

① 4점 11번 문항 해설을 오른쪽과 같이 수정

4점

No. 11

절댓값이 포함된 정적분

최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $g(x)$ 에 대하여 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수

$$F(x) = \ln |g(x)|$$

와 함수 $F(x)$ 의 도함수 $f(x)$ 가 1을 포함한 k 보다 작지 않은 모든 실수 x 에서

$$F(x) = \int_1^x |f(t) - f(1)| dt$$

을 만족시킨다. 곡선 $y = F(x)$ 가 $x = 2$ 에서 변곡점을 가질 때, $F(2) - F(k)$ 의 값은? [4점]

함수 $F(x) = \ln |g(x)|$ 가 미분가능한 함수이므로

실수 전체의 집합에서 정의되어야 한다. 따라서

실수 전체의 집합에서 $g(x) \neq 0$ 인데

함수 $g(x)$ 는 연속함수이므로 $g(x) > 0$ 이고 $F(x) = \ln g(x)$ 이다.

$x \geq 1 \geq k$ 에서

$$F(x) = \int_1^x |f(t) - f(1)| dt \text{ 이고 } F(1) = 0 \text{ 이다. 또한 미분하면}$$

$F'(x) = f(x) = |f(x) - f(1)|$ 이다. $x = 1$ 을 대입하면 $f(1) = 0$ 이고

$f(x) = |f(x)|$ 이므로 $x \geq 1 \geq k$ 에서 $F'(x) = f(x) \geq 0$ 이다.

$$F'(x) = f(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} \text{ 이고 } g(x) > 0 \text{ 이므로 } x \geq k \text{에서}$$

$$F'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} \geq 0 \text{ 이면 } x \geq k \text{에서 } g'(x) \geq 0 \text{ 이다. 이때}$$

$$F'(1) = f(1) = \frac{g'(1)}{g(1)} = 0 \text{ 이므로 } g'(1) = 0 \text{ 이고 } k \geq 1 \text{ 이다.}$$

따라서 $k = 1$, $g(x) = a(x-1)^2 + b$ 이고 $a > 0$, $b > 0$ 인데

$F(1) = \ln g(1) = 0$ 이므로 $g(1) = 1$ 이고 $b = 1$ 이다.

$F(x)$ 가 $x = 2$ 에서 변곡점을 가지므로

$F''(2) = 0$ 이고 $F''(2) = 0$ 이면 $g''(2)g(2) - \{g(2)\}^2 = 0$ 이다.

$g''(2)g(2) - \{g(2)\}^2 = a - 1$ 이므로 $a = 1$ 이다.

$g(x) = (x-1)^2 + 1$ 이므로

$$F(2) - F(k) = F(2) - F(1) = \ln \frac{g(2)}{g(1)} \text{ 이고}$$

$$F(2) - F(k) = \ln \frac{g(2)}{g(1)} = \ln g(2) = \ln 2 \text{ 이다.}$$