13)

첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이

$$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{3a_n+1}{2} & (a_n\text{이 홀수}) \\ \dfrac{a_n}{2} & (a_n\text{이 짝수})\end{cases}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

으로 정의된다. 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

[랑데뷰수학]

| 보 기 |

ㄱ. $a_1=3$이면 $a_{2018}=1$이다.

ㄴ. $a_1=8k+1$이면 $a_1<a_4$이다.
(단, $k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$)

ㄷ. $a_2=3$이면 $a_1>a_2$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

14)

두 곡선 $y=|\log_2(x-1)|$, $y=-(x-2)^2+3$가 만나는 두 점의 x좌표를 x_1, x_2 $(x_1<x_2)$라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[랑데뷰수학]

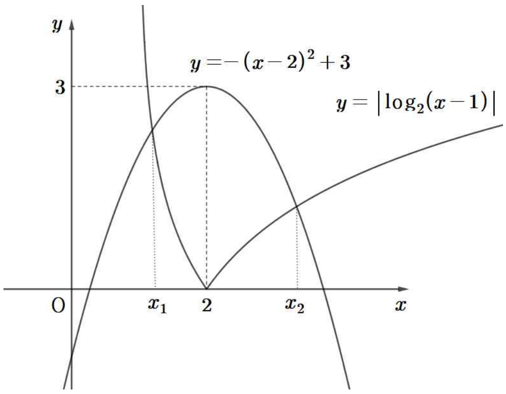
| 보 기 |

ㄱ. $x_1+x_2<\dfrac{13}{4}+\sqrt{2}$

ㄴ. $x_2+y_2>5$

ㄷ. $\log_2 3<\dfrac{y_1y_2}{(2-x_1)(x_2-2)}<\dfrac{24}{7}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



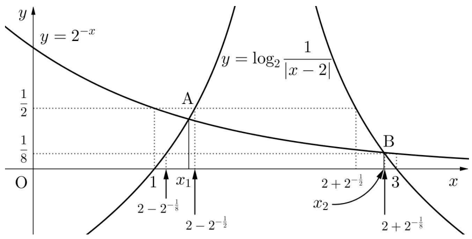
$y=\dfrac{1}{2}$와 두 곡선 $y=2^{-x}$, $y=\log_2\dfrac{1}{|x-2|}$이

만나는 교점의 x좌표는 각각 $1,\ 2-2^{-\frac{1}{2}}$이다.

$y=\dfrac{1}{8}$와 두 곡선 $y=2^{-x}$, $y=\log_2\dfrac{1}{|x-2|}$이

만나는 교점의 x좌표는 각각 $3,\ 2+2^{-\frac{1}{8}}$이다.

따라서 다음 그림과 같다.



ㄱ. $2-2^{-\frac{1}{8}}<x_1<2-2^{-\frac{1}{2}}$ 이므로 (참)

ㄴ. $2+2^{-\frac{1}{2}}<x_2<2+2^{-\frac{1}{8}}$이므로 (거짓)

ㄷ. ㄱ에서 $-2+2^{-\frac{1}{2}}\leftarrow x_1<\ -2+2^{-\frac{1}{8}}$이므로

$$2^{-2+2^{-\frac{1}{2}}}<y_1<2^{-2+2^{-\frac{1}{8}}}\cdots ㉠$$

ㄴ에서 $-2-2^{-\frac{1}{8}}\leftarrow x_2<\ -2-2^{-\frac{1}{2}}$이므로

$$2^{-2-2^{-\frac{1}{8}}}<y_2<2^{-2-2^{-\frac{1}{2}}}\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$2^{-2+2^{-\frac{1}{2}}-\left(-2-2^{-\frac{1}{8}}\right)}=2^{2^{-\frac{1}{2}}+2^{-\frac{1}{8}}}>2^{2^{-\frac{1}{2}}+2^{-\frac{1}{2}}}=2^{2\times 2^{-\frac{1}{2}}}=2^{2^{\frac{1}{2}}}=2^{\sqrt{2}}$이다.

따라서 $2^{\sqrt{2}}<\dfrac{y_1}{y_2}<2^{\sqrt[8]{2^7}}$이므로 $\dfrac{y_1}{y_2}>2^{\sqrt{2}}$ (참)

[다른 풀이]−ㄷ.

$\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{2^{-x_1}}{2^{-x_2}}>2^{\sqrt{2}}$

$2^{-(x_1-x_2)}>2^{\sqrt{2}}$에서 $x_2-x_1>\sqrt{2}$임을 보이면 충분하다.

$x_1<2-2^{-\frac{1}{2}}$, $x_2>2+2^{-\frac{1}{2}}$이므로

$x_2-x_1>2+2^{-\frac{1}{2}}-2+2^{-\frac{1}{2}}$

$x_2-x_1>2^{-\frac{1}{2}}+2^{-\frac{1}{2}}=2\times 2^{-\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$

이므로 성립한다.

5) 정답 ⑤

[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

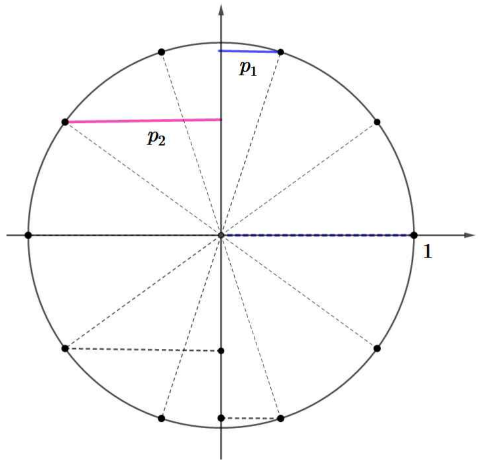
ㄱ.

다음 그림과 같이

$A_5=\left\{\cos\dfrac{2(m-1)}{5}\pi \;\middle|\; m\text{은 자연수}\right\}=\{1, p_1, p_2\}$

이다. $p_1>0$, $p_2<0$, $|p_1|<|p_2|$이므로

$p=p_1+p_2<0$ (참)



ㄴ.

집합 A_k의 모든 원소의 곱이 0이 되기 위해서는 집합 $0\in A_k$이어야 한다.

$\cos\dfrac{\pi}{2}=\cos\dfrac{3}{2}\pi=\cos\dfrac{5}{2}\pi=\cdots=0$이므로

$\cos\dfrac{2(m-1)}{k}\pi$에서 $\dfrac{2(m-1)}{k}=\dfrac{2n-1}{2}$ (n은 자연수)이면 $0\in A_k$이다.

$4(m-1)=k(2n-1)$에서 k는 4의 배수이다.…㉠

자연수 중 100이하의 4의 배수의 개수는 25이다. (참)

[랑데뷰팁]

㉠설명 $m-1$은 모든 자연수를 나타낼 수 있으므로 $m-1$은 $2n-1$이 나타내는 모든 자연수의 배수로 나타낼 수 있다. 즉 $4\times l(2n-1)=k(2n-1)$에서 $k=4l$

따라서 k는 4의 배수가 된다.

ㄷ.

단위원 위의 한 점에서 cos값은 x값이므로 $\cos\theta$의 θ가 일정하게 커질 때 마다 단위원의 x축 위의 1에서 시작하여 제1사분면과, 제2사분면에 연속적으로 나타난다.

$\cos\dfrac{2(m-1)}{k}\pi$에서 $n(A_k)=15$가 되기 위해서는 m에 1부터 15까지 $\cos\dfrac{2(m-1)}{k}\pi$에 대입할 때 모두 다른 값 15개가 나오고 $m=16$을 대입하면서 같은 값이 나와야 한다.

$m=15$일 때, $\cos\dfrac{28}{k}\pi$이다.

(i) k가 짝수일 때

$k=28$이면 15개의 cos값을 갖는다.

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t)dt + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{2}{1+\tan t}\right)dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t)dt$$

한편,

$\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$ 이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)dx$$

$$1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right) = 1+\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan x}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan x}$$

$$= 1+\frac{1-\tan x}{1+\tan x}$$

$$= \frac{2}{1+\tan x}$$

$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)dx$ 라 두면

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{2}{1+\tan x}\right)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \{\ln 2 - \ln(1+\tan x)\}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2 dx - I$$

$$2I = [\ln 2 \times x]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$I = \frac{\pi}{8}\ln 2$$

따라서 $f(2\alpha) = \frac{\pi}{8}\ln 2$ 이다.

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

[다른 풀이]

ㄷ.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t)dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{8}} \ln(1+\tan t)dt + \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t)dt$$

$$= \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{2}{1+\tan t}\right)dt + \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t)dt \quad (\because \text{ㄴ})$$

$$= \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \left\{\ln\left(\frac{2}{1+\tan t}\right) + \ln(1+\tan t)\right\}dt$$

$$= \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \ln 2 dt = \frac{\pi}{8}\ln 2$$

26) 정답 ⑤

[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

ㄱ.

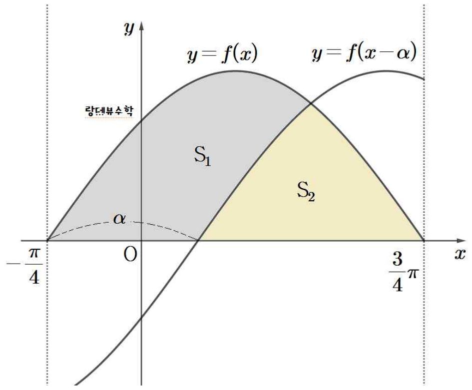
$$S_1 + S_2 = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} (\sin x + \cos x)dx$$

$$= [-\cos x + \sin x]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= 2\sqrt{2} \text{ (참)}$$

ㄴ.



$\alpha = \frac{\pi}{3}$ 일 때, $y = f\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ 과 x축의 교점은 $x = -\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{12}$ 이다.

따라서

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{12}} (\sin x + \cos x)dx$$

$$= [-\cos x + \sin x]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{12}}$$

$$= -\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= -\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= -\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right) + \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) + \sqrt{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$

한편

$S_2 = \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5}{12}\pi} f\left(x-\frac{\pi}{3}\right)dx + \int_{\frac{5}{12}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} f(x)dx$ 이고

$\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5}{12}\pi} f\left(x-\frac{\pi}{3}\right)dx$ 에서 $x-\frac{\pi}{3} = t$ 로 치환하면

$\int_{-\frac{\pi}{4}\pi}^{\frac{\pi}{12}} f(t)dt$ 이므로

또한

$$f\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$