35)

함수 $f(x)$를

$$f(x)=\int_0^x |\sin t\, e^{\cos t}|\,dt-\int_0^x (\sin t\, e^{\cos t})\,dt$$

라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [랑데뷰수학]

| 보 기 |

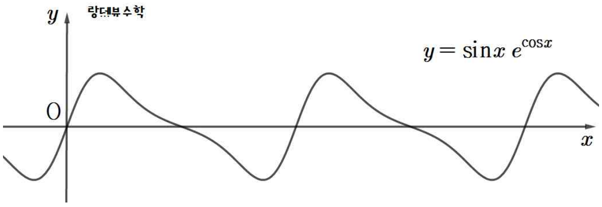
ㄱ. $f(2\pi)=2e-\dfrac{2}{e}$

ㄴ. $2\pi<\alpha<3\pi$인 α에 대하여 $f'(\alpha)=0$이다.

ㄷ. $0<\beta<\pi$인 β에 대하여

$\displaystyle\int_{3\pi}^{3\pi+\beta} f(x)dx-\int_{\pi}^{\pi+\beta} f(x)dx=3\beta\left(e-\frac{1}{e}\right)$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



36)

$x>-1$인 모든 x에 대하여 함수 $f(x)$와 $g(x)$는 미분가능하고 $f'(x)$와 $g'(x)$는 연속함수이다. $f(x)$와 $g(x)$는 다음 등식을 만족시킨다.

(가) $f(0)=0$

(나) $\displaystyle\int_0^x (x-t)f'(t)\,dt=g(x)-f(x)$

다음 중 옳은 것을 고른 것은? [랑데뷰수학]

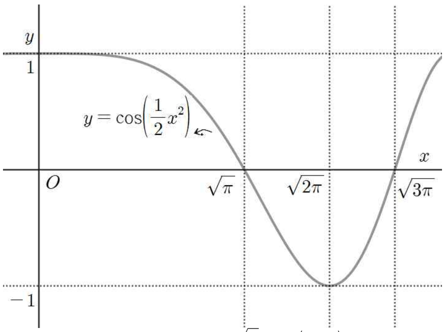
| 보 기 |

ㄱ. $f'(0)=g'(0)$

ㄴ. $e^x f(x)=\displaystyle\int_0^x e^t g'(t)\,dt$이다.

ㄷ. $g(x)=\dfrac{x\ln(x+1)}{e^x}$이면 $f(1)=\dfrac{\ln 2-1}{4e}$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



이므로 $f(\sqrt{\pi}) = e^{-\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{\pi}} \cos\left(\frac{1}{2}t^2\right)dt > 0$ (ㄱ.참)

ㄴ. $f(0)=0$, $f(\sqrt{\pi})>0$이고

$f(x)=e^{-x}\int_0^x \cos\left(\frac{1}{2}t^2\right)dt$는 $[0,\ \sqrt{\pi}]$에서 연속이고 $(0,\ \sqrt{\pi})$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의해 $\frac{f(\sqrt{\pi})-f(0)}{\sqrt{\pi}-0}=f'(c)$을 만족하는 c가 열린 구간 $(0,\ \sqrt{\pi})$에 적어도 하나 존재한다.

$\frac{f(\sqrt{\pi})}{\sqrt{\pi}}>0$이므로 $f'(a)>0$인 a가 적어도 하나 존재한다.(ㄴ.참)

ㄷ.

$$f'(x)=-e^{-x}\int_0^x \cos\left(\frac{1}{2}t^2\right)dt+e^{-x}\cos\left(\frac{1}{2}x^2\right)$$

$$=\frac{\cos\left(\frac{1}{2}x^2\right)-\int_0^x \cos\left(\frac{1}{2}t^2\right)dt}{e^x}$$ 이다.

$f'(0)=1$, $f'(\sqrt{\pi})=\frac{-\int_0^{\sqrt{\pi}}\cos\left(\frac{1}{2}t^2\right)dt}{e^{\sqrt{\pi}}}<0$이고

ㄴ.에서 $f'(a)>0$을 만족하는 a에 대하여
함수 $f'(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ \sqrt{\pi}]$에서 연속이고,
$f'(a)>0$, $f'(\sqrt{\pi})<0$이므로 사잇값의 정리에 의

하여 $f'(b)=0$을 만족시키는 b가 열린 구간
$(0,\ \sqrt{\pi})$ 에서 적어도 하나 존재한다. (참)
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

14) 정답 ⑤
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

ㄱ. $g(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$g(0)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{f(x)}-1}{x}=1$이다.

$f(0)=0$이므로 $f(x)=x^2+ax$라 두면

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2+ax}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2+ax}-1}{x^2+ax}\times\frac{x^2+ax}{x}=1\times(a)=1$$

따라서 $a=1$이므로 $f(x)=x^2+x$이다.
따라서 $f(3)=12$

ㄴ. $x\neq 0$일 때 $g(x)=\frac{e^{f(x)}-1}{x}$이고

$$g'(x)=\frac{e^{f(x)}f'(x)x-\left(e^{f(x)}-1\right)}{x^2}$$

$$=\frac{e^{x^2+x}(2x^2+x-1)+1}{x^2}$$ 에서

$k(x)=e^{x^2+x}(2x^2+x-1)+1$라 하면

$$k'(x)=e^{x^2+x}(2x+1)(2x^2+x-1)+e^{x^2+x}(4x+1)$$
$$=e^{x^2+x}(4x^3+4x^2+3x)$$
$$=e^{x^2+x}(4x^2+4x+3)x$$

에서 $4x^2+4x+3=4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+2>0$이므로

$x=0$일 때, $k'(0)=0$이고 $k'(x)$의 부호가 $x=0$을 기준으로 $-\to+$이므로 $k(x)$는 $x=0$에서 극소이자 최솟값 $k(0)=0$을 갖는다.

따라서 $x\neq 0$일 때 $k(x)>0$이므로 $g'(x)>0$

[랑데뷰팁]

$g(x)=\frac{e^{x^2+x}-1}{x}$라 할 때, $g(x)$는 $\left(x,\ e^{x^2+x}\right)$, $(0,\ 1)$을 잇는 직선의 기울기 이다.

$y=e^{x^2+x}=e^{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}$이므로 $x=-\frac{1}{2}$을 축으로 하는 아래로 볼록인 그래프 개형이고

$(0,\ 1)$이 곡선 위의 점이고 $(-1,\ 1)$이므로 기울기를 예측해보면 $x=-1$일 때, 기울기가 0이고 $x<-1$일 때 기울기가 음의 값, $x>-1$일 때 기울기가 양의 값이다.
따라서 기울기 함수는 증가함수이므로 $g'(x)>0$이다.

ㄷ. $h(x)=\int_0^2\left|e^{f(t)}-1-g(x)t\right|dt$라 하면

$$h(x)=\int_0^2 t\left|\frac{e^{f(t)}-1}{t}-g(x)\right|dt$$
$$=\int_0^2 t\,|g(t)-g(x)|\,dt$$

ㄴ.에서 함수 $g(x)$는 증가함수이므로 $t<x$일 때, $g(t)<g(x)$이고 $t>x$일 때, $g(t)>g(x)$이다.

$$=\int_0^x -t\,g(t)+t\,g(x)\ dt\ +\int_x^2 t\,g(t)-t\,g(x)\ dt$$
$$=-\int_0^x t\,g(t)dt+g(x)\int_0^x t\ dt+\int_x^2 t\,g(t)dt-g(x)\int_x^2 t\ dt$$
$$=-\int_0^x tg(t)dt+g(x)\frac{1}{2}x^2-\int_2^x tg(t)dt+g(x)\left\{\frac{1}{2}x^2-2\right\}$$

$$f'(x)=-xg(x)+g'(x)\frac{1}{2}x^2+g(x)x-xg(x)+g'(x)\left\{\frac{1}{2}x^2-2\right\}+g(x)x$$
$$=g'(x)\{x^2-2\}$$

ㄴ.에서 $g'(x)>0$이고 $f'(\sqrt{2})=0$이고 구간 $(0,\ 2)$에서 $f'(x)$의 부호가 $-\to+$로 변하므로 $f(x)$는 $x=\sqrt{2}$에서 극소이자 최솟값을 갖는다.(참)

따라서 ㄱ.ㄴ.ㄷ. 모두 옳다.

[랑데뷰팁]

$f(x)=\int_0^k t^n\,|g(t)-g(x)|\ dt$ 의 최솟값은

재한다. (참)

ㄴ.

ㄱ.에서 $f(a)=f(b)=f(c)$이면 $f'(d_1)=f'(d_2)=0$이므로 열린구간 (d_1, d_2)에 $f''(d)=0$을 만족하는 d가 적어도 하나 존재한다. (참)

ㄷ. $\dfrac{\left(\dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}\right)-\left(\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)}{c-a}$ 의 값을 m이라 하고 양변에 $c-a$를 곱하면

$m(c-a)=\left(\dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}\right)-\left(\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)$이고 다시 양변에 $(c-b)$를 곱하면

$m(c-a)(c-b)=f(c)-f(b)-\left(\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)(c-b)$이다.

$F(x)=f(x)-f(b)-\left(\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)(x-b)-m(x-a)(x-b)\cdots$㉠라 두면

$F(x)$는 닫힌구간 $[a, c]$에서 연속이고 열린구간 (a, c)에서 미분가능하다.

또한 ㉠에서 $F(a)=F(b)=F(c)$이므로 롤의 정리에 의해 $F'(d_1)=F'(d_2)$인 $a<d_1<b<d_2<c$인 d_1, d_2가 각각 적어도 하나씩 존재한다.

한편,

$F'(x)=f'(x)-\left(\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)-m(2x-a-b)$에서

$G(x)=F'(x)$라 하면

$G(d_1)=G(d_2)$이고 닫힌구간 $[d_1, d_2]$에서 연속이고 열린구간 (d_1, d_2)에서 미분가능하므로 롤의 정리에 의해 $G'(d)=0$인 d가 $d_1<d<d_2$에 적어도 하나 존재한다.

$G'(x)=f''(x)-2m$에서 $G'(d)=f''(d)-2m=0$

$\therefore\ m=\dfrac{1}{2}f''(d)$이다.

$a<d<c$이므로

$\dfrac{\left(\dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}\right)-\left(\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)}{c-a}=\dfrac{f''(d)}{2}$ 인 d가 열린구간 (a, c)에 적어도 하나 존재한다.

따라서 $\dfrac{\left(\dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}\right)-\left(\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)}{c-a}=f''(d)$을 만족하는 d가 열린구간 (a, c)에 적어도 1개 이상 존재한다고는 할 수 없다.(거짓)

[다른 풀이]

ㄷ.

$a<\alpha<b<\beta<c$일 때, 평균값 정리에 의해

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\alpha)$, $\dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}=f'(\beta)$를 만족하는 α, β가 존재한다.

$\dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\beta)-f'(\alpha)$

$$\frac{\left(\dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}\right)-\left(\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)}{c-a}=\frac{f'(\beta)-f'(\alpha)}{\beta-\alpha}\times\frac{\beta-\alpha}{c-a}$$
$$=f''(\gamma)\times\frac{\beta-\alpha}{c-a}\quad(\alpha<\gamma<\beta)$$

따라서 ㄷ.에서 $f''(\gamma)\times\dfrac{\beta-\alpha}{c-a}=f''(d)$ $(a<d<c)$

$f''(x)=0$인 경우는 d가 존재한다고 할 수 없다.

29) 정답 ⑤

[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

ㄱ.

$f(x)=\displaystyle\int_0^x \ln(1+\tan t)dt+\int_x^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(\frac{2}{1+\tan t}\right)dt$

x에 대하여 미분하면

$f'(x)=\ln(1+\tan x)-\ln\left(\dfrac{2}{1+\tan x}\right)=\ln\left\{\dfrac{(1+\tan x)^2}{2}\right\}\cdots$㉠

$\therefore\ f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\ln\left(\dfrac{(1+\sqrt{3})^2}{2}\right)=\ln(2+\sqrt{3})$ (참)

ㄴ.

$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(\frac{2}{1+\tan t}\right)dt$에서 $\dfrac{\pi}{4}-t=x$ 로 놓으면

$t=\dfrac{\pi}{8}$일 때, $x=\dfrac{\pi}{8}$, $t=\dfrac{\pi}{4}$일 때, $x=0$

$-1=\dfrac{dx}{dt}$이므로

$$\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(\frac{2}{1+\tan t}\right)dt=\int_{\frac{\pi}{8}}^{0}\ln\left(\frac{2}{1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}\right)(-dx)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{8}}\ln\left(\frac{2}{1+\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}}\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{8}}\ln(1+\tan x)dx\ \text{(참)}$$

ㄷ.

㉠에서

$f'(x)=\ln\left\{\dfrac{(1+\tan x)^2}{2}\right\}=0$

$\dfrac{(1+\tan x)^2}{2}=1$

$(1+\tan x)^2=2$

$1+\tan x=\pm\sqrt{2}$

$\tan x=-1\pm\sqrt{2}$

$\tan x>-1$이므로 $\tan x=-1+\sqrt{2}$

함수 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 최소이고 $\tan\alpha=-1+\sqrt{2}$이다.

$\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\dfrac{2(\sqrt{2}-1)}{1-(3-2\sqrt{2})}=1$

따라서 $2\alpha=\dfrac{\pi}{4}$이다.