=\dfrac{3}{5}$을 갖는다.
$\therefore\ Mm=\dfrac{1}{5}$
$f(x)$의 최고차항의 계수가 음수인 경우에도 동일한 결과를 얻는다.
답 ⑤

135 | 답 ③

[풀이]
우선 최고차항의 계수가 양수인 사차함수의 그래프의 개형을 모두 그리면 다음과 같다. (총8가지)

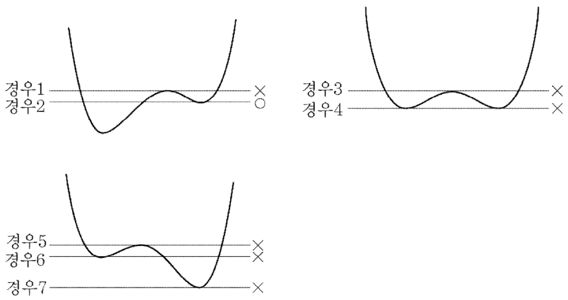


최고차항의 계수가 양수인 사차함수의 그래프의 개형은 극대점을 갖는 경우와 극대점을 갖지 않는 경우로 나눌 수 있다. 만약 $f(x)$가 극대점을 갖지 않는다면 함수 $|g(x)|$의 극소점의 개수가 3 이상일 수 없다. 따라서 함수 $f(x)$는 극댓값을 가져야 한다.
아래의 세 경우로 좁혀진다.



조건 (가), (나)에서 함수 $g(x)$가 $x=1$에서 미분가능하고 극솟값을 가지므로
$g'(1)=0$
조건 (가)에서
$g(1)=0$이므로 $f(1)=0$
다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)=0$이고,
$g(x)=|f(x)|$가 $x=1$에서 미분가능하므로
$f'(1)=0$이다.
이상을 정리하면 다음과 같다.
❶ 곡선 $y=f(x)$는 x축 위의 점 $(1,\ 0)$을 지나야 하고, 이 점에서의 접선은 x축이다. 즉, 점 $(1,\ 0)$은 함수 $f(x)$의 극점이다.
❷ 함수 $y=|f(x)|$는 $x=-1$, $x=0$, $x=1$에서 극솟값을 갖는다.
x축(직선 $y=f(1)$) 아래의 곡선 $y=f(x)$를 접어서 올린 후, x축 아래의 곡선을 모두 지우면 곡선

$y=g(x)$를 얻는다.



함수 $g(x)$의 극소점의 개수가 2 이하인 경우

(경우4), (경우7)

함수 $g(x)$가 $x=-1$와 $x=0$에서 동시에 극솟값을 가질 수 없는 경우

(경우1), (경우3), (경우5)

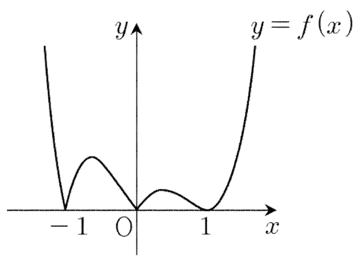
함수 $g(x)$가 $x=-1$ 또는 $x=0$에서 극솟값을 가질 수 없는 경우

(경우6)

❶, ❷를 모두 만족시키는 그래프의 개형은 오직 (경우2)뿐이다.

(즉, 위의 그림에서 ○인 경우만 가능하다.)

함수 $f(x)$의 그래프는 아래 그림과 같아야 한다.



인수정리에 의하여 함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=x(x+1)(x-1)^2$

함수 $g(x)$의 방정식은

$g(x)=\left|x(x+1)(x-1)^2\right|$

$\therefore\ g(2)=6$

답 ③

136 | 답 12

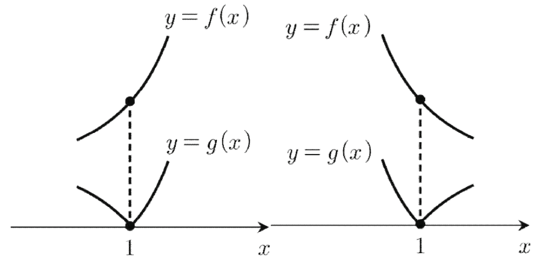
▶ 실전풀이: [풀이2]

[풀이1]

함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 양수라고 하자.

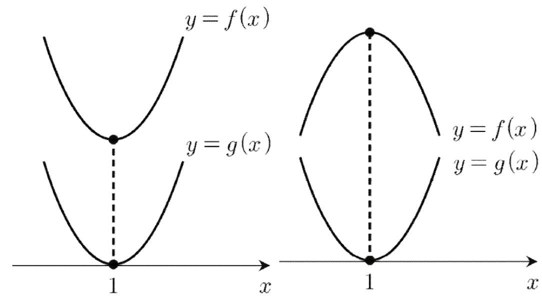
$g(x)=|f(x)-f(1)|$으로 두자.

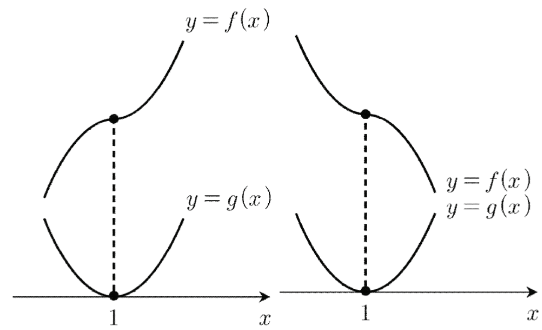
(1) $f'(1)>0$ 또는 $f'(1)<0$인 경우



위의 그림에서 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

(2) $f'(1)=0$인 경우





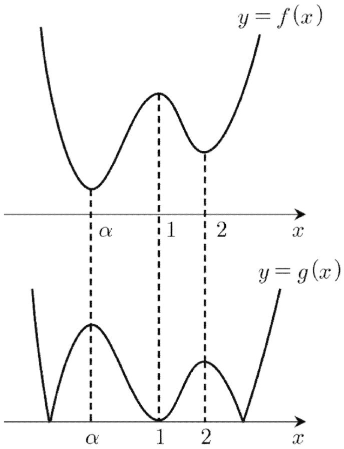
위의 그림에서 $f'(1)=0$이면 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

(1), (2)에서 $f'(1)=0$이면 조건 (나)가 성립한다.

조건 (가)에서 $f'(2)=0$이므로 함수 $f(x)$의 도함수는

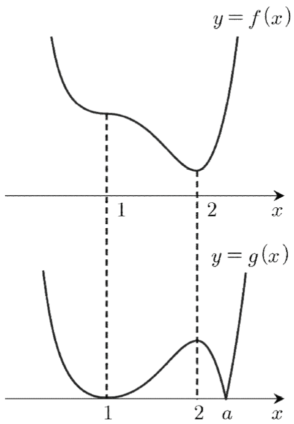
$f'(x)=k(x-1)(x-2)(x-\alpha)$(단, $k>0$)

- $\alpha<1$인 경우



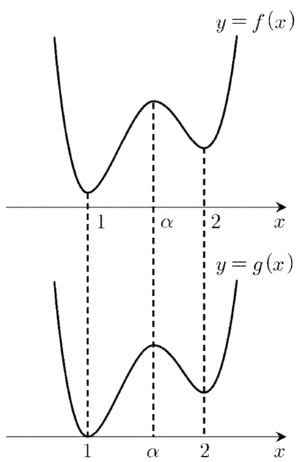
위의 그림에서 함수 $g(x)$의 미분불가능한 점의 개수는 2이다.

• $\alpha=1$인 경우

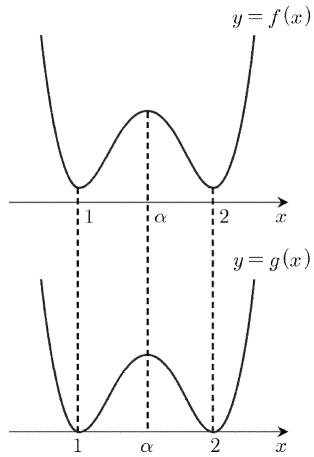


위의 그림에서 함수 $g(x)$의 미분불가능한 점의 개수는 1이고, 조건 (나)를 만족시킨다.

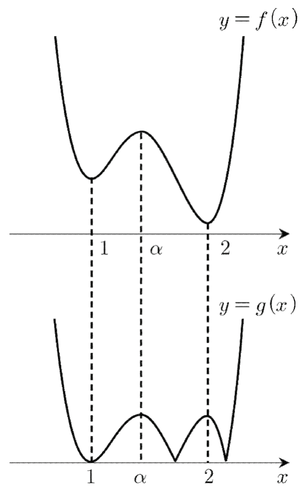
• $1<\alpha<2$인 경우



위의 그림에서 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

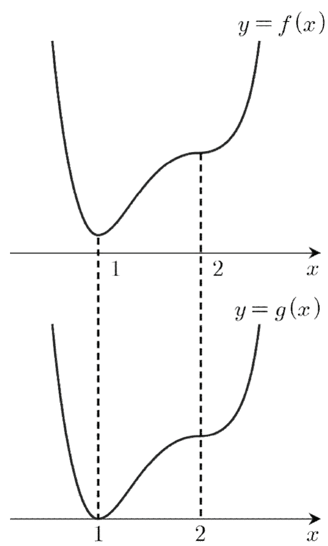


위의 그림에서 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.



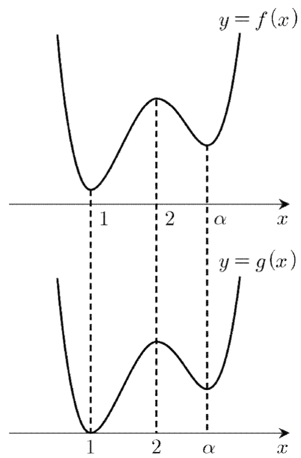
위의 그림에서 함수 $g(x)$의 미분불가능한 점의 개수는 2이다.

• $\alpha=2$인 경우

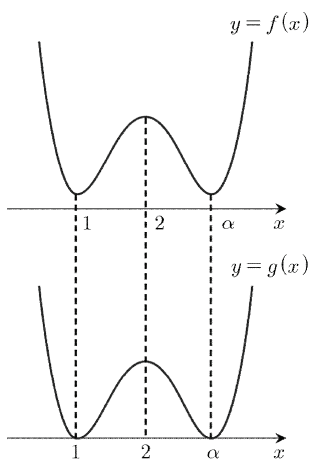


위의 그림에서 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

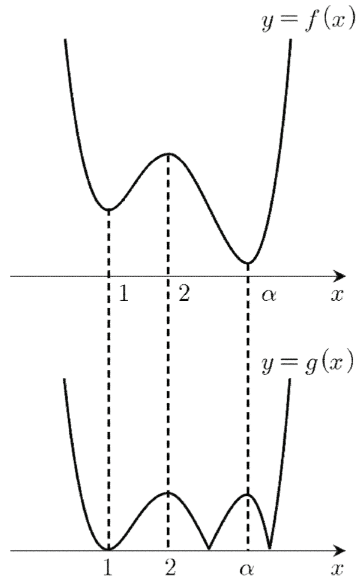
- $\alpha > 2$인 경우



위의 그림에서 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.



위의 그림에서 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.



위의 그림에서 함수 $g(x)$의 미분불가능한 점의 개수는 2이다.

이상에서 $\alpha = 1$이다.

도함수 $f'(x)$의 방정식은

$f'(x) = k(x-1)^2(x-2)$

$f'(5)=48k$, $f'(3)=4k$이므로

$\therefore \dfrac{f'(5)}{f'(3)}=12$

함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 음수일 때에도 같은 결과를 얻는다.

답 12

[풀이2] ★

사차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수라고 해도 풀이의 일반성을 잃지 않는다.

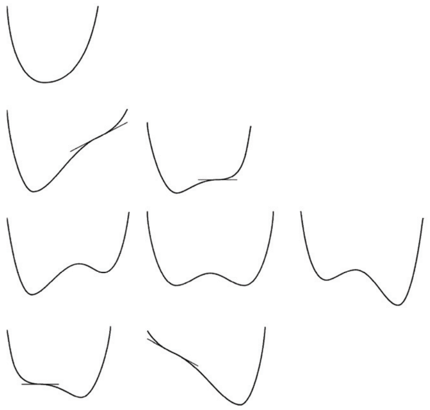
조건 (가)에 의하여 $f'(2)=0$이다.

조건 (나)에 의하여

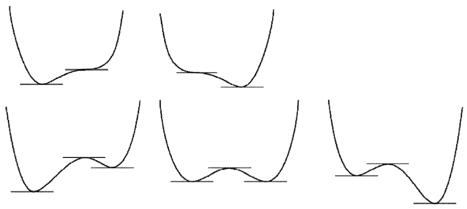
함수 $|f(x)-f(1)|$은 $x=1$에서 미분가능하므로

$f'(1)=0$이다.

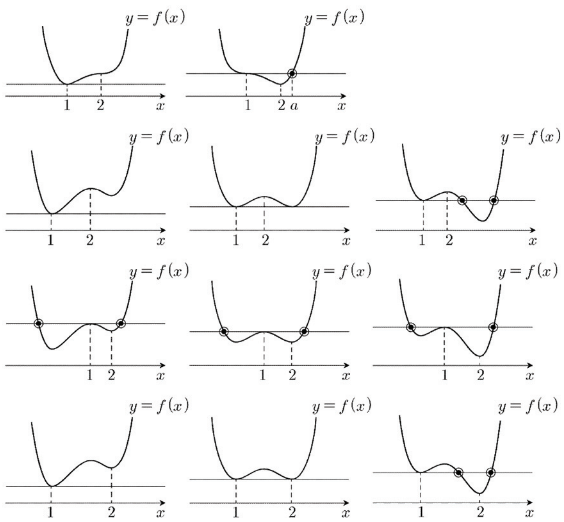
최고차항의 계수가 양수인 사차함수의 그래프의 개형을 모두 그리면 다음과 같다.



방정식 $f'(x)=0$은 적어도 2개 이상의 서로 다른 실근을 가지므로 함수 $f(x)$의 그래프의 개형으로 가능한 사차함수의 그래프의 개형을 모두 그리면 다음과 같다.

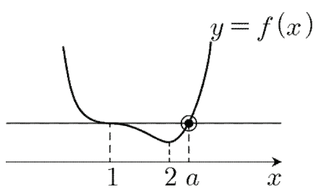


이제 좌표평면을 도입하자.



(단, ◉는 함수 $|f(x)-f(1)|$가 미분가능하지 않은 점이다.)

위의 11가지의 경우 중에서 문제에서 주어진 조건을 모두 만족시키는 경우는 오직 하나 뿐이다.



인수정리에 의하여 함수 $f'(x)$의 방정식은

$f(x)=k(x-1)^2(x-2)$(단, $k>0$)

$\therefore\ \dfrac{f'(5)}{f'(3)}=\dfrac{48k}{4k}=12$

답 12

137 | 답 ③

[풀이]

▸ ㄱ. (참)

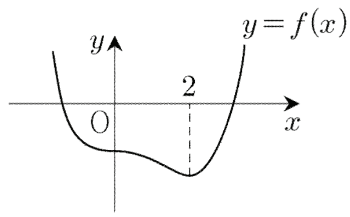
$a=0$일 때, 함수 $f'(x)$의 방정식은

$f'(x)=x^2(x-2)$(←조건(가))

$x=2$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 갖는다.

조건 (나)에 의하여 $f(0)<0$이어야 한다. 왜냐하면 조건 (나)에서 주어진 방정식이 실근을 갖지 않아야하기 때문이다.

함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



함수 $f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

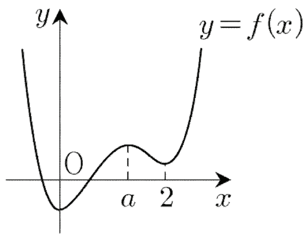
▸ ㄴ. (거짓)

〈반례〉

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 정리하면 다음과 같다.

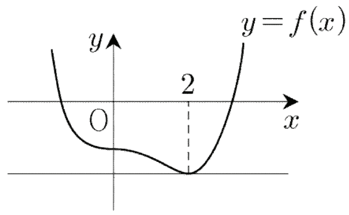
x	$\cdots$	0	$\cdots$	a	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

만약 함수 $f(x)$의 그래프가 아래와 같다면 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다. 따라서 보기 ㄴ에서 주어진 명제는 거짓이다.



▸ ㄷ. (참)

- (1) $a=0$인 경우



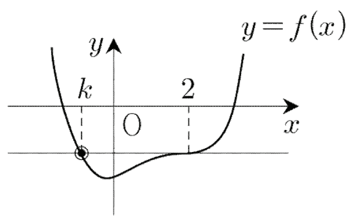
함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최솟값(극솟값)을 가지므로 함수 $|f(x)-f(2)|$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

- (2) $a=2$인 경우

$f'(x)=x(x-2)^2$

$x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음$(-)$에서 양$(+)$으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖는다.

함수 $f(x)$의 그래프는

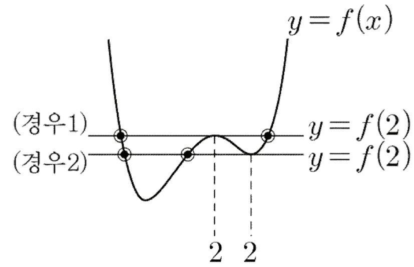


(단, ◉는 함수 $|f(x)-f(2)|$가 미분가능하지 않은 점)

위의 그림에서 함수 $|f(x)-f(2)|$는 $x=k$에서만 미분가능하지 않음을 확인할 수 있다. 이때, $k<0$이다.

- (3) $a\neq 0$, $a\neq 2$인 경우

다음과 같이 여섯 개의 경우로 구분하여 생각하자.



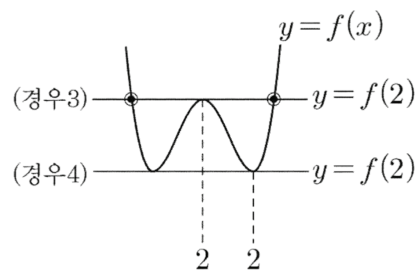
(단, ◉는 함수 $|f(x)-f(2)|$가 미분가능하지 않은 점)

- (경우1) 극대점의 x좌표가 2인 경우

함수 $|f(x)-f(2)|$의 미분가능하지 않은 점의 개수는 2이다.

- (경우2) 오른쪽 극소점의 x좌표가 2인 경우

함수 $|f(x)-f(2)|$의 미분가능하지 않은 점의 개수는 2이다.



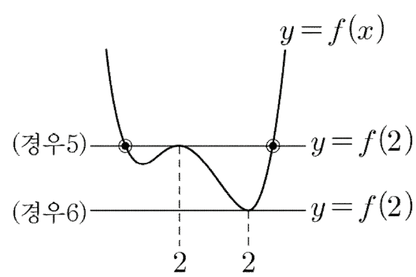
(단, ◉는 함수 $|f(x)-f(2)|$가 미분가능하지 않은 점)

- (경우3) 극대점의 x좌표가 2인 경우

함수 $|f(x)-f(2)|$의 미분가능하지 않은 점의 개수는 2이다.

- (경우4) 오른쪽 극소점의 x좌표가 2인 경우

함수 $|f(x)-f(2)|$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.



(단, ◉는 함수 $|f(x)-f(2)|$가 미분가능하지 않은 점)

- (경우5) 극대점의 x좌표가 2인 경우

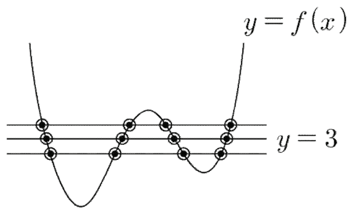
함수 $|f(x)-f(2)|$의 미분가능하지 않은 점의 개수는 2이다.

• (경우6) 오른쪽 극소점의 x좌표가 2인 경우
함수 $|f(x)-f(2)|$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
따라서 보기 ㄷ에서 주어진 명제는 참이다.
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.
답 ③

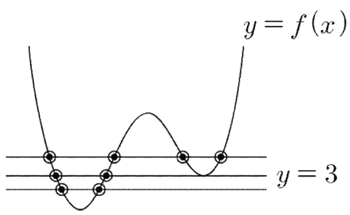
138

| 답 147

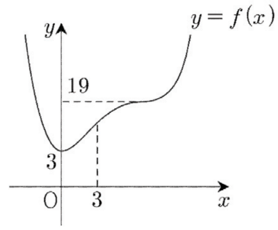
[풀이1] 시험장
• (1) 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=3$이 만나는 모든 점에서 접선의 기울기가 0이 아닌 경우

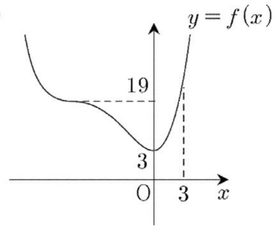


(단, ◉는 함수 $|f(x)-3|$이 미분가능하지 않은 점)
위의 그림에서
$t \to 3+$일 때, $g(t) \to 4$
$t=3$일 때, $g(t)=4$
$t \to 3-$일 때, $g(t) \to 4$
함수 $g(t)$는 $t=3$에서 불연속이 아니다.
• (2) 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=3$이 만나는 점들 중에서 접선의 기울기가 0인 점이 존재하는 경우

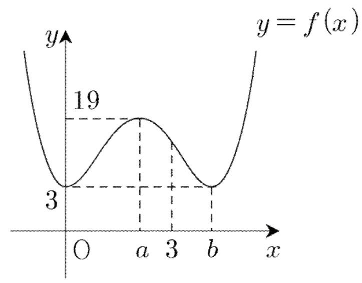


(단, ◉는 함수 $|f(x)-3|$이 미분가능하지 않은 점)
위의 그림에서
$t \to 3+$일 때, $g(t) \to 4$
$t=3$일 때, $g(t)=2$
$t \to 3-$일 때, $g(t) \to 2$
함수 $g(t)$는 $t=3$에서 불연속이다.
(1), (2)에서
$f(\alpha)=3$, $f'(\alpha)=0$ (이때, $\alpha=0$)
인 상수 α가 존재함을 알 수 있다.
마찬가지의 방법으로
$f(\beta)=19$, $f'(\beta)=0$
인 상수 β가 존재해야 한다.



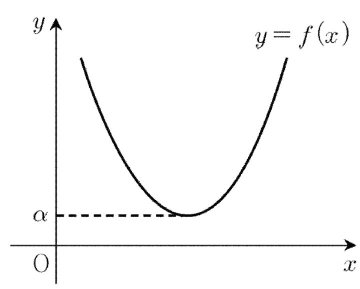


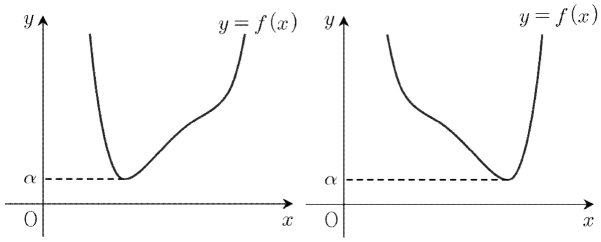
함수 $f(x)$의 그래프와 위와 같으면 $f'(3)>0$이므로 문제에서 주어진 조건 $f'(3)<0$을 만족시키지 않는다.
따라서 함수 $f(x)$의 그래프는 아래 그림과 같다.



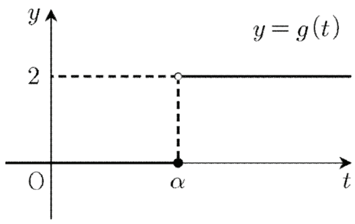
곡선 $y=f(x)$는 $x=a\left(=\dfrac{b}{2}\right)$에 대하여 대칭이므로
함수 $f(x)$의 방정식은
$f(x)=x^2(x-2a)^2+3$ ($\because b=2a$)
$f(a)=a^4+3=19$, $a=2$
$f(x)=x^2(x-4)^2+3$
$\therefore\ f(-2)=147$
답 147

[풀이2] ★
• 방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 1인 경우
함수 $f(x)$의 그래프의 개형은





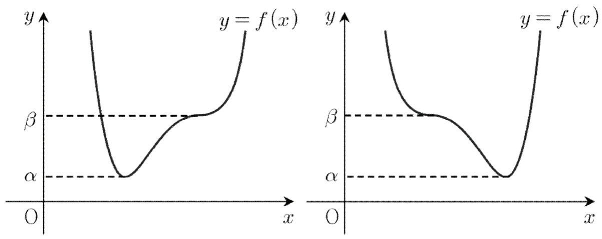
함수 $g(t)$의 그래프는



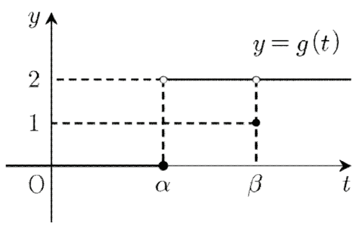
함수 $g(t)$의 불연속점의 개수는 1이다.

• 방정식 $f'(x) = 0$의 서로 다른 실근의 개수가 2인 경우

함수 $f(x)$의 그래프의 개형은



함수 $g(t)$의 그래프는

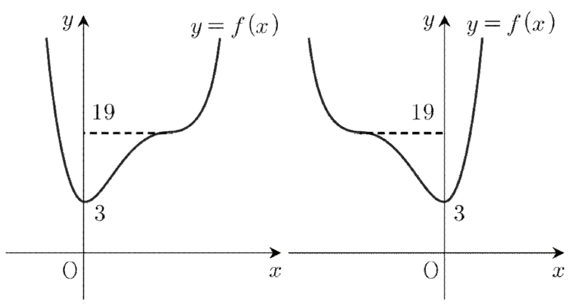


함수 $g(t)$의 불연속점의 개수는 2이다.

주어진 조건에 의하여

$\alpha = 3,\ \beta = 19$

$f(0) = 3$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는

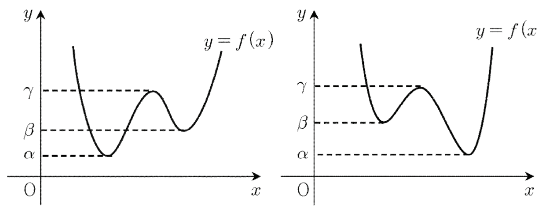


위의 그림에서 $f'(3) \geq 0$

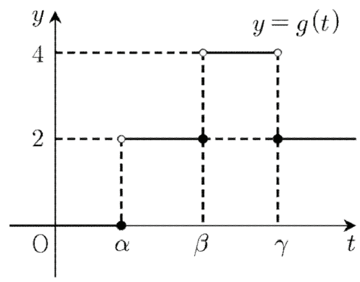
이는 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

• 방정식 $f'(x) = 0$의 서로 다른 실근의 개수가 3인 경우

함수 $f(x)$의 그래프의 개형은

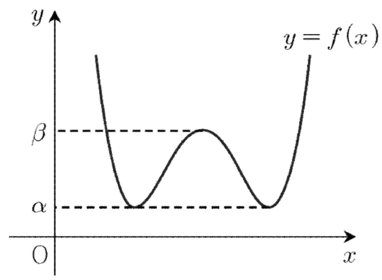


함수 $g(t)$의 그래프는

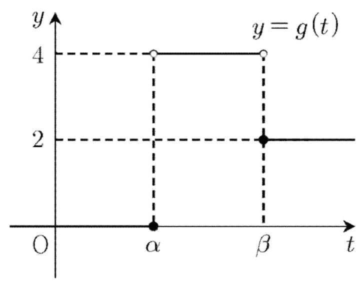


함수 $g(t)$의 불연속점의 개수는 3이다.

함수 $f(x)$의 그래프의 개형은

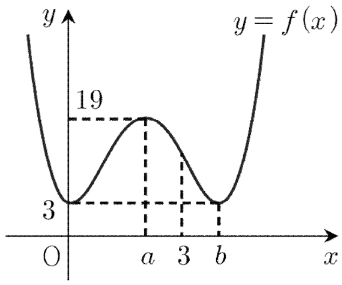


함수 $g(t)$의 그래프는



함수 $g(t)$의 불연속점의 개수는 2이다.

$f(0) = 3$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는



(단, $a<3<b$)

함수 $f(x)$의 도함수를

$f'(x)=4x(x-a)(x-b)$

함수 $f(x)-3$의 방정식을

$f(x)-3=x^2(x-b)^2$ 즉, $f(x)=x^2(x-b)^2+3$

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=2x(x-b)^2+2x^2(x-b)$

이므로

$f'(a)=2a(a-b)^2+2a^2(a-b)=0$ 즉, $b=2a$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=x^2(x-2a)^2+3$

$f(a)=a^4+3=19$ 즉, $a=2$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=x^4-8x^3+16x^2+3$

$\therefore\ f(-2)=147$

답 147

[참고] (부정적분)

부정적분을 이용하여 함수 $f(x)$의 방정식을 유도할 수 도 있다.

함수 $f(x)$의 도함수를

$f'(x)=4x(x-a)(x-b)$

함수 $f(x)$의 방정식은

$$f(x)=x^4-\frac{4}{3}(a+b)x^3+2abx^2+3$$

$f(b)=3$에서 $b=2a$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=x^4-4ax^3+4a^2x^2+3$

$f(a)=19$에서 $a=2(a>0)$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=x^4-8x^3+16x^2+3$

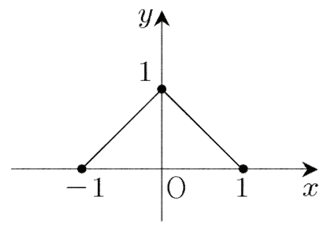
$\therefore\ f(-2)=147$

답 147

139 | 답 ⑤

[풀이]

조건 (가)에서 주어진 세 점을 좌표평면 위에 나타내자.



ㄱ. (참)

조건 (나)에서

$f'(0)=$(두 점 $(0,\ 1)$, $(-1,\ 0)$의 평균변화율)

$$=\frac{1-0}{0-(-1)}=1$$

ㄴ. (참)

함수 $f(x)$가

닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 연속이고

열린구간 $(0,\ 1)$에서 미분가능하므로

평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=-1=f'(c)$$

인 c가 열린구간 $(0,\ 1)$에서 적어도 하나 이상 존재한다.

ㄷ. (참)

보기 ㄴ과 마찬가지의 방법으로

$f'(d)=1$인 d가 열린구간 $(-1,\ 0)$에서 존재한다.

요컨대

$-1<d<0<c<1$

인 두 상수 c, d에 대하여

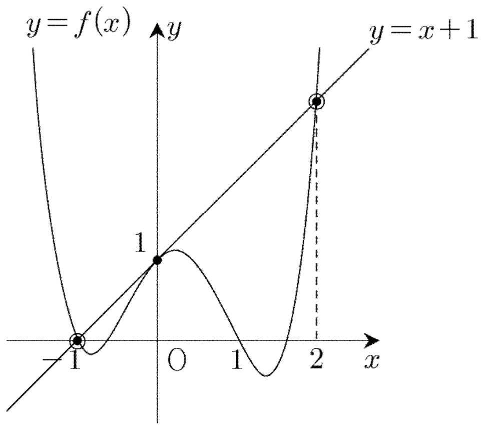
$f'(c)=-1<0$, $f'(d)=1>0$

이므로 다음이 성립한다.

구간 $(-1,\ 0)$에 속하는 어떤 열린구간에서 함수 $f(x)$는 증가하고,

구간 $(0,\ 1)$에 속하는 어떤 열린구간에서 함수 $f(x)$는 감소한다.

그런데 $x\to\pm\infty$일 때, 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$는 양의 무한대로 발산하므로 곡선 $y=f(x)$는 아래 그림(↘↗↘↗)처럼 그려질 수밖에 없다.



(단, ◉는 함수 $|f(x)-x-1|$가 미분가능하지 않은 점)

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ 1)$에서의 접선이 $y=x+1$이므로 곡선 $y=|f(x)-x-1|$은 $x=0$에서 미분가능하다. 그런데 곡선 $y=f(x)$가 두 점 $(-1,\ 0)$, $(1,\ 0)$을 지나므로 구간 $(-1,\ 1)$에서 곡선 $y=f(x)$는 직선 $y=x+1$의 아래쪽에 놓일 수밖에 없다.

위의 그림에서 함수 $|f(x)-x-1|$가 미분가능하지 않은 점의 개수는 2이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

[참고]

다음과 같이 함수 $f(x)$의 방정식을 유도하여 보기 ㄷ의 참, 거짓을 판단할 수 있다.

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$

으로 두자.

조건(가)에서

$f(0)=d=1$

$f(1)=a+b+c+2=0$

$f(-1)=-a+b-c+2=0$

연립방정식을 풀면

$b=-2,\ c=-a$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=x^4+ax^3-2x^2-ax+1$

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=4x^3+3ax^2-4x-a$

조건 (나)에 의하여

$f'(0)=-a=\dfrac{f(0)-f(-1)}{0-(-1)}=1$이므로 $a=-1$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=x^4-x^3-2x^2+x+1$

ㄷ. (참)

방정식 $f(x)=x+1$을 정리하면

$x^4-x^3-2x^2=0$

좌변을 인수분해하면

$x^2(x-2)(x+1)=0$

$|f(x)-x-1|=|x^2(x-2)(x+1)|$

이므로 함수 $|f(x)-x-1|$는 $x=-1$, $x=2$에서 미분가능하지 않다.

140 | 답 23

[풀이] ★

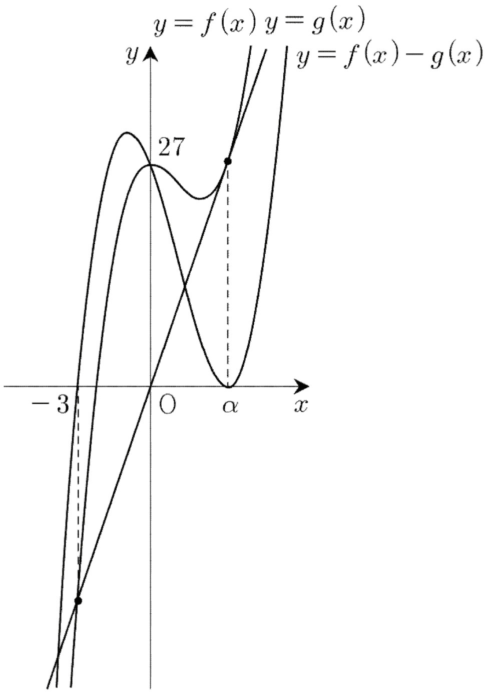
삼차함수의 그래프가 직선과 서로 다른 두 점에서 만날 때, 삼차함수의 그래프와 직선은 서로 접한다. 이때, 두 교점 중에서 하나는 접점이고, 나머지 하나는 접점이 아니다.

조건 (다)에 의하여 삼차함수 $f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$가 서로 다른 두 점에서 만나므로, 삼차함수 $f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$는 서로 접한다. 이때, 접점의 x좌표를 α, 접점이 아닌 교점의 x좌표를 β라고 하자.

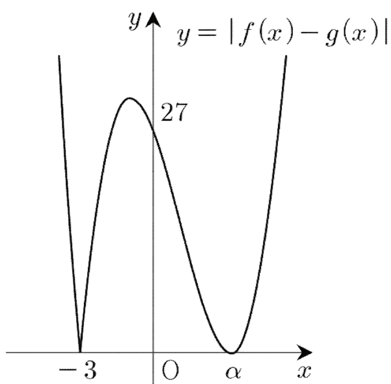
$\beta\neq-3$이라고 가정하자.

함수 $|f(x)-g(x)|$는 $x=\beta$에서 미분가능하지 않으므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다. 이는 가정에 모순이다. 따라서 $\beta=-3$이다.

세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $f(x)-g(x)$의 그래프는



함수 $|f(x)-g(x)|$의 그래프는



위의 그림처럼 함수 $|f(x)-g(x)|$는 $x=-3$에서 미분불가능이다.

일차함수 $g(x)$의 방정식을

$g(x)=kx$

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)-g(x)$의 방정식은

$f(x)-g(x)=(x+3)(x-\alpha)^2$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=(x+3)(x-\alpha)^2+kx$

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=(x-\alpha)^2+2(x+3)(x-\alpha)+k$

조건 (가)에 의하여

$f(0)=3\alpha^2=27$ 즉, $\alpha=3(\because \alpha\neq-3)$

$f'(0)=\alpha^2-6\alpha+k=0$에서 $k=9$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=x^3-3x^2+27$

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

방정식 $f'(x)=0$을 풀면

$x=0$ 또는 $x=2$

$x=2$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음$(-)$에서 양$(+)$으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 갖는다.

따라서 구하는 값은 $f(2)=23$이다.

답 23

141 | 답 풀이참고

[증명]

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하므로 미분계수의 정의에 의하여

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a),$$

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=g'(a)$$

가 존재한다.

(1) 미분계수의 정의에 의하여

$$\lim_{x\to a}\frac{cf(x)-cf(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot c$$

$$=cf'(a)$$

따라서 함수 $cf(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다.

(2) 미분계수의 정의에 의하여

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)\pm g(x)-\{f(a)\pm g(a)\}}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\pm\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$

$$=f'(a)\pm g'(a)$$

따라서 함수 $f(x)\pm g(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다.

(3) 미분계수의 정의에 의하여

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\{f(x)-f(a)\}g(x)+\{g(x)-g(a)\}f(a)}{x-a}$$

$= \lim_{x \to a} \frac{\{f(x)-f(a)\}}{x-a} \cdot g(x)$

$+ \lim_{x \to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \cdot f(a)$

$= f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$

따라서 함수 $f(x)g(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다.

142 | 답 풀이참고

[풀이]

(1) (참)

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하므로

미분계수의 정의에 의하여

$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

가 존재한다.

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\lim_{x \to a} \frac{\{f(x)\}^2-\{f(a)\}^2}{x-a}$

$= \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \times \{f(x)+f(a)\}$

$= f'(a) \times 2f(a) = 2f(a)f'(a)$

미분계수의 정의에 의하여

함수 $\{f(x)\}^2$는 $x=a$에서 미분가능하다.

(2) (거짓)

(반례)

함수 $f(x)$의 방정식을

$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \ge 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases}$

으로 두면, 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이므로 미분가능하지 않다.

함수 $\{f(x)\}^2$의 방정식은

$\{f(x)\}^2 = 1$

상수함수는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로, 함수 $\{f(x)\}^2$는 $x=0$에서 미분가능하다.

따라서 주어진 명제는 거짓이다.

(3) (1)의 대우명제이므로 참이다.

답 (1) 참 (2) 거짓 (3) 참

143 | 답 ④

[풀이]

ㄱ. (참)

($\Rightarrow$)

함수 $f(x)$는 두 열린구간 $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$에서 미분가능하므로 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하면 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x) = \begin{cases} a & (x > 0) \\ b & (x < 0) \end{cases}$

$a=b$이면 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

물론 다음과 같이 미분계수의 정의를 이용하여 $a=b$임을 유도해도 좋다.

$\lim_{x \to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \to 0+} \frac{ax}{x} = a$

$\lim_{x \to 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \to 0-} \frac{bx}{x} = b$

미분계수의 정의에 의하여

$a=b$이면 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

($\Leftarrow$)

$a=b$이면 $f(x)=ax+1$이므로 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

ㄴ. (거짓)

(반례) 예를 들어 $a=-1$, $b=1$이면

함수 $f(x) = \begin{cases} -x+1 & (x \ge 0) \\ x+1 & (x < 0) \end{cases}$은 $x=0$에서 극댓값 1을 갖는다.

ㄷ. (참)

$g(x)=xf(x)$로 두면

$g(x) = \begin{cases} ax^2+x & (x \ge 0) \\ bx^2+x & (x < 0) \end{cases}$

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하면 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

함수 $g(x)$의 도함수는

$g'(x) = \begin{cases} 2ax+1 & (x > 0) \\ 2bx+1 & (x < 0) \end{cases}$

$\lim_{x \to 0+} g'(x) = \lim_{x \to 0+} (2ax+1) = 1$

$\lim_{x \to 0-} g'(x) = \lim_{x \to 0-} (2bx+1) = 1$

$\lim_{x \to 0+} g'(x) = \lim_{x \to 0-} g'(x)$

함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하므로 함수 $g(x)$는

실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
물론 다음과 같이 미분계수의 정의를 이용하여 주어진 명제가 참임을 증명해도 좋다.

$$\lim_{x\to 0+}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{ax^2+x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0-}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{bx^2+x}{x}=1$$

함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하므로 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.
답 ④

[참고]
ㄷ. (참)
$\{xf(x)\}'=f(x)+xf'(x)$
$x=0$에서 $f(x)$는 연속이지만 $f'(x)$는 불연속이다.
그런데 $xf'(x)$는 $x=0$에서 연속이므로 $\{xf(x)\}'$는 $x=0$에서 연속이다.
따라서 함수 $xf(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

144

| 답 2

[풀이1]
모든 자연수 n에 대하여 함수

$$x^nh(x)=\begin{cases}x^nf(x) & (x\ge 0)\\ x^ng(x) & (x<0)\end{cases}$$

는 두 열린구간 $(-\infty,\ 0)$, $(0,\ \infty)$에서 연속이다.
또

$$\lim_{x\to 0+}x^nh(x)=\lim_{x\to 0+}x^nf(x)=0$$

$$\lim_{x\to 0-}x^nh(x)=\lim_{x\to 0-}x^ng(x)=0$$

$$0^nh(0)=0\cdot f(0)=0$$

에서 $\lim_{x\to 0}x^nh(x)=0^nh(0)$이므로 함수의 연속에 대한 정의에 의하여 함수 $x^nh(x)$는 $x=0$에서 연속이다.
따라서 함수 $x^nh(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
모든 자연수 n에 대하여 함수

$$x^nh(x)=\begin{cases}x^nf(x) & (x\ge 0)\\ x^ng(x) & (x<0)\end{cases}$$

는 두 열린구간 $(-\infty,\ 0)$, $(0,\ \infty)$에서 미분가능하다.
이제 함수 $x^nh(x)$가 $x=0$에서 미분가능하게 되는 자연수 n의 최솟값을 구하자.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^nh(x)-0^nh(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^nh(x)}{x}=\lim_{x\to 0}x^{n-1}h(x)\qquad\cdots(*)$$

만약 $n=1$이면 (*)$=\lim_{x\to 0}h(x)$는 발산한다. 왜냐하면 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 불연속이기 때문이다. (좀 더 자세하게 설명하면 다음과 같다.
함수 $h(x)$가 $x=0$에서 불연속이므로
$f(0)\ne\lim_{x\to 0-}g(x)$ 즉, $f(0)\ne g(0)$

그런데 (*)$=\lim_{x\to 0}h(x)=\begin{cases}\lim_{x\to 0+}f(x)=f(0)\\ \lim_{x\to 0-}g(x)=g(0)\end{cases}$

이므로 (*)는 발산한다.)
만약 $n\ge 2$이면 (*)은 0에 수렴한다.

즉, $\lim_{x\to 0}\frac{x^nh(x)-0^nh(0)}{x-0}=0$

미분계수의 정의에 의하여 n이 2 이상의 자연수이면 함수 $x^nh(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.
따라서 자연수 n의 최솟값은 2이다.
답 2

[풀이2]
모든 자연수 n에 대하여 함수

$$x^nh(x)=\begin{cases}x^nf(x) & (x\ge 0)\\ x^ng(x) & (x<0)\end{cases}$$

는 두 열린구간 $(-\infty,\ 0)$, $(0,\ \infty)$에서 연속이다.
또

$$\lim_{x\to 0+}x^nh(x)=\lim_{x\to 0+}x^nf(x)=0$$

$$\lim_{x\to 0-}x^nh(x)=\lim_{x\to 0-}x^ng(x)=0$$

$$0^nh(0)=0\cdot f(0)=0$$

에서 $\lim_{x\to 0}x^nh(x)=0^nh(0)$이므로 함수의 연속에 대한 정의에 의하여 함수 $x^nh(x)$는 $x=0$에서 연속이다.
따라서 함수 $x^nh(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

모든 자연수 n에 대하여 함수

$$x^n h(x)=\begin{cases} x^n f(x) & (x \geq 0) \\ x^n g(x) & (x<0) \end{cases}$$

는 두 열린구간 $(-\infty,\ 0)$, $(0,\ \infty)$에서 미분가능하다.

이제 함수 $x^n h(x)$가 $x=0$에서 미분가능하게 되는 자연수 n의 최솟값을 구하자.

함수 $h(x)$가 $x=0$에서 불연속이므로

$f(0) \neq \lim_{x \to 0-} g(x)$ 즉, $f(0) \neq g(0)$

$n=1$일 때, 함수 $x^n h(x)$의 도함수는

$(xh(x))'=h(x)+xh'(x)$

$$\lim_{x \to 0+}(xh(x))'=\lim_{x \to 0+}\{f(x)+xf'(x)\}=f(0)$$

$$\lim_{x \to 0-}(xh(x))'=\lim_{x \to 0-}\{g(x)+xg'(x)\}=g(0)$$

$$\lim_{x \to 0+}(xh(x))' \neq \lim_{x \to 0-}(xh(x))'$$

따라서 $n=1$일 때, 함수 $x^n h(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

$n \geq 2$일 때, 함수 $x^n h(x)$의 도함수는

$(x^n h(x))'=nx^{n-1}h(x)+x^n h'(x)$

$$\lim_{x \to 0+}(x^n h(x))'=\lim_{x \to 0+}\{nx^{n-1}f(x)+x^n f'(x)\}$$
$$=0$$

$$\lim_{x \to 0-}(x^n h(x))'=\lim_{x \to 0-}\{nx^{n-1}f(x)+x^n f'(x)\}$$
$$=0$$

$$\lim_{x \to 0+}(x^n h(x))'=\lim_{x \to 0-}(x^n h(x))'$$

따라서 $n \geq 2$일 때, 함수 $x^n h(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

따라서 자연수 n의 최솟값은 2이다.

답 2

[참고]

[풀이2]를 요약해보자.

함수 $x^n h(x)$의 도함수는

$\{x^n h(x)\}'=nx^{n-1}h(x)+x^n h'(x)$

$n=1$일 때, $h(x)$는 $x=0$에서 불연속이고, $xh'(x)$는 $x=0$에서 연속이므로 $\{xh(x)\}'$는 $x=0$에서 불연속이다. 따라서 함수 $xh(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

$n \geq 2$일 때, $nx^{n-1}h(x)$, $x^n h'(x)$는 모두 $x=0$에서 연속이므로 $\{x^n h(x)\}'$는 $x=0$에서 연속이다. 따라서 함수 $x^n h(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

145 | 답 풀이참고

[풀이]

(1) (거짓)

(반례)

함수 $f(x)$의 방정식을

$f(x)=x^2-x$

로 두자. 다항함수는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

함수 $|f(x)|$의 방정식은

$|f(x)|=|x^2-x|$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x \to 0+}\frac{|f(x)|-|f(0)|}{x-0}=\lim_{x \to 0+}\frac{x-x^2}{x}$$
$$=\lim_{x \to 0+}(1-x)=1,$$

$$\lim_{x \to 0-}\frac{|f(x)|-|f(0)|}{x-0}=\lim_{x \to 0-}\frac{x^2-x}{x}$$
$$=\lim_{x \to 0-}(x-1)=-1$$

$$\lim_{x \to 0+}\frac{|f(x)|-|f(0)|}{x-0}$$
$$\neq \lim_{x \to 0-}\frac{|f(x)|-|f(0)|}{x-0}$$

이므로, 미분계수의 정의에 의하여

함수 $|f(x)|$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

(2) (거짓)

함수 $f(x)$의 방정식을

$$f(x)=\begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ -1 & (x<0) \end{cases}$$

으로 두자.

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이므로, 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

함수 $|f(x)|$의 방정식은

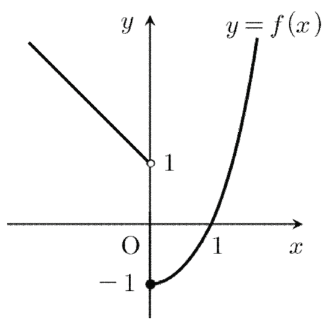
$|f(x)|=1$

상수함수는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로, 함수 $|f(x)|$는 $x=0$에서 미분가능하다.

따라서 주어진 명제는 거짓이다.
답 (1) 거짓 (2) 거짓

146 | 답 ③

▶ 실전풀이: [참고]
✪ ㄱ: 기하적으로(즉, 눈으로) 꺾인 점과 부드럽게 연결된 점을 구별하기 힘들므로 ❶ 또는 ❷로 접근해야 한다. 그런데 각 구간에서 주어진 함수는 다항함수이므로 ❷로 접근하면 계산 분량을 줄일 수 있다.
ㄴ: 기하적으로(즉, 눈으로) 꺾인 점과 부드럽게 연결된 점을 구별할 수 있다. 따라서 ❸으로 접근하면 된다.
ㄷ: ❷(❶), ❸이 모두 가능하다. $k=1$, $k=2$일 때 기하적으로(즉, 눈으로) 꺾인 점과 부드럽게 연결된 점을 구별할 수 있으므로 ❸으로 접근해도 좋고, 각 구간에서 주어진 함수가 다항함수이므로 ❷로 접근해도 좋다. (해설집에서는 ❷에 의한 풀이만을 적어두었다. ❸보다는 ❷가 보편적이기 때문이다.)
[풀이] ★
함수 $f(x)$의 그래프는



▶ ㄱ. (참)
위의 그림에서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.
함수의 극한에 대한 성질에 의하여

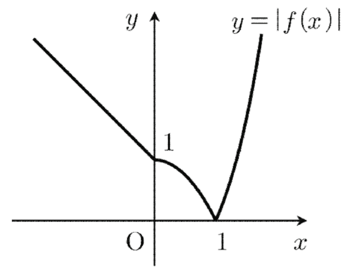
$$\lim_{x \to 1+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1+} \frac{\frac{2}{3}(x^3-1)}{x-1}$$
$$= \lim_{x \to 1+} \frac{2}{3}(x^2+x+1) = 2$$
$$\lim_{x \to 1-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1-} \frac{x^2-1}{x-1}$$
$$= \lim_{x \to 1-} (x+1) = 2$$

$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 2$이므로

미분계수의 정의에서
$f'(1)=2$
따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.
▶ ㄴ. (거짓)
함수 $|f(x)|$의 방정식은

$$|f(x)| = \begin{cases} 1-x & (x<0) \\ 1-x^2 & (0 \le x < 1) \\ \frac{2}{3}(x^3-1) & (x \ge 1) \end{cases}$$

함수 $|f(x)|$의 그래프는



위의 그림에서 함수 $|f(x)|$는 $x=0$에서 연속이지만,
$x=0$에서 미분가능하지 않다.
이를 수식을 이용하여 증명하자.
함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x \to 0+} \frac{|f(x)|-|f(0)|}{x-0} = \lim_{x \to 0+} \frac{1-x^2-1}{x}$$
$$= \lim_{x \to 0+} (-x) = 0$$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x \to 0-} \frac{|f(x)|-|f(0)|}{x-0} = \lim_{x \to 0-} \frac{1-x-1}{x}$$
$$= \lim_{x \to 0-} (-1) = -1$$
$$\lim_{x \to 0+} \frac{|f(x)|-|f(0)|}{x-0} \ne \lim_{x \to 0-} \frac{|f(x)|-|f(0)|}{x-0}$$

이므로, 미분계수의 정의에 의하여
함수 $|f(x)|$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.
▶ ㄷ. (참)
$k=1$일 때, 함수 $x^k f(x)$의 방정식은

$$xf(x) = \begin{cases} x-x^2 & (x<0) \\ x^3-x & (0 \le x < 1) \\ \frac{2}{3}(x^4-x) & (x \ge 1) \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to0} xf(x)=0=0f(0)$이므로

함수 $xf(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to0+}\frac{xf(x)-0f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{x(x^2-1)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0+}(x^2-1)=-1$$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to0-}\frac{xf(x)-0f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0-}\frac{x(1-x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0-}(1-x)=1$$

$$\lim_{x\to0+}\frac{xf(x)-0f(0)}{x-0}\neq\lim_{x\to0-}\frac{xf(x)-0f(0)}{x-0}$$

이므로, 미분계수의 정의에 의하여

함수 $xf(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

$k=2$일 때, 함수 $x^kf(x)$의 방정식은

$$x^2f(x)=\begin{cases}x^2-x^3 & (x<0)\\ x^4-x^2 & (0\le x<1)\\ \frac{2}{3}(x^5-x^2) & (x\ge1)\end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to0} x^2f(x)=0=0^2f(0)$이므로

함수 $x^2f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to0+}\frac{x^2f(x)-0f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{x(x^3-x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0+}(x^3-x)=0$$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to0-}\frac{x^2f(x)-0f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0-}\frac{x(x-x^2)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0-}(x-x^2)=0$$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2f(x)-0f(0)}{x-0}=0$이므로

미분계수의 정의에서

함수 $x^2f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

따라서 k의 최솟값은 2이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

[참고1] ★

아래와 같이 참, 거짓을 판단해도 좋다.

구간 $(-\infty,\ 0)$, $(0,\ 1)$, $(1,\ \infty)$에서

함수 $f(x)$의 도함수는

$$f'(x)=\begin{cases}-1 & (x<0)\\ 2x & (0<x<1)\\ 2x^2 & (x>1)\end{cases}$$

▸ ㄱ. (참)

함수 $y=x^2-1$의 $x=1$에서의 미분계수는 2,

함수 $y=\frac{2}{3}(x^3-1)$의 $x=1$에서의 미분계수는 2이므로

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

▸ ㄴ. (거짓)

함수 $y=1-x$의 $x=0$에서의 미분계수는 -1,

함수 $y=1-x^2$의 $x=0$에서의 미분계수는 0이므로

함수 $|f(x)|$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

▸ ㄷ. (참)

(1) $k=1$인 경우

구간 $(-\infty,\ 0)$, $(0,\ 1)$, $(1,\ \infty)$에서

함수 $xf(x)$의 도함수는

$(xf(x))'$

$$=\begin{cases}1-2x & (x<0)\\ 3x^2-1 & (0<x<1)\\ \frac{8}{3}x^3-\frac{2}{3} & (x>1)\end{cases}$$

함수 $y=x-x^2$의 $x=0$에서의 미분계수는 1,

함수 $y=x^3-x$의 $x=0$에서의 미분계수는 -1이므로

함수 $xf(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

(2) $k=2$인 경우

구간 $(-\infty,\ 0)$, $(0,\ 1)$, $(1,\ \infty)$에서

함수 $x^2f(x)$의 도함수는

$(x^2f(x))'$

$$=\begin{cases}2x-3x^2 & (x<0)\\ 4x^3-2x & (0<x<1)\\ \frac{10}{3}x^4-\frac{4}{3}x & (x>1)\end{cases}$$

함수 $y=x^2-x^3$의 $x=0$에서의 미분계수는 0,

함수 $y=x^4-x^2$의 $x=0$에서의 미분계수는 0이므로

함수 $x^2f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

[참고2]

$\{x^k f(x)\}' = kx^{k-1}f(x) + x^k f'(x)$

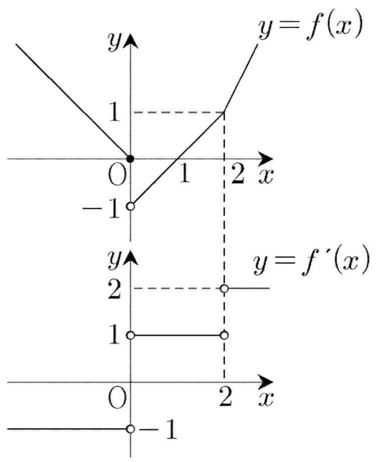
$k=1$일 때, $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이고, $xf'(x)$는 $x=0$에서 연속이므로 $\{x^k f(x)\}'$는 $x=0$에서 불연속이다. 따라서 함수 $x^k f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

$k \geq 2$일 때, $kx^{k-1}f(x)$, $x^k f'(x)$ 모두 $x=0$에서 연속이므로 $\{x^k f(x)\}'$는 $x=0$에서 연속이다. 따라서 함수 $x^k f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

147 | 답 ②

[풀이1] 시험장

두 함수 $f(x)$, $f'(x)$의 그래프는



▸ ㄱ. (참)

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 좌극한값, 우극한값, 함숫값을 갖지만 불연속이다.

따라서 함수 $p(x)f(x)$가 $x=0$에서 연속이기 위해서는 $p(0)=0$이어야 한다.

▸ ㄴ. (참)

함수 $p(x)f(x)$의 도함수는

$\{p(x)f(x)\}' = p'(x)f(x) + p(x)f'(x)$

$x \to 2+$일 때,

$\{p(x)f(x)\}' \to p'(2) \times 1 + p(2) \times 2$

$x \to 2-$일 때,

$\{p(x)f(x)\}' \to p'(2) \times 1 + p(2) \times 1$

함수 $p(x)f(x)$는 $x=2$에서 미분가능하므로

$p'(2) + 2p(2) = p'(2) + p(2)$, 즉 $p(2)=0$

▸ ㄷ. (거짓)

함수 $\{f(x)\}^2$의 $x=0$에서의 좌극한값, 우극한값, 함숫값은 각각 0, 1, 0이다.

따라서 함수 $p(x)\{f(x)\}^2$가 $x=0$에서 연속이기 위해서는 $p(0)=0$이어야 한다.

함수 $p(x)\{f(x)\}^2$의 도함수는

$[p(x)\{f(x)\}^2]' =$

$p'(x)\{f(x)\}^2 + 2p(x)f(x)f'(x)$

(이때, $\{f(x)\}^2 = f(x)f(x)$로 두고 미분한 것이다.)

ㄴ과 마찬가지의 방법으로

$x=0$에서의

좌미분계수: 0

우미분계수: $p'(0) - 2p(0) = p'(0)$

$x=2$에서의

좌미분계수: $p'(2) + 2p(2)$

우미분계수: $p'(2) + 4p(2)$

함수 $p(x)\{f(x)\}^2$가 $x=0$과 $x=2$에서 미분가능할 조건은

$p'(0)=0$, $p'(2)+2p(2) = p'(2)+4p(2)$

즉, $p'(0)=0$, $p(2)=2$

인수정리에 의하여

$p(x)$는 $x^2(x-2)$를 인수로 갖지만, $x^2(x-2)^2$을 반드시 인수로 갖는 것은 아니다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

[참고]

ㄴ. (참)

$\{p(x)f(x)\}' = p'(x)f(x) + p(x)f'(x)$

$x=2$에서 $f'(x)$는 불연속, $p'(x)$, $f(x)$, $p(x)$는 모두 연속이므로 $x=2$에서 $\{p(x)f(x)\}'$가 연속일 필요충분조건은 $p(2)=0$이다. 즉, $p(2)=0$이면 함수 $p(x)f(x)$는 $x=2$에서 미분가능하다.

ㄷ. (거짓)

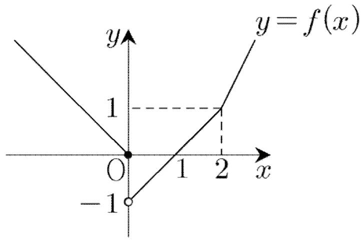
$\{p(x)(f(x))^2\}' =$

$p'(x)(f(x))^2 + 2p(x)f(x)f'(x)$

$x=0$에서 $(f(x))^2$, $2f(x)f'(x)$ 모두 불연속이지만 $p(0)=p'(0)=0$이면 $p(x)(f(x))^2$은 $x=0$에서 연속이다. 즉, $p(0)=p'(0)=0$이면 함수 $p(x)(f(x))^2$은 $x=0$에서 미분가능하다.

$x=2$에서 $2f(x)f'(x)$는 불연속, $p'(x)$, $(f(x))^2$, $p(x)$는 모두 연속이므로 $x=2$에서 $\{p(x)(f(x))^2\}'$가 연속일 필요충분조건은 $p(2)=0$이다. 즉, $p(2)=0$이면 함수 $p(x)(f(x))^2$은 $x=2$에서 미분가능하다.

[풀이2]
함수 $f(x)$의 그래프는



▸ ㄱ. (참)
함수 $p(x)f(x)$가 $x=0$에서 연속이어야 하므로
$\lim_{x\to 0+} p(x)f(x)=-p(0)$,
$\lim_{x\to 0-} p(x)f(x)=0$,
$p(0)f(0)=0$
에서 $-p(0)=0$, 즉 $p(0)=0$
▸ ㄴ. (참)
함수 $p(x)f(x)$의 방정식은

$$p(x)f(x)=\begin{cases}-xp(x) & (x\le 0)\\ (x-1)p(x) & (0<x\le 2)\\ (2x-3)p(x) & (x>2)\end{cases}$$

$x=2$에서의 함수 $p(x)f(x)$의 좌미분계수는

$$\lim_{x\to 2-}\frac{(x-1)p(x)-p(2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2-}\left\{\frac{(x-2)p(x)}{x-2}+\frac{p(x)-p(2)}{x-2}\right\}$$
$$=p(2)+p'(2)$$

$x=2$에서의 함수 $p(x)f(x)$의 우미분계수는

$$\lim_{x\to 2+}\frac{(2x-3)p(x)-p(2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2+}\left\{\frac{2(x-2)p(x)}{x-2}+\frac{p(x)-p(2)}{x-2}\right\}$$
$$=2p(2)+p'(2)$$

함수 $p(x)f(x)$는 $x=2$에서 미분가능하므로
미분계수의 정의에 의하여
$p(2)+p'(2)=2p(2)+p'(2)$
$\therefore\ p(2)=0$

▸ ㄷ. (거짓)
함수 $p(x)\{f(x)\}^2$의 방정식은

$$p(x)\{f(x)\}^2=\begin{cases}x^2p(x) & (x\le 0)\\ (x-1)^2p(x) & (0<x\le 2)\\ (2x-3)^2p(x) & (x>2)\end{cases}$$

• (1) $x=0$에서의 미분가능성
$x=0$에서의 함수 $p(x)\{f(x)\}^2$의 좌미분계수는

$$\lim_{x\to 0-}\frac{x^2p(x)}{x}=0$$

$x=0$에서의 함수 $p(x)\{f(x)\}^2$의 우미분계수는

$$\lim_{x\to 0+}\frac{(x-1)^2p(x)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{(x-1)^2xq(x)}{x}$$

(이때, $p(x)=x\,q(x)$이다. 왜냐하면 $p(0)=0$이어야 위의 극한값이 존재하기 때문이다.)

$$=\lim_{x\to 0+}(x-1)^2q(x)=q(0)$$

함수 $p(x)\{f(x)\}^2$는 $x=0$에서 미분가능하므로
미분계수의 정의에 의하여
$q(0)=0$
따라서 $p(x)$는 x^2을 인수로 갖는다.
• (2) $x=2$에서의 미분가능성
$x=2$에서의 함수 $p(x)\{f(x)\}^2$의 좌미분계수는

$$\lim_{x\to 2-}\frac{(x-1)^2p(x)-p(2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2-}\left\{xp(x)+\frac{p(x)-p(2)}{x-2}\right\}$$
$$=2p(2)+p'(2)$$

$x=2$에서의 함수 $p(x)\{f(x)\}^2$의 우미분계수는

$$\lim_{x\to 2+}\frac{(2x-3)^2p(x)-p(2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2+}\left\{4(x-1)p(x)+\frac{p(x)-p(2)}{x-2}\right\}$$
$$=4p(2)+p'(2)$$

함수 $p(x)\{f(x)\}^2$는 $x=2$에서 미분가능하므로
미분계수의 정의에 의하여
$2p(2)+p'(2)=4p(2)+p'(2)$, 즉 $p(2)=0$
따라서 $p(x)$는 $x-2$를 인수로 갖는다. 이때, $p(x)$가 $(x-2)^2$을 반드시 인수로 갖는 것은 아니다.
(1), (2)에서 $p(x)$는 $x^2(x-2)$를 인수로 갖지만, $x^2(x-2)^2$을 반드시 인수로 갖는 것은 아니다.
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

148 | 답 64

[풀이] ★

우선 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속인 경우를 생각하자. 다시 말하면 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 연속인 경우를 생각하는 것이다.

$\lim_{x\to 0-} g(x)=\frac{3}{2}f(k)$,

$g(0)=f(0)$

함수의 연속의 정의에 의하여

$\lim_{x\to 0-} g(x)=g(0)$ 즉, $\frac{3}{2}f(k)=f(0)$

다시 쓰면

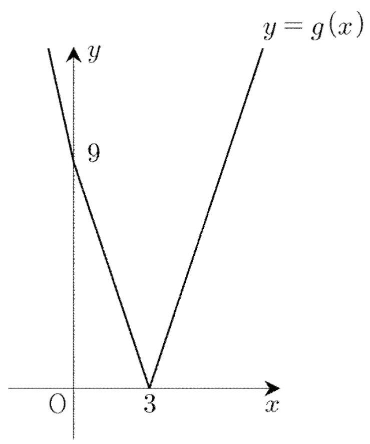
$\frac{3}{2}f(k)=9$에서 $f(k)=6$

풀면

$k=1$ 또는 $k=5$

• (1) $k=1$인 경우

함수 $g(x)$의 그래프는



조건 (가)에서 주어진 함수의 도함수는

$y'=g'(x)h(x)+g(x)h'(x)$ … (*)

다음의 표를 생각하자.

	$g'(x)$	$h(x)$	$g(x)$	$h'(x)$
$x\to 0+$	-3	$h(0)$	9	$h'(0)$
$x\to 0-$	$-\frac{9}{2}$	$h(0)$	9	$h'(0)$
$x\to 3+$	3	$h(3)$	0	$h'(3)$
$x\to 3-$	-3	$h(3)$	0	$h'(3)$

$x\to 0+$일 때, (*)$=-3h(0)+9h'(0)$

$x\to 0-$일 때, (*)$=-\frac{9}{2}h(0)+9h'(0)$

$x\to 3+$일 때, (*)$=3h(3)+0\times h'(3)$

$x\to 3-$일 때, (*)$=-3h(3)+0\times h'(3)$

함수의 연속의 정의에 의하여

$x=0$: $-3h(0)+9h'(0)=-\frac{9}{2}h(0)+9h'(0)$

정리하면 $h(0)=0$

$x=3$: $3h(3)+0\times h'(3)=-3h(3)+0\times h'(3)$

정리하면 $h(3)=0$

함수 $h(x)$의 방정식은

$h(x)=x(x-3)(x-\alpha)$

함수 $h(x)$의 도함수는

$h'(x)=(x-3)(x-\alpha)+x(x-\alpha)+x(x-3)$

조건 (나)에 의하여

$h'(3)=3(3-\alpha)=15$ 풀면 $\alpha=-2$

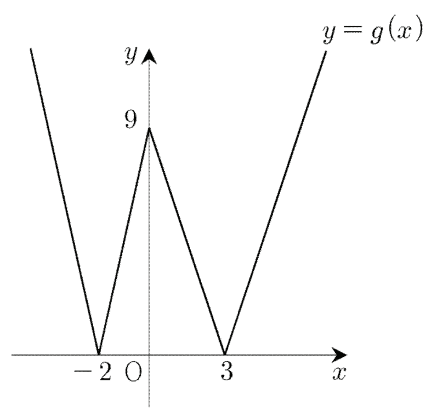
함수 $h(x)$의 방정식은

$h(x)=x(x-3)(x+2)$

$\therefore$ $h(k)=h(1)=-6$

• (2) $k=5$인 경우

함수 $g(x)$의 그래프는



다음의 표를 생각하자.