13)

첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이

$$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{3a_n+1}{2} & (a_n\text{이 홀수}) \\ \dfrac{a_n}{2} & (a_n\text{이 짝수})\end{cases} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

으로 정의된다. 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

[랑데뷰수학]

| 보 기 |

ㄱ. $a_1=3$이면 $a_{2018}=1$이다.

ㄴ. $a_1=8k+1$이면 $a_1<a_4$이다.
  (단, $k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$)

ㄷ. $a_2=3$이면 $a_1>a_2$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

14)

두 곡선 $y=|\log_2(x-1)|$, $y=-(x-2)^2+3$가 만나는 두 점의 x좌표를 x_1, x_2 $(x_1<x_2)$라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[랑데뷰수학]

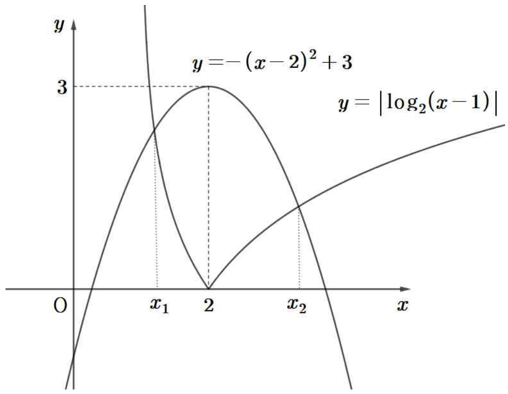
| 보 기 |

ㄱ. $x_1+x_2<\dfrac{13}{4}+\sqrt{2}$

ㄴ. $x_2+y_2>5$

ㄷ. $\log_2 3<\dfrac{y_1y_2}{(2-x_1)(x_2-2)}<\dfrac{24}{7}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



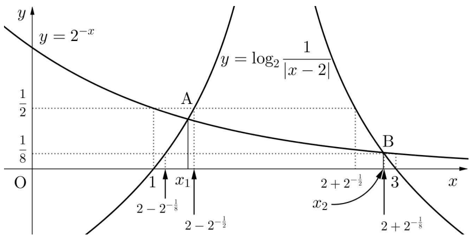
$y=\frac{1}{2}$와 두 곡선 $y=2^{-x}$, $y=\log_2\frac{1}{|x-2|}$이

만나는 교점의 x좌표는 각각 $1, 2-2^{-\frac{1}{2}}$이다.

$y=\frac{1}{8}$와 두 곡선 $y=2^{-x}$, $y=\log_2\frac{1}{|x-2|}$이

만나는 교점의 x좌표는 각각 $3, 2+2^{-\frac{1}{8}}$이다.

따라서 다음 그림과 같다.



ㄱ. $2-2^{-\frac{1}{8}}<x_1<2-2^{-\frac{1}{2}}$ 이므로 (참)

ㄴ. $2+2^{-\frac{1}{2}}<x_2<2+2^{-\frac{1}{8}}$이므로 (거짓)

ㄷ. ㄱ에서 $-2+2^{-\frac{1}{2}}\leftarrow x_1<-2+2^{-\frac{1}{8}}$이므로

$$2^{-2+2^{-\frac{1}{2}}}<y_1<2^{-2+2^{-\frac{1}{8}}}\cdots ㉠$$

ㄴ에서 $-2-2^{-\frac{1}{8}}\leftarrow x_2<-2-2^{-\frac{1}{2}}$이므로

$$2^{-2-2^{-\frac{1}{8}}}<y_2<2^{-2-2^{-\frac{1}{2}}}\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$2^{-2+2^{-\frac{1}{2}}-\left(-2-2^{-\frac{1}{8}}\right)}=2^{2^{-\frac{1}{2}}+2^{-\frac{1}{8}}}>2^{2^{-\frac{1}{2}}+2^{-\frac{1}{2}}}=2^{2\times 2^{-\frac{1}{2}}}=2^{2^{\frac{1}{2}}}=2^{\sqrt{2}}$이다.

따라서 $2^{\sqrt{2}}<\frac{y_1}{y_2}<2^{\sqrt[8]{2^7}}$이므로 $\frac{y_1}{y_2}>2^{\sqrt{2}}$ (참)

[다른 풀이]-ㄷ.

$\frac{y_1}{y_2}=\frac{2^{-x_1}}{2^{-x_2}}>2^{\sqrt{2}}$

$2^{-(x_1-x_2)}>2^{\sqrt{2}}$에서 $x_2-x_1>\sqrt{2}$임을 보이면 충분하다.

$x_1<2-2^{-\frac{1}{2}}$, $x_2>2+2^{-\frac{1}{2}}$이므로

$x_2-x_1>2+2^{-\frac{1}{2}}-2+2^{-\frac{1}{2}}$

$x_2-x_1>2^{-\frac{1}{2}}+2^{-\frac{1}{2}}=2\times 2^{-\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$

이므로 성립한다.

5) 정답 ⑤

[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

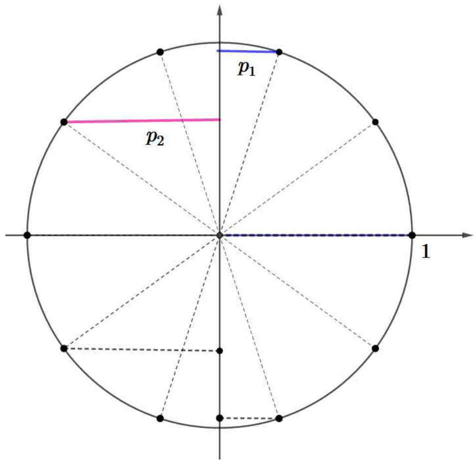
ㄱ.

다음 그림과 같이

$A_5=\left\{\cos\frac{2(m-1)}{5}\pi \;\middle|\; m\text{은 자연수}\right\}=\{1, p_1, p_2\}$

이다. $p_1>0$, $p_2<0$, $|p_1|<|p_2|$이므로

$p=p_1+p_2<0$ (참)



ㄴ.

집합 A_k의 모든 원소의 곱이 0이 되기 위해서는 집합 $0\in A_k$이어야 한다.

$\cos\frac{\pi}{2}=\cos\frac{3}{2}\pi=\cos\frac{5}{2}\pi=\cdots=0$이므로

$\cos\frac{2(m-1)}{k}\pi$에서 $\frac{2(m-1)}{k}=\frac{2n-1}{2}$ (n은 자연수)이면 $0\in A_k$이다.

$4(m-1)=k(2n-1)$에서 k는 4의 배수이다.$\cdots$㉠

자연수 중 100이하의 4의 배수의 개수는 25이다. (참)

[랑데뷰팁]

㉠설명 $m-1$은 모든 자연수를 나타낼 수 있으므로 $m-1$은 $2n-1$이 나타내는 모든 자연수의 배수로 나타낼 수 있다. 즉 $4\times l(2n-1)=k(2n-1)$에서 $k=4l$

따라서 k는 4의 배수가 된다.

ㄷ.

단위원 위의 한 점에서 cos값은 x값이므로 $\cos\theta$의 θ가 일정하게 커질 때 마다 단위원의 x축 위의 1에서 시작하여 제1사분면과, 제2사분면에 연속적으로 나타난다.

$\cos\frac{2(m-1)}{k}\pi$에서 $n(A_k)=15$가 되기 위해서는 m에 1부터 15까지 $\cos\frac{2(m-1)}{k}\pi$에 대입할 때 모두 다른 값 15개가 나오고 $m=16$을 대입하면서 같은 값이 나와야 한다.

$m=15$일 때, $\cos\frac{28}{k}\pi$이다.

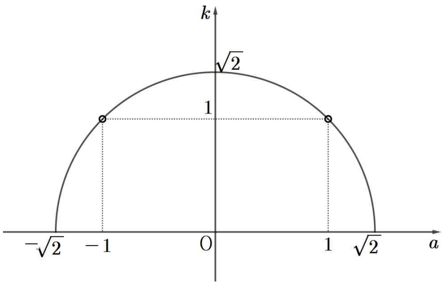
(i) k가 짝수일 때

$k=28$이면 15개의 cos값을 갖는다.

따라서 가능한 a의 합은 $-1+\sqrt{2}+1+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$
(거짓)

12) 정답 ①
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

$k=\sqrt{2-a^2}$이라 하면 다음 그림과 같이
$-\sqrt{2}<a<-1$, $1<a<\sqrt{2}$일 때, $0<k<1$이고
$-1<a<1$일 때, $1<k\leq\sqrt{2}$이다.



ㄱ. $-1<a<1$이면 $f(x)=k^x$에서 지수 함수의 밑 k의 범위가 $k>1$이므로
함수 $f(x)$는 증가함수이다.
따라서 $f(1)>1$이다. (참)
ㄴ. 지수 함수 $f(x)=k^x$에서 $f(-1)>1$이면 감소함수이므로 밑 k의 범위가 $0<k<1$이다.
따라서 $-\sqrt{2}<a<-1$, $1<a<\sqrt{2}$이다. (거짓)
ㄷ. $0\leq x\leq\sqrt{2}$일 때, $f(x)$의 최댓값은 밑 k가 최대인 $\sqrt{2}$일 때,
$f(\sqrt{2})\leq(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$이다.
$M=(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}=2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$이다. $2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}<2$에서 $\frac{\sqrt{2}}{2}<1$이므로 $M<2$이다. (거짓)

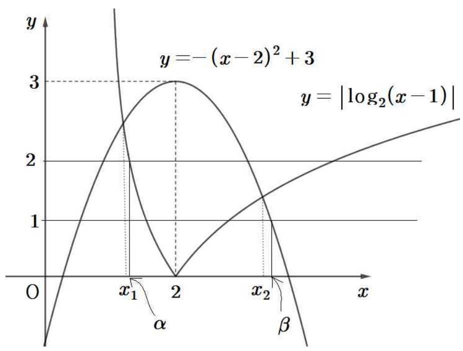
13) 정답 ⑤
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

ㄱ. $a_1=3$을 주어진 점화식에 대입하면
$a_2=5$, $a_3=8$, $a_4=4$, $a_5=2$, $a_6=1$, $a_7=2$, $a_8=1$, $\cdots$
즉, 다섯 번째 항부터 2와 1이 반복됨을 알 수 있다.
$\therefore\ a_{2018}=1$ (참)
ㄴ. $a_1=8k+1$이면
$a_2=\dfrac{3(8k+1)+1}{2}=12k+2$
$a_3=\dfrac{12k+2}{2}=6k+1$
$a_4=\dfrac{3(6k+1)+1}{2}=\dfrac{18k+4}{2}=9k+2$
$a_1<a_4$ (참)
ㄷ. a_1이 홀수인 경우와 짝수인 경우로 나누어 생각해본다.

(i) a_1이 홀수일 때, $\dfrac{3a_1+1}{2}=3$에서 $a_1=\dfrac{5}{3}$이므로 모순이다.
(ii) a_1이 짝수일 때, $\dfrac{a_1}{2}=3$에서 $a_1=6$
(i),(ii)에서 $a_1=6$ 이므로 $a_1>a_2$이다. (참)
따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

14) 정답 ④
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

$y=|\log_2(x-1)|=\begin{cases}\log_2(x-1) & (x\geq 2)\\ -\log_2(x-1) & (1<x<2)\end{cases}$ 에서
$f_1(x)=\log_2(x-1)$, $f_2(x)=-\log_2(x-1)$, $g(x)=-(x-2)^2+3$이라 하자.



ㄱ.
$g(1)=2$이므로 $y=f_2(x)$와 $y=2$의 교점의 x좌표를 α라 할 때, $x_1<\alpha$이다.
$-\log_2(x-1)=2$
$\log_2(x-1)=-2$
$x-1=\dfrac{1}{4}$
$\alpha=\dfrac{5}{4}$
$\therefore\ x_1<\dfrac{5}{4}$
$f_1(3)=1$, $g(3)=2$이므로 $y=g(x)$와 $y=1$의 교점의 x좌표를 β라 할 때, $x_2<\beta$이다.
$-(x-2)^2+3=1$
$(x-2)^2=2$
$x=2\pm\sqrt{2}$
$\beta=2+\sqrt{2}$
$\therefore\ x_2<2+\sqrt{2}$
따라서 $x_1+x_2<\dfrac{13}{4}+\sqrt{2}$ (ㄱ, 참)

ㄴ.
두 점 $(2,3)$, (x_2, y_2)을 지나는 직선의 기울기는 두 점 $(2,3)$,