

대표저자 황보백 송원학원, 랑데뷰수학

집필진

- [김은수 샤인수학학원 010-5687-5722]
- [김효경 수학의 정원 010-6369-6416]
- [박현주 math플래너 010-4113-4018]
- [서영만 다니엘 영수학원 010-9244-0910]
- [오세준 오엠 수학교습소 010-8858-9561]
- [오은경 오은경수학 010-4534-5129]
- [우성근 우성근수학 010-3040-0005]
- [유승희 서울 오름학원 010-5298-1393]
- [이재호 이재호 수학학원 010-4527-1703]
- [이지훈 SY영수학원 010-8598-5284]
- [이태형 가토수학과학학원 gatoms@kakao.com]
- [이현일 이현일수학 010-2681-9501]
- [장선정 오름수학 010-4894-1764]
- [장세완 장선생수학 010-2568-0049]
- [장정보 장정보 수학교습소 010-9504-5938]
- [조필재 샤인수학학원 053-754-3121]
- [조남웅 STM수학학원 010-2024-0707]
- [최성훈 최성훈 수학교습소 010-2680-5281]
- [최재영 세르파 수학교습소 010-2577-4221]
- [최현정 MQ멘토수학 010-2655-9279]
- [한정아 한정아 수학교습소 010-7220-6368]
- [황수영 JS수학연구소 010-6780-8242]

그림 이현일, 최성훈

**[유형 1]**  
**거듭제곱근의 뜻과 성질**

출제유형 | 거듭제곱근의 뜻과 성질을 이용하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 거듭제곱근의 뜻과 성질을 이용하는 문제를 해결한다.

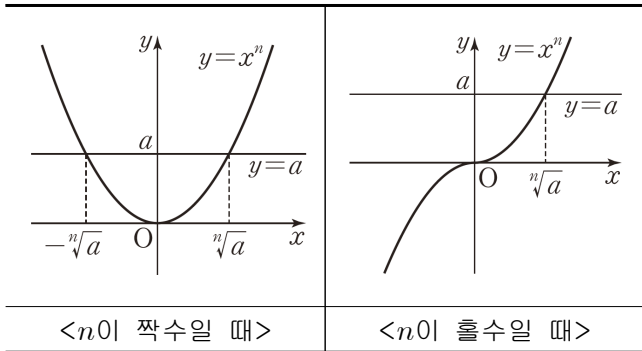
(1) 실수  $a$ 와 2 이상의 자연수  $n$ 에 대하여  $x^n = a$ 를 만족시키는 실수  $x$ , 즉  $a$ 의  $n$ 제곱근 중 실수인 것은 다음과 같다.

①  $n$ 이 짝수인 경우

- $a > 0$ 일 때 :  $\sqrt[n]{a}$ ,  $-\sqrt[n]{a}$ 로 2개다.
- $a = 0$ 일 때 : 0으로 1개다.
- $a < 0$ 일 때 : 없다.

②  $n$ 이 홀수인 경우

$\sqrt[n]{a}$ 로 1개뿐이다.



(2)  $a > 0$ ,  $b > 0$ 이고  $m$ ,  $n$ 이 2 이상의 자연수일 때,

- ①  $\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
- ②  $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$
- ③  $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$
- ④  $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$
- ⑤  $\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$  (단,  $p$ 는 자연수)

1) 2021학년도 6월 평가원

자연수  $n$ 이  $2 \leq n \leq 11$ 일 때,  $-n^2 + 9n - 18$ 의  $n$ 제곱근 중에서 음의 실수가 존재하도록 하는 모든  $n$ 의 값의 합은?

- ① 31                      ② 33                      ③ 35  
④ 37                      ⑤ 39

2)

$\sqrt{25} + \sqrt{\sqrt{81}} + \sqrt{\sqrt{\sqrt{256}}}$ 의 값을 구하시오.

11)

$3^{-2} \times 9^2$ 의 값은?

- ① 3    ② 6    ③ 9    ④ 12    ⑤ 15

12)

$2^{\frac{2}{3}} \times 5^{-\frac{1}{3}} \times 10^{\frac{4}{3}}$ 의 값은?

- ① 18    ② 20    ③ 22    ④ 24    ⑤ 26

13)

$\left(\frac{2\sqrt{5}}{4}\right)^{\sqrt{5}+2}$ 의 값은?

- ①  $\frac{1}{4}$     ②  $\frac{1}{2}$     ③  $\frac{\sqrt{2}}{2}$     ④  $\sqrt{2}$     ⑤ 2

**[유형 5]**  
**로그의 여러 가지 성질**

출제유형 | 로그의 여러 가지 성질을 이용하여 주어진 식의 값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 로그의 밑의 변환 공식을 포함한 여러 가지 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

$a > 0, a \neq 1$ 이고  $b > 0$ 일 때

①  $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$  (단,  $c > 0, c \neq 1$ )

②  $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$  (단,  $b \neq 1$ )

③  $\log_a b \times \log_b a = 1$  (단,  $b \neq 1$ )

④  $\log_a b \times \log_b c = \log_a c$  (단,  $b \neq 1, c > 0$ )

34) 2021학년도 6월 평가원

두 양수  $a, b$ 에 대하여 좌표평면 위의 두 점  $(2, \log_4 a), (3, \log_2 b)$ 를 지나는 직선이 원점을 지날 때,  $\log_a b$ 의 값은? (단,  $a \neq 1$ )

- ①  $\frac{1}{4}$                       ②  $\frac{1}{2}$                       ③  $\frac{3}{4}$   
④ 1                              ⑤  $\frac{5}{4}$

35) 2020학년도 6월 평가원

$\log_2 5 = a, \log_5 3 = b$ 일 때,  $\log_5 12$ 를  $a, b$ 로 옳게 나타낸 것은?

- ①  $\frac{1}{a} + b$                       ②  $\frac{2}{a} + b$                       ③  $\frac{1}{a} + 2b$   
④  $a + \frac{1}{b}$                       ⑤  $2a + \frac{1}{b}$

**[유형 7]**  
**지수함수의 그래프**

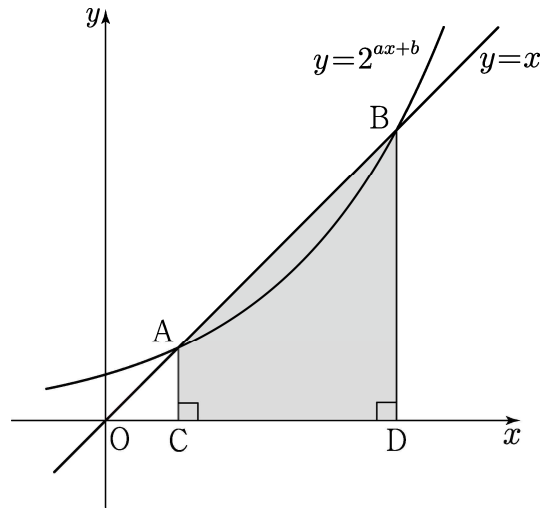
출제유형 | 지수함수의 성질과 그 그래프의 특징을 이해하고 있는지를 묻는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 지수함수의 밑의 범위에 따른 지수함수의 증가와 감소, 지수함수의 그래프의 점근선, 평행이동과 대칭이동을 이해하여 문제를 해결한다.

50) 2021학년도 9월 평가원

곡선  $y=2^{ax+b}$ 과 직선  $y=x$ 가 서로 다른 두 점 A, B에서 만날 때, 두 점 A, B에서  $x$ 축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자.  $\overline{AB}=6\sqrt{2}$ 이고 사각형 ACDB의 넓이가 30일 때,  $a+b$ 의 값은?

- ①  $\frac{1}{6}$
- ②  $\frac{1}{3}$
- ③  $\frac{1}{2}$
- ④  $\frac{2}{3}$
- ⑤  $\frac{5}{6}$



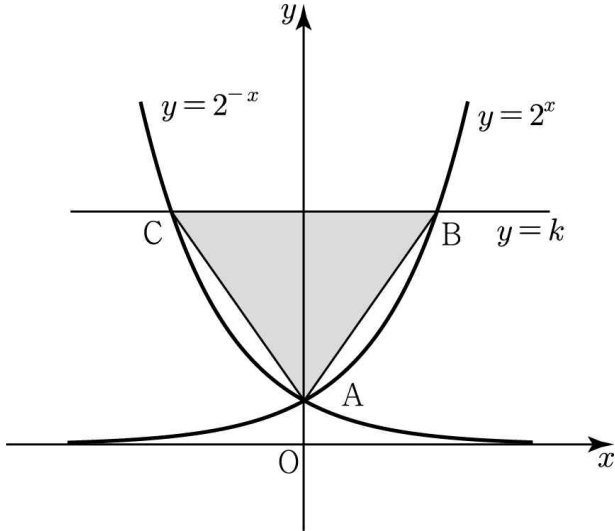
51) 2019학년도 9월 평가원

함수  $f(x) = -2^{4-3x} + k$ 의 그래프가 제2사분면을 지나지 않도록 하는 자연수  $k$ 의 최댓값은?

- ① 10
- ② 12
- ③ 14
- ④ 16
- ⑤ 18

66)

그림과 같이 두 곡선  $y=2^x$ ,  $y=2^{-x}$ 가 만나는 점을 A라 하고, 직선  $y=k(k>1)$ 이 두 곡선과 만나는 점을 각각 B, C라 하자. 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가  $(0, 3)$ 일 때, 삼각형 ABC의 넓이는?



- ① 4      ② 6      ③ 8      ④ 10      ⑤ 12

67)

함수  $y=3^{x+a}+b$ 의 그래프는 점  $(0,10)$ 을 지나고, 치역이  $\{y|y>1\}$ 일 때,  $a+b$ 의 값을 구하시오. (단,  $a, b$ 는 상수이다.)

68)

두 곡선  $y=a^{x+3}$ ,  $y=a^x+b$ 가 직선  $2x+y-5=0$ 과 각각 한 점에서 만나고, 이 두 점 사이의 거리가 실수  $a$ 의 값에 관계없이  $3\sqrt{5}$ 으로 일정할 때, 상수  $b$ 의 값은?(단,  $a>0, b<0$ )

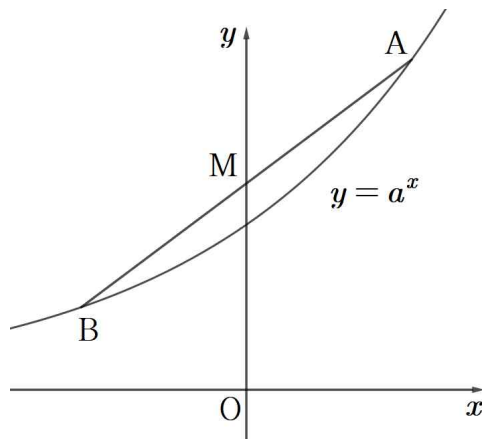
- ① -6    ② -5    ③ -4    ④ -3    ⑤ -2

69)

그림과 같이 함수  $y=a^x (a>1)$ 의 그래프 위의 서로 다른 두 점 A, B가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 선분 AB의 중점 M은  $y$ 축 위에 있다.  
 (나) 두 직선 OA, OB는 서로 수직이다.

선분 AB의 길이가  $\frac{5}{2}$ 일 때,  $a$ 의 값은? (단, O는 원점이다.)



- ①  $\frac{3}{2}$       ②  $\frac{5}{3}$       ③  $\frac{11}{6}$   
 ④ 2      ⑤  $\frac{13}{6}$

**[유형 9]**  
**로그함수와 그 그래프**

출제유형 | 로그함수의 성질과 그 그래프의 특징을 이해하고 있는지를 묻는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 로그함수의 밑의 범위에 따른 로그함수의 증가와 감소, 로그함수의 그래프의 점근선, 평행이동과 대칭이동의 성질을 이해하여 문제를 해결한다.

90) 2021학년도 11월 수능

$\frac{1}{4} < a < 1$ 인 실수  $a$ 에 대하여 직선  $y=10$ 이 두 곡선  $y=\log_a x$ ,  $y=\log_{4a} x$ 와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선  $y=-10$ 이 두 곡선  $y=\log_a x, y=\log_{4a} x$ 와 만나는 점을 각각 C, D라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

— | 보 기 | —

- ㄱ. 선분 AB를 1:4로 외분하는 점의 좌표는 (0, 1)이다.
- ㄴ. 사각형 ABCD가 직사각형이면  $a = \frac{1}{2}$ 이다.
- ㄷ.  $\overline{AB} < \overline{CD}$ 이면  $\frac{1}{2} < a < 1$ 이다.

- ① ㄱ
- ② ㄷ
- ③ ㄱ, ㄴ
- ④ ㄴ, ㄷ
- ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

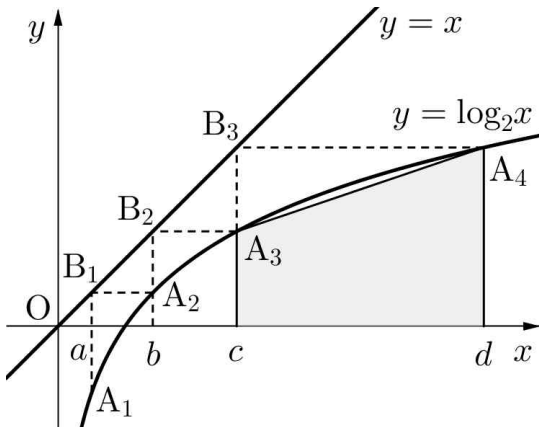
91) 2017학년도 9월 평가원

곡선  $y=\log_2(x+5)$ 의 점근선이 직선  $x=k$ 이다.  $k^2$ 의 값을 구하시오.(단,  $k$ 는 상수이다.)

100) 2010학년도 6월 평가원

그림과 같이 함수  $y = \log_2 x$ 의 그래프 위의 한 점  $A_1$ 에서  $y$ 축에 평행한 직선을 그어 직선  $y = x$ 와 만나는 점을  $B_1$ 이라 하고, 점  $B_1$ 에서  $x$ 축에 평행한 직선을 그어 이 그래프와 만나는 점을  $A_2$ 라 하자. 이와 같은 과정을 반복하여 점  $A_2$ 로부터 점  $B_2$ 와 점  $A_3$ 을, 점  $A_3$ 으로부터 점  $B_3$ 와 점  $A_4$ 를 얻는다. 네 점  $A_1, A_2, A_3, A_4$ 의  $x$ 좌표를 차례로  $a, b, c, d$ 라 하자.

네 점  $(c, 0), (d, 0), (d, \log_2 d), (c, \log_2 c)$ 를 꼭짓점으로 하는 사각형의 넓이를 함수  $f(x) = 2^x$ 을 이용하여  $a, b$ 로 나타낸 것과 같은 것은?

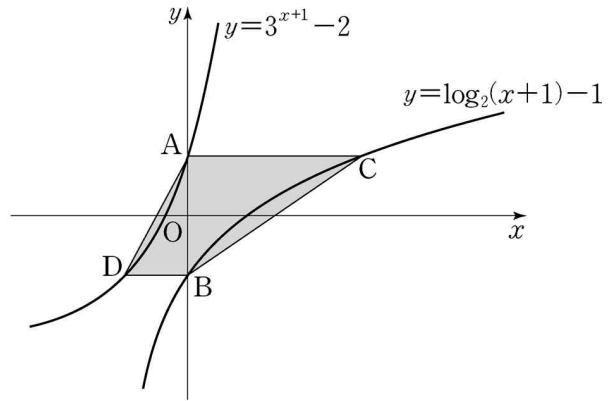


- ①  $\frac{1}{2} \{f(b) + f(a)\} \{(f \circ f)(b) - (f \circ f)(a)\}$
- ②  $\frac{1}{2} \{f(b) - f(a)\} \{(f \circ f)(b) + (f \circ f)(a)\}$
- ③  $\{f(b) + f(a)\} \{(f \circ f)(b) + (f \circ f)(a)\}$
- ④  $\{f(b) + f(a)\} \{(f \circ f)(b) - (f \circ f)(a)\}$
- ⑤  $\{f(b) - f(a)\} \{(f \circ f)(b) + (f \circ f)(a)\}$

101) 2015학년도 9월 평가원

그림과 같이 두 곡선

$y = 3^{x+1} - 2, y = \log_2(x+1) - 1$ 이  $y$ 축과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 점 A를 지나고  $x$ 축에 평행한 직선이 곡선  $y = \log_2(x+1) - 1$ 과 만나는 점을 C, 점 B를 지나고  $x$ 축에 평행한 직선이 곡선  $y = 3^{x+1} - 2$ 와 만나는 점을 D라 할 때, 사각형 ADBC의 넓이는?

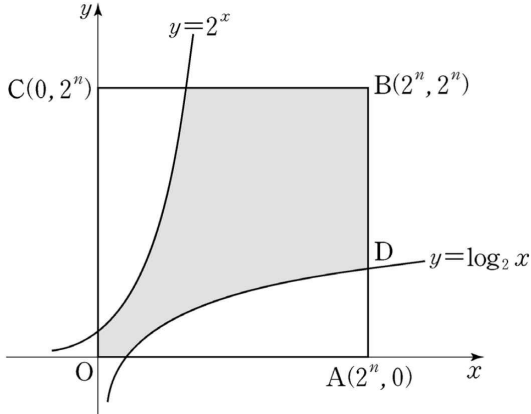


- ① 3    ②  $\frac{13}{4}$     ③  $\frac{7}{2}$     ④  $\frac{15}{4}$     ⑤ 4



102) 2014학년도 9월 평가원

좌표평면에서 꼭짓점의 좌표가  $O(0, 0)$ ,  $A(2^n, 0)$ ,  $B(2^n, 2^n)$ ,  $C(0, 2^n)$  인 정사각형  $OABC$  와 두 곡선  $y=2^x$ ,  $y=\log_2 x$  에 대하여 다음 물음에 답하시오. (단,  $n$  은 자연수이다.)

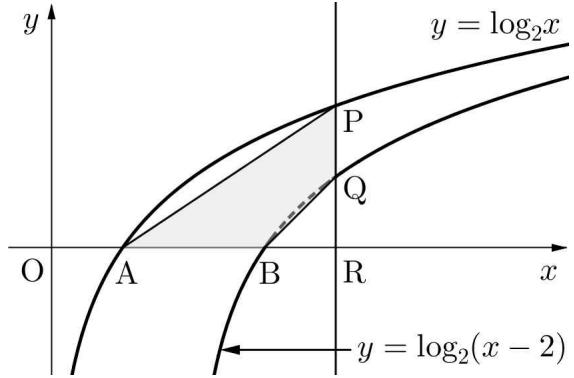


선분  $AB$  가 곡선  $y=\log_2 x$  와 만나는 점을  $D$  라 하자. 선분  $AD$  를  $2 : 3$  으로 내분하는 점을 지나고  $y$  축에 수직인 직선이 곡선  $y=\log_2 x$  와 만나는 점을  $E$ , 점  $E$  를 지나고  $x$  축에 수직인 직선이 곡선  $y=2^x$  과 만나는 점을  $F$  라 하자. 점  $F$  의  $y$  좌표가  $16$  일 때, 직선  $DF$  의 기울기는?

- ①  $-\frac{13}{28}$    ②  $-\frac{25}{56}$    ③  $-\frac{3}{7}$    ④  $-\frac{23}{56}$    ⑤  $-\frac{11}{28}$

103) 2016학년도 9월 평가원

그림과 같이 두 함수  $y = \log_2 x$ ,  $y = \log_2(x-2)$  의 그래프가  $x$  축과 만나는 점을 각각  $A, B$  라 하자. 직선  $x = k$  ( $k > 0$ ) 이 두 함수  $y = \log_2 x$ ,  $y = \log_2(x-2)$  의 그래프와 만나는 점을 각각  $P, Q$  라 하고,  $x$  축과 만나는 점을  $R$  라 하자. 점  $Q$  가 선분  $PR$  의 중점일 때, 사각형  $ABQP$  의 넓이는?



- ①  $\frac{3}{2}$    ②  $2$    ③  $\frac{5}{2}$    ④  $3$    ⑤  $\frac{7}{2}$

104)

함수  $y = \log_{\frac{1}{2}}(2-x) + 1$  의 그래프의 점근선과 직선  $y = x + 4$  이 만나는 점의 좌표가  $(a, b)$  일 때,  $a + b$  의 값은?

- ①  $2$    ②  $4$    ③  $6$   
④  $8$    ⑤  $10$

## 지수-로그함수 단원평가

169)

4의 네제곱근 중 양의 실수인 것을  $a$ ,  $k$ 의 여섯 제곱근 중 양의 실수인 것을  $b$ , 7의 세제곱근 중 실수인 것을  $c$ 라 하자.  $a < b < c$ 가 성립하도록 하는 자연수  $k$ 의 개수는?

- ① 35    ② 40    ③ 45    ④ 50    ⑤ 55

170)

$\sqrt[3]{125} \times 27^{\frac{1}{3}} \times \sqrt[5]{32}$ 의 값은?

- ① 10                  ② 15                  ③ 25  
④ 30                  ⑤ 40

171)

$x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}} = \sqrt{3}$ 일 때,

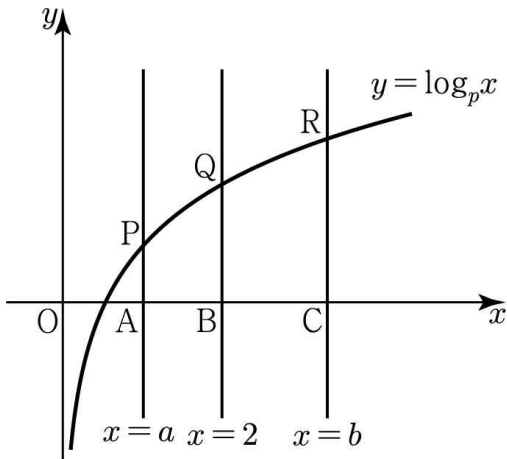
$(5 - x^{\frac{2}{3}})(5 - x^{-\frac{2}{3}}) + (x^{\frac{1}{3}} - x^{-\frac{1}{3}})^2$ 의 값을 구하시오.

172)

$(\sqrt[3]{\sqrt[2]{\sqrt[4]{8}}})^n$ 이 자연수가 되도록 하는 자연수  $n$ 의 최솟값을 구하시오.

193)

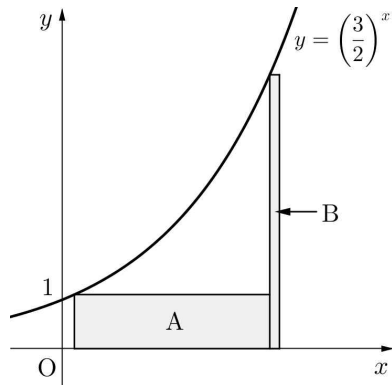
그림과 같이 좌표평면에서 세 직선  $x=a$ ,  $x=2$ ,  $x=b$  ( $0 < a < 2 < b$ )가  $x$ 축과 만나는 점을 각각 A, B, C라 하고 곡선  $y = \log_p x$  ( $p > 1$ )과 만나는 점을 각각 P, Q, R라 하자.  $\overline{AP} + \overline{BQ} = \overline{CR}$ 일 때,  $a + \frac{4}{b}$ 의 최솟값은?



- ①  $2\sqrt{2}$    ② 3   ③  $\sqrt{10}$    ④  $2\sqrt{3}$    ⑤ 4

194)

그림과 같이 함수  $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ 의 그래프 위의 두 점을 각각 한 꼭짓점으로 하는 두 직사각형 A, B가 있다. 직사각형 A의 가로 길이가 4일 때, 직사각형 A의 넓이가 직사각형 B의 넓이의 4배가 된다고 한다. 이때, 직사각형 B의 가로 길이는?(단, 두 직사각형의 한 변은  $x$ 축 위에 놓여 있고, 한 꼭짓점을 공유한다.)



- ①  $\frac{4}{9}$    ②  $\frac{4}{27}$    ③  $\frac{8}{27}$    ④  $\frac{8}{81}$    ⑤  $\frac{16}{81}$

195)

함수  $y = 2^x$ 의 그래프를  $x$ 축의 방향으로  $m$ 만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 함수를  $y = f(x)$ 라 하자. 함수  $y = f(x)$ 의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점 중 한 점의  $x$ 좌표가 16일 때, 실수  $m$ 의 값은?

- ① 12   ② 13   ③ 14   ④ 15   ⑤ 16

**[유형 3]**  
**삼각함수의 그래프**

출제유형 | 삼각함수  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ ,  $y = \tan x$ 의 그래프의 성질을 이용하여 조건을 만족시키는 상수의 값이나 삼각함수의 값을 구하는 문제가 출제된다.

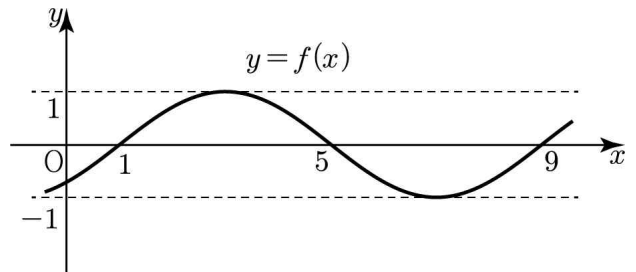
출제유형잡기 | 삼각함수의 그래프에서 삼각함수의 값, 주기, 최댓값과 최솟값, 그래프가 지나가는 점을 이용하여 조건을 만족시키는 상수의 값이나 삼각함수의 값을 구하는 문제를 해결한다.

228) 2004학년도 9월 평가원

$0 \leq x \leq 2\pi$  일 때, 두 함수  $y = \sin 2x$  와  $y = \cos 3x$  의 그래프의 교점의 개수를 구하시오.

229) 2004학년도 6월 평가원

다음은  $f(x) = \sin(ax+b)$  의 그래프이다.



이때,  $f(0)$  의 값은? (단,  $a > 0$ )

- ①  $-\frac{1}{2}$       ②  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$       ③  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$   
 ④  $-\frac{\sqrt{2}}{4}$       ⑤  $-\frac{\sqrt{3}}{4}$

**[유형 8]**  
**코사인법칙**

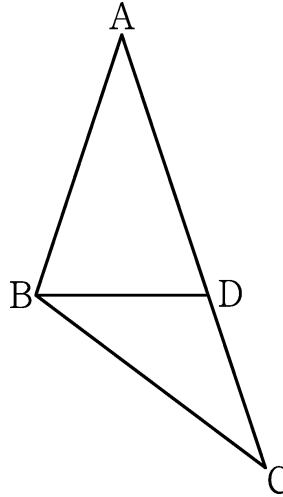
출제유형 | 삼각함수의 성질과 코사인법칙을 이용하여 삼각형의 변의 길이나 각의 크기를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 삼각함수의 성질, 삼각형과 원의 성질 그리고 코사인법칙을 이용하여 삼각형의 변의 길이나 각의 크기를 구하는 문제를 해결한다.

264) 2021학년도 9월 평가원

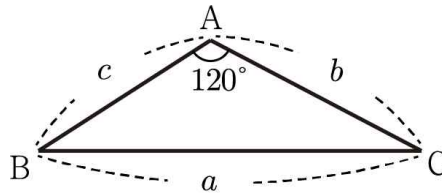
$\overline{AB}=6$ ,  $\overline{AC}=10$ 인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위에 점 D를  $\overline{AB}=\overline{AD}$ 가 되도록 잡는다.

$\overline{BD}=\sqrt{15}$ 일 때, 선분 BC의 길이를  $k$ 라 하자.  $k^2$ 의 값을 구하시오.



265) 1998학년도 11월 수능

삼각형 ABC에서  $b=8$ ,  $c=7$ ,  $\angle A=120^\circ$ 일 때,  $a$ 의 값을 구하시오.

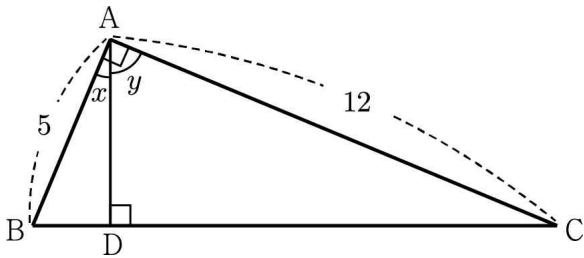


# 삼각함수 단원평가

277)

그림과 같이  $\angle A$ 가 직각인 직각삼각형 ABC에서  $\overline{AB} = 5$ ,  $\overline{AC} = 12$  꼭짓점 A에서 빗변에 내린 수선의 발을 D라 하자.  $\angle BAD = x$ ,  $\angle CAD = y$ 일 때,  $\sin x + \sin y = \frac{q}{p}$ 이다.  $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단,  $p, q$ 는 서로소인 자연수이다.)



278)

$\sin\theta = \frac{4}{5}$ 일 때,  $\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta} \times \frac{1}{\tan\theta}$ 의 값을 구하시오.

(단,  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 이다.)

279)

이차방정식  $6x^2 - 3x - a = 0$ 의 두 근이  $\sin\theta, \cos\theta$ 일 때,  $a$ 의 값은? (단,  $a$ 는 상수이다.)

- ①  $\frac{9}{4}$
- ② 2
- ③  $\frac{7}{4}$
- ④  $\frac{3}{2}$
- ⑤  $\frac{5}{4}$

280)

$\sin\theta + \cos\theta = \frac{4}{3}$ 일 때,  $18 \sin\theta \cos\theta$ 의 값을 구하시오.

363)

수열  $\{a_n\}$ 이

$$\sum_{k=1}^{49} (1 + 2k a_{k+1}) = 149, \quad \sum_{k=1}^{50} (2k + 1) a_k = 160$$

을 만족시킨다,  $\sum_{k=1}^{50} a_k$ 의 값을 구하시오.

364)

$\sum_{k=1}^{100} \sin \frac{k}{3} \pi$ 의 값은?

- ①  $-\frac{3}{2}$       ②  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$       ③ 0  
 ④  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       ⑤  $\frac{3}{2}$

365)

$\sum_{i=1}^{100} \tan \frac{i}{3} \pi$ 의 값은?

- ①  $-\frac{3}{2}$       ②  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$       ③ 0  
 ④  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       ⑤  $\sqrt{3}$

366)

수열  $\{a_n\}$ 에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10} (2a_k + 1)^2 = 42, \quad \sum_{k=1}^{10} a_k (a_k - 1) = 12$$

일 때,  $\sum_{k=1}^{10} (a_k)^2$ 의 값은?

- ① 10    ② 20    ③ -10    ④ -20    ⑤ 0

413) 2014학년도 9월 평가원

모든 항이 양수인 수열  $\{a_n\}$  이  $a_1 = 2$  이고,

$$\log_2 a_{n+1} = 1 + \log_2 a_n \quad (n \geq 1)$$

을 만족시킨다.  $a_1 \times a_2 \times a_3 \times \dots \times a_8 = 2^k$  일 때 상수  $k$  의 값은?

- ① 36    ② 40    ③ 44    ④ 48    ⑤ 52

414) 2018학년도 11월 수능

수열  $\{a_n\}$  은  $a_1 = 2$  이고, 모든 자연수  $n$  에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - 1 & (a_n \text{ 이 짝수인 경우}) \\ a_n + n & (a_n \text{ 이 홀수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다.  $a_7$  의 값은?

- ① 7    ② 9    ③ 11    ④ 13    ⑤ 15

415)

수열  $\{a_n\}$  은  $a_1 = 4$  이고, 모든 자연수  $n$  에 대하여  $(n+3)a_{n+1} = na_n$  을 만족시킬 때,  $a_5$  의 값은?

- ①  $\frac{1}{35}$     ②  $\frac{2}{35}$     ③  $\frac{3}{35}$   
 ④  $\frac{4}{35}$     ⑤  $\frac{1}{7}$

416)

함수  $f(x) = \log_2 x$  에 대하여  $a_1 = 1$  이고 모든 항이 양수인 수열  $\{a_n\}$  은  $f^{-1}(a_{n+1}) - f^{-1}(a_n) = 2$  을 만족시킨다. 방정식  $f(x) = a_n$  의 해를  $b_n$  이라 할 때,

$$\sum_{n=1}^{10} b_n \text{ 의 값을 구하시오.}$$



**[유형 11]**  
**수학적 귀납법**

출제유형 | 수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명하는 과정에서 빈칸에 알맞은 수나 식을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 주어진 명제를 수학적 귀납법으로 증명하는 과정에서 앞과 뒤의 관계를 파악하여 빈칸에 알맞은 수나 식을 구한다.

자연수  $n$ 에 대한 명제  $p(n)$ 이 모든 자연수  $n$ 에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

- (i)  $n=1$ 일 때, 명제  $p(n)$ 이 성립한다.
- (ii)  $n=k$ 일 때, 명제  $p(n)$ 이 성립한다고 가정하면  $n=k+1$ 일 때도 명제  $p(n)$ 이 성립한다.

419) 2012학년도 6월 평가원

수열  $\{a_n\}$ 은  $a_1=1$  이고

$$a_{n+1} = \sum_{k=1}^n 2^{n-k} a_k \quad (n \geq 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항  $a_n$ 을 구하는 과정이다.

주어진 식으로부터  $a_2 = \boxed{\text{(가)}}$  이다.

자연수  $n$ 에 대하여

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= \sum_{k=1}^{n+1} 2^{n+1-k} a_k \\ &= \sum_{k=1}^n 2^{n+1-k} a_k + a_{n+1} \\ &= \boxed{\text{(나)}} \sum_{k=1}^n 2^{n-k} a_k + a_{n+1} \\ &= \boxed{\text{(다)}} a_{n+1} \end{aligned}$$

이다.

따라서  $a_1=1$  이고,  $n \geq 2$  일 때

$$a_n = (\boxed{\text{(다)}})^{n-2} \text{ 이다.}$$

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각  $p, q, r$  라 할 때,  $p+q+r$ 의 값은?

- ① 3    ② 4    ③ 5    ④ 6    ⑤ 7

1) 정답 ①

(i)  $n$ 이 홀수 일 때,

$$x^n = -n^2 + 9n - 18 \text{에서}$$

$x = \sqrt[n]{-n^2 + 9n - 18}$ 의 값이 음의 실수가 되기 위해서는

$$-n^2 + 9n - 18 < 0 \text{이면 된다.}$$

$$n^2 - 9n + 18 > 0$$

$$(n-3)(n-6) > 0$$

$$n < 3 \text{ 또는 } n > 6$$

에서 만족하는 홀수는 7, 9, 11이다.

(ii)  $n$ 이 짝수 일 때,

$$x^n = -n^2 + 9n - 18 \text{에서}$$

$x = \pm \sqrt[n]{-n^2 + 9n - 18}$ 의 값이 존재하기 위해서는

$$-n^2 + 9n - 18 > 0 \text{이면 된다.}$$

$$n^2 - 9n + 18 < 0$$

$$(n-3)(n-6) < 0$$

$$3 < n < 6$$

에서 만족하는 짝수는 4이다.

(i), (ii)에서 만족하는 모든  $n$ 의 합은

$$4 + 7 + 9 + 11 = 31 \text{이다.}$$

2) 정답 10

$$\sqrt{25} + \sqrt{\sqrt{81}} + \sqrt{\sqrt{\sqrt{256}}}$$

$$= \sqrt{5^2} + \sqrt[4]{3^4} + \sqrt[8]{2^8} = 5 + 3 + 2 = 10$$

3) 정답 ②

$$\sqrt{9} \times \sqrt[3]{27} = 3 \times 3 = 9$$

4) 정답 3

-25의 세제곱근 중 실수인 것은

$$x^3 = -25 \text{에서 } x = \sqrt[3]{-25} \text{으로 1개다.}$$

따라서  $a = 1$

$\sqrt{23}$ 의 네제곱근 중 실수인 것은

$$x^4 = \sqrt{23} \text{에서 } x = \pm \sqrt[8]{23} \text{으로 2개다.}$$

따라서  $b = 2$

$$a + b = 3$$

5) 정답 ②

$$\sqrt[3]{2} \times 2^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{2}{3}}$$

$$= 2^{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}}$$

$$= 2^1$$

$$= 2$$

[다른 풀이]

$$\sqrt[3]{2} \times 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2^2}$$

$$= \sqrt[3]{2^3}$$

$$= 2$$

6) 정답 ②

$$(\sqrt{2^3 \sqrt{4}})^3 = \left( \sqrt{2 \cdot 2^{\frac{2}{3}}} \right)^3 = \left( 2^{\frac{5}{6}} \right)^3 = \sqrt{32}$$

이때,  $5 = \sqrt{25} < \sqrt{32} < \sqrt{36} = 6$ 이므로

$(\sqrt{2^3 \sqrt{4}})^3$ 보다 큰 자연수 중 가장 작은 것은 6이다.

7) 정답 ④

$3\sqrt[n]{n^m} = n^{\frac{m}{3}}$ 에서  $n^{\frac{m}{3}}$ 이 자연수가 되는 경우는

$n=1$ 인 경우에  $m=1, 2, 3$

$2 \leq n \leq 7$ 인 경우에  $m=3$

$n=8$ 인 경우에  $m=1, 2, 3$

따라서 순서쌍  $(m, n)$ 의 개수는

$$3 + 6 + 3 = 12$$

8) 정답 30

$$a^6 = 3 \text{에서 } a = 3^{\frac{1}{6}}$$

$$b^5 = 7 \text{에서 } b = 7^{\frac{1}{5}}$$

$$c^2 = 11 \text{에서 } c = 11^{\frac{1}{2}}$$

이므로

$$(abc)^n = \left( 3^{\frac{1}{6}} \cdot 7^{\frac{1}{5}} \cdot 11^{\frac{1}{2}} \right)^n$$

이 때,  $\left( 3^{\frac{1}{6}} \cdot 7^{\frac{1}{5}} \cdot 11^{\frac{1}{2}} \right)^n$ 이 자연수가 되도록 하는 최소의 자연수  $n$ 은 6, 5, 2의 최소공배수이므로 30이다.

438) 정답 40

$$a_{n+1} = \frac{n+3}{n+1} a_n \text{ 에서}$$

$$n=1 \text{ 일 때, } a_2 = \frac{4}{2} a_1 = \frac{4}{2} \times 8 = 16$$

$$n=2 \text{ 일 때, } a_3 = \frac{5}{3} a_2 = \frac{5}{3} \times 16 = \frac{80}{3}$$

$$n=3 \text{ 일 때, } a_4 = \frac{6}{4} a_3 = \frac{6}{4} \times \frac{80}{3} = 40$$

$$\therefore a_4 = 40$$

439) 정답 5

$$a_2 = p - 2$$

$$a_3 = (p - 2) + 4 = p + 2$$

$$a_4 = (p + 2) - 6 = p - 4$$

$$a_5 = (p - 4) + 8 = p + 4$$

$$a_6 = (p + 4) - 10 = p - 6$$

따라서 수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제6항까지의 합은  
 $p + (p - 2) + (p + 2) + (p - 4) + (p + 4) + (p - 6) = 6p - 6$   
 $6p - 6 = 24$ 에서  $p = 5$

440) 정답 ㉓

(i)  $a_1 = 1$ 이므로  $a_1 < 2$ 을 만족시킨다.

(ii)  $n = m$  ( $m \geq 2$ )일 때,  $a_m < 2m^2$ 이 성립한다고 가정하자.

$$a_m < m^2 + \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m-1} a_k \text{ 이므로}$$

$m = 2$ 일 때,  $a_2 < 2^2 + \frac{1}{2} < 8$ 로 성립한다.

$$2(m+1)^2 - a_{m+1}$$

$$> 2(m+1)^2 - \left\{ (m+1)^2 + \frac{1}{m+1} \sum_{k=1}^m a_k \right\} \rightarrow (가)$$

$$= (m+1)^2 - \frac{1}{m+1} \sum_{k=1}^m a_k$$

$$> (m+1)^2 - \frac{1}{m+1} \sum_{k=1}^m 2k^2 \rightarrow (나)$$

$$= (m+1)^2 - \frac{1}{m+1} \times \frac{m(m+1)(2m+1)}{3}$$

$$= (m+1)^2 - \frac{m(2m+1)}{3} \rightarrow (다)$$

$$= \frac{1}{3} m^2 + \frac{5}{3} m + 1 > 0$$

따라서  $n = m + 1$ 일 때도 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수  $n$ 에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

따라서  $f(m) = (m+1)^2$ ,  $g(k) = 2k^2$ ,

$$h(m) = \frac{m(2m+1)}{3} \text{ 이므로}$$

$$f(3) + g(3) + h(3) = 16 + 18 + 7 = 41$$