2021 우주설 파이널 8주차

통계 내용 탐구

잘 들어.
온 세상이 너를 환영해도
그 세상이 너를 버릴 테니 gotta let go.
늦기 전에.
Cuz I've been there before.
눈에 보이는 건 화려해도
don't be fooled by the diamonds and gold.
갈채 쏟아질 때 취하지 마.
때로는 칭찬으로 너의 발을 묶을 거야.
레드카펫 깔아줘도 잊지 마라.
그게 너의 피땀으로 붉게 물든 거야.

Epik high, 개화

우주설

2021 수능대비

수학 워크북

Theme 01
이산확률분포와 합의 기호 시그마

001

[9월 모의평가]

두 이산확률변수 X, Y의 확률분포를 표로 나타내면 각각 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	b	c	d	1

Y	11	21	31	41	합계
$\mathrm{P}(Y=y)$	a	b	c	d	1

$\mathrm{E}(X)=2$, $\mathrm{E}(X^2)=5$일 때, $\mathrm{E}(Y)+\mathrm{V}(Y)$의 값을 구하시오.

002

[수능특강 71page]

이산확률변수 X가 갖는 값은 $1, 2, 3, 4, 5$이고 이산확률변수 Y가 갖는 값은 $1, 3, 5, 7, 9$이다.
상수 a에 대하여

$$\mathrm{P}(Y=2i-1)=a\times\mathrm{P}(X=i)+a\ (i=1, 2, 3, 4, 5)$$

이고, $\mathrm{E}(X)=\dfrac{10}{3}$일 때, $\mathrm{E}(9Y+5)$의 값은?

001-2

9월 모의평가에서 출제된 좌측 페이지의 문항은

$Y=10X+10$이라고 하여도 정답을 구하는 데에 지장이 없다.

확률의 구성이 a, b, c, d로 동일하기 때문인데 이러한 이유를 모르고 이를 풀이하면

스스로에게 치명적인 약점을 만들 수 있다. 그 예시가 좌측 아래의 수능특강 문항이다.

이 문제에서 $Y=2X-1$라 하고 정답을 구할 수 있을까? 확인해보자.

$\sum_{i=1}^{5}\mathrm{P}(Y=2i-1)=\sum_{i=1}^{5}\mathrm{P}(X=i)=1$에 의해 $a=\frac{1}{6}$은 쉽게 알 수 있다.

$$\mathrm{P}(Y=2i-1)=\frac{1}{6}\times\mathrm{P}(X=i)+\frac{1}{6}\ (i=1,2,3,4,5)$$

에 대하여 표를 작성하자.

X	1	2	3	4	5	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	1

Y	1	3	5	7	9	합계
$\mathrm{P}(Y=y)$	$\frac{p_1}{6}+\frac{1}{6}$	$\frac{p_2}{6}+\frac{1}{6}$	$\frac{p_3}{6}+\frac{1}{6}$	$\frac{p_4}{6}+\frac{1}{6}$	$\frac{p_5}{6}+\frac{1}{6}$	1

$Y=2X-1$가 성립하지 않을 것을 직관적으로 알 수 있다.

그렇다면 풀이는 어떻게 이루어 져야 할 것인가? 해답은 항상 교과개념이다.

이산확률변수 X의 확률분포가 아래의 표와 같을 때,

X	X1	X2	X3	⋯	Xn	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	p_1	p_2	p_3	⋯	p_n	1

를 확률 변수 X의 기댓값 또는 평균이라고 하고 기호로 E(X)와 같이 나타낸다

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(Y)&=\sum_{i=1}^{5}(2i-1)\times\mathrm{P}(Y=2i-1)\\
&=\sum_{i=1}^{5}(2i-1)\left\{\frac{1}{6}\mathrm{P}(X=i)+\frac{1}{6}\right\}\\
&=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{5}i\times\mathrm{P}(X=i)+\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{5}i-\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{5}\mathrm{P}(X=i)+5\times\left(-\frac{1}{6}\right)\\
&=\frac{1}{3}\mathrm{E}(X)+\frac{(1+2+3+4+5)}{3}-\frac{1}{6}\times1+5\times\left(-\frac{1}{6}\right)\\
&=\frac{10}{9}+5-\frac{1}{6}-\frac{5}{6}\\
&=\frac{46}{9}
\end{aligned}$$

따라서 정답은 51.

Theme 04
정규분포의 확률밀도 함수

011

[2017학년도 수능 가18 / 나29]

확률변수 X는 평균이 m, 표준편차가 5인 정규분포를 따르고, 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(10) > f(20)$
(나) $f(4) < f(22)$

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.6	0.226
0.8	0.288
1.0	0.341
1.2	0.385
1.4	0.419

m이 자연수일 때, $\mathrm{P}(17 \le X \le 18) = a$이다. $1000a$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하시오.

012

[2015년 9월 가18]

확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(10,\ 4^2)$, 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 4^2)$을 따르고, 확률변수 X와 Y의 확률밀도함수는 각각 $f(x),\ g(x)$이다.

$$f(12)=g(26),\quad \mathrm{P}(Y\geq 26)\geq 0.5$$

일 때, $\mathrm{P}(Y\leq 20)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0\leq Z\leq z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.0062 ② 0.0228 ③ 0.0896
④ 0.1587 ⑤ 0.2255

011-12

정규분포의 확률밀도함수의 그래프를 관찰하자.

$x=t$에서의 함숫값 $f(t)$는 대칭축 $x=m$(평균)까지의 거리에 반비례 한다.

그러므로 하나의 확률밀도함수 그래프 내에서 다음의 명제는 참이다.

$f(t_1)<f(t_2)$이면 $\Leftrightarrow$ $|m-t_1|>|m-t_2|$이다.

(필요 • 충분)

(가) $f(10)>f(20)$: $|m-10|<|m-20|$ $\Rightarrow$ $m<15$

(나) $f(4)<f(22)$: $|m-4|>|m-22|$ $\Rightarrow$ $13<m$

$m=14$를 얻고

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(17\le X\le 18)&=\mathrm{P}(m+0.6\sigma\le X\le m+0.8\sigma)\\&=\mathrm{P}(0.6\le Z\le 0.8)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 0.8)-\mathrm{P}(0\le Z\le 0.6)\\&=0.062\end{aligned}$$

답: 62

아래의 문제도 마찬가지로 두 정규분포의 표준편차가 같으므로 개형이 같은 것을 이용하여 평균과의 거리 식을 세우자

$f(12)=g(26)$: $|10-12|=|m-26|$ $\Rightarrow$ $m=24$ 또는 28

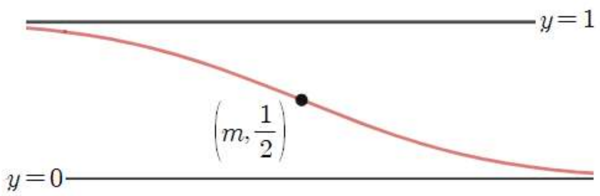
$\mathrm{P}(Y\ge 26)\ge 0.5$: $\mathrm{P}(Y\ge 26)\ge\mathrm{P}(Y\ge m)$

사전학습

확률변수 Y가 정규분포를 따를 때, t에 대한 함수

$$h(t)=\mathrm{P}(Y\ge t)$$

는 다음과 같은 개형의 감소함수이다.



그러므로 $h(t_1)<h(t_2)$ $\Leftrightarrow$ $t_1>t_2$ 이다. (필요 • 충분)

$\mathrm{P}(Y\ge 26)\ge\mathrm{P}(Y\ge m)$: $26\le m$

그러므로 $m=28$이고,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Y\le 20)&=\mathrm{P}(Z\le -2)\\&=0.0228\end{aligned}$$

답: 2

014

실수 전체집합에서 정의된 연속확률변수 X는 평균이 m인 정규분포를 따른다. 함수 $f(t)$를 $f(t) = \mathrm{P}(t \leq X \leq t+4)$로 정의할 때, 아래의 조건을 만족시킨다.

(가) m은 자연수이다.
(나) $f(6) < f(18) < f(10)$

$f(6) = f(\alpha)$, $f(18) = f(\beta)$일 때, $\alpha + \beta$의 값을 구하시오. (단, $\alpha \neq 6$, $\beta \neq 18$)

013-14

정규분포를 따르는 확률변수 X의 평균 m과 확률밀도함수 $f(x)$에 대하여

함수 $H(t)=\mathrm{P}(t \leqq X \leqq t+1)$ 가 $t=m-\frac{1}{2}$에서 최댓값을 갖는 것은 기존 기출을 통해서 알 수 있다. 거기에 $f(x)$의 $x=m$에서의 대칭성까지 고려하면

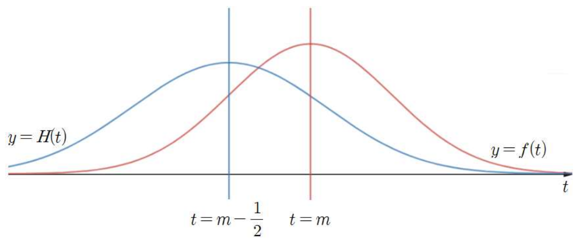
함수 $y=H(t)$의 그래프를 그릴 수 있다.

사전학습

함수 $H(t)=\mathrm{P}(t \leqq X \leqq t+1)$ 와 함수 $y=f(t)$를 같은 좌표 상에 표시하자.

$y=f(t)$의 함숫값이 대칭축 $t=m$에 가까울수록 값이 커지듯,

$y=H(t)$의 함숫값 또한 대칭축 $m-\frac{1}{2}$에 가까울수록 값이 커진다.



그러므로

$h(t_1)< h(t_2)$ $\Leftrightarrow$ $\left|m-\frac{1}{2}-t_1\right|>\left|m-\frac{1}{2}-t_2\right|$ 이다.

(필요 • 충분)

위 문제는 $H(0)=H(2)=\mathrm{P}(0.25 \leq Z \leq 0.75)$이므로 $0.1747+0.1747=0.3494$다.

답은 1번

아래 문제는 사전 학습을 통해 $f(t)=\mathrm{P}(t \leq X \leq t+4)$의 그래프가 $t=m-2$에서

최댓값을 갖고 $t=m-2$를 대칭축으로 갖도록 그려지는 것을 알 수 있다.

$f(t_1)< f(t_2)$ $\Leftrightarrow$ $|m-2-t_1|>|m-2-t_2|$ 이다.

(필요 • 충분)에 의해

$f(6)<f(18)<f(10)$ $\Leftrightarrow$

$|m-8|>|m-20|>|m-12|$ 이고,

$|m-8|>|m-20|$: $14<m$

$|m-20|>|m-12|$: $m<16$ 에 의해 $m=15$이다.

$f(6)=f(\alpha)$: $|m-8|=|m-2-\alpha|$,

$7=|13-\alpha|$ 에서 $\alpha=20$이고,

$f(18)=f(\beta)$: $|m-20|=|m-2-\beta|$,

$5=|13-\beta|$ 에서 $\beta=8$이다.

답은 28

015

[2020학년도 수능 가18]

확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(10,\ 2^2)$, 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 2^2)$을 따르고, 확률변수 X와 Y의 확률밀도함수는 각각 $f(x)$와 $g(x)$이다.

$$f(12) \leq g(20)$$

을 만족시키는 m에 대하여 $\mathrm{P}(21 \leq Y \leq 24)$의 최댓값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.5328 ② 0.6247 ③ 0.7745
④ 0.8185 ⑤ 0.9104

015-16

지금까지의 사전 학습내용을 모두 이용하자.
확률변수 X, Y의 표준편차가 같은 것을 인지하여

$f(12) \le g(20)$: $|12-10| \ge |20-m|$ $\Rightarrow$
$18 \le m \le 22$

$\mathrm{P}(21 \le Y \le 24)$: $H(t)=\mathrm{P}(t \le Y \le t+3)$일 때,
$H=21$으로 해석 되므로

$y=H(t)$의 그래프의 대칭 축 $t=m-\dfrac{3}{2}$에 대하여

$\left|m-\dfrac{3}{2}-21\right|$의 값이 작을수록 $H(21)$의 값은 커진다.

$m=22$일 때 최대인 것을 기존 따름 정리들을 활용하여 알 수 있다.

답은 1번

아래 문항도 마찬가지로 $H(t)=\mathrm{P}(t \le X \le t+3)$이라 하면,

$y=H(t)$의 그래프의 대칭 축 $t=m-\dfrac{3}{2}$에 대하여

(가): $H(32)>H(35)$: $\left|m-\dfrac{3}{2}-32\right| < \left|m-\dfrac{3}{2}-35\right|$

$\Rightarrow m<35$

(나): $H(32)>H(29)$: $\left|m-\dfrac{3}{2}-32\right| < \left|m-\dfrac{3}{2}-29\right|$

$\Rightarrow 32<m$

$m=33$ 또는 34

(다): $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1) < \mathrm{P}(33 \le X \le 35) < \mathrm{P}(0 \le Z \le 2)$
(행동영역: 3개 항의 부등식은 비교 형태를 통일해준다.)

$m=33$이면,

$$\mathrm{P}(0 \le Z \le 1) < \mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{2}{\sigma}\right) < \mathrm{P}(0 \le Z \le 2)$$

인데

함수 $\mathrm{P}(0 \le Z \le t)$는 증가함수 이므로 t의 들어갈 값만 비교하면 된다

$1<\dfrac{2}{\sigma}<2$가 도출된다. 양변을 2로 나누고,

역수를 취하면 $1<\sigma<2$이므로 조건을 만족시키는 자연수 σ는 없다.

그렇다면 $m=34$이고,

$$\mathrm{P}(0 \le Z \le 1) < \mathrm{P}\left(-\frac{1}{\sigma} \le Z \le \frac{1}{\sigma}\right) < \mathrm{P}(0 \le Z \le 2)$$

에서

$0.3413 < 2\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \dfrac{1}{\sigma}\right) < 0.4772$에서 $\sigma=2$임을 알 수 있다.

답은 0.4772

017

실수 전체집합에서 정의된 연속확률변수 X는 평균이 m이고 표준편차가 σ인 정규분포를 따른다. 함수 $f(t)$를

$$f(t) = \mathrm{P}(X \le t) + \mathrm{P}(X \ge t+6)$$

로 정의할 때, 함수 $f(t)$는 최솟값 0.3174를 갖는다. 다음 조건을 만족시키는 m의 최솟값을 α, 최댓값을 β라 할 때, $\alpha+\beta+\sigma$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 통해 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

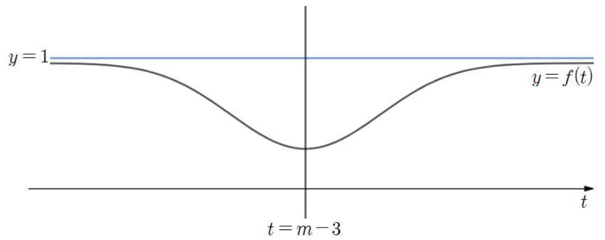
$$f(10) \le f(12) \le 0.5228$$

① 27 ② 28 ③ 29 ④ 30 ⑤ 31

017

확률변수 X의 확률밀도함수의 개형을 그린 뒤
$f(t)=\mathrm{P}(X \le t)+P(X \ge t+6)$를 관찰하면,
$f(t)=1-\mathrm{P}(t \le X \le t+6)$임을 알 수 있다.

사전 학습을 통해 $\mathrm{P}(t \le X \le t+6)$가 $t=m-3$에서 최댓값을 갖는 함수인 것을
알 고 있다. 그러므로 $f(t)=1-\mathrm{P}(t \le X \le t+6)$는 $t=m-3$에서 최솟값을 갖는
다음과 같은 개형을 갖는 것을 예상할 수 있다. (관찰을 통한 그래프 그리기)



그러므로 $f(t_1)<f(t_2) \Leftrightarrow |m-3-t_1|<|m-3-t_2|$ 이다. (필요 • 충분) $\cdots$ (ㄱ)

함수 $f(t)$는 최솟값 0.3174를 갖는다.
$\Rightarrow f(m-3)=0.3174$
$f(m-3)=1-\mathrm{P}(m-3 \le X \le m+3)=0.3174$
$\mathrm{P}(m-3 \le X \le m+3)=0.6826$
$\mathrm{P}(m \le X \le m+3)=0.3413$
$\Rightarrow \mathrm{P}\left(0 \le Z \le \dfrac{3}{\sigma}\right)=0.3413 \Rightarrow \sigma=3$

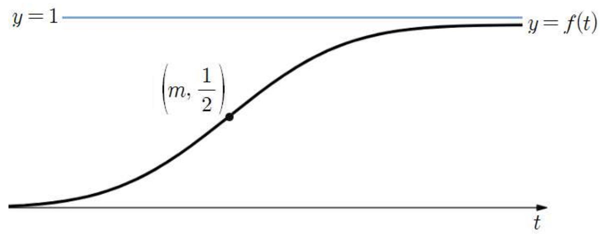
한편, $f(10) \le f(12) \le 0.5228$ (행동영역: 3개 항의 부등식은 비교 형태를 통일해준다.)
$0.3413<0.5228<1$이므로 $f(k)=0.5228$을 만족시키는 k가 존재한다. 그것을 찾아보자.
$f(k)=1-\mathrm{P}(k \le X \le m+6)=0.5228$
$\mathrm{P}(k \le X \le k+6)=0.4772$
$\Rightarrow \mathrm{P}(k \le X \le k+2\sigma)=0.4772$

$\Rightarrow \mathrm{P}\left(\dfrac{k-m}{\sigma} \le Z \le \dfrac{k-m}{\sigma}+2\right)=\mathrm{P}(0 \le Z \le 2)$
조건을 만족시키는 $k=m-6$ 또는 m (무엇을 선택하든 상관없다.)

$f(10) \le f(12) \le f(m)$에서 (ㄱ)에 의해
$\Rightarrow |m-3-10| \le |m-3-12| \le |m-3-m|$
$|m-3-10| \le |m-3-12|$: $m \le 14$
$|m-3-12| \le 3$: $12 \le m \le 18$
그러므로 $12 \le m \le 14$이다.
답은 3번

< 여러 가지 따름정리 >

$f(t)=\mathrm{P}(X \le t)$의 그래프를 그려보자



$f(t)$는 증가함수로서 $t_1<t_2 \Leftrightarrow f(t_1)<f(t_2)$이다.
(필요 • 충분) $\cdots$ (ㄱ)

$\mathrm{P}(X \ge t)=\mathrm{P}(X \le 2m-t)$ $\cdots$ (ㄴ)

(ㄱ)+(ㄴ)에 의해 다음과 같은 정리를 도출해 낼 수 있다.

$\mathrm{P}(X \le t_1)<\mathrm{P}(X \ge t_2)<\mathrm{P}(X \le t_3) \Leftrightarrow$
$\mathrm{P}(X \le t_1)<\mathrm{P}(X \le 2m-t_2)<\mathrm{P}(X \le t_3) \Leftrightarrow$
$t_1<2m-t_2<t_3$

$\mathrm{P}(X \ge t)=1-\mathrm{P}(X \le t)$에 의해
$f(x)=1-\mathrm{P}(X \le t)$로 볼 수도 있다.

우주설 수학

Naver ID, 우주설 (포만한)
ORBI ID, 우주설 (오르비)