(2015개정 교육과정)Ver2

실전 개념서

아르코 수학 Ⅰ

arco 지음

"아르코 수학 실전개념서를 소개하겠습니다."
이 책의 목적은 어떻게 하면 좀 더 개념과 문제간의 괴리감을 줄일 수 있을까? 의문에서 출발했습니다. 개념설명을 숙지하고 유형별 문제를 풀더라도 연습문제에서는 풀지 못하는 경우가 많았기 때문입니다. 그래서 단계별 구성과 그에 맞는 적절한 예제를 배치한 것이 아니라 단계별 확인이 아닌 개념, 예제, 개념check, 개념연습, 실력연습문제 문항의 구성에 일정 난이도를 유지하게 했으며 일정 난이도를 유지할 때 발생될 수 있는 문제에 대한 이해도를 높이기 위해서 '개념길잡이'라는 것을 예제 밑에 배치하여 개념, 예제 내용에서 발생할 수 있는 추가 의문점을 해결하게 했습니다. 물론 단원 별 특징에 따라 '개념길잡이' 멘트에 차이는 있겠지만 되도록 연습문제를 접하게 됐을 때, 문제에 대해 접근을 못하는 것을 줄이기 위해 노력했습니다. 또한 단순 개념 확인의 선택형 문제를 제와한 전 문항을 주관식으로 구성하였습니다. 그리고 해설의 경우도 답에 도출에 있어서 상세히 기술하여 중간에서 막히는 일이 없도록 했으며, 예제 및 개념체크, 개념연습, 실력연습에서의 해설은 단순계산도 친절하게 하려고 했습니다. 개념에 대한 설명에 있어서도 방정식이라도 그래프적인 설명이 필요한 경우 추가 설명을 하여 방정식을 통해 이미지가 그려지도록 하려 했습니다.

◆ [개념길잡이 예제] 80문제
[기본확인 문제] 96문제
[기본check 문제] 134문제
[개념연습 문제] 165문제 (내신 3등급 이상 난이도)
[실력연습 문제] 45문제 (내신고정 1등급 난이도)
총 520문제 (주관식)

◆ 교재활용 팁
기본개념(개정 교과서)과 문제 적용, 유형별 접근법이 필요한 경우 정리를 했으며, 특히 그래프(지오지브라를 바탕으로 실제 값에 가까운 이미지)를 활용하여 개념에 대한 이해도를 높이려 했습니다.

◆ 내신 실전 대비
[기본 확인 문제] 교과서 예제 확인용
[1단계]개념길잡이 예제+ 개념CHECK ==> 개념 및 유형에 대해 부족할 시
[2단계] 개념연습+ 실력연습 ==> 실전 내신 및 상위 등급 내신 맞보기 연습용

◆ 수능 개념 및 실전대비
개념길잡이 예제 ==> 개념check ==> 개념연습 ==> 실력연습

[목차]

Ⅰ. 지수함수와 로그함수

Ⅰ. 지수함수와 로그함수
01 지수

1. 거듭제곱이란

실수 a 와 양의 정수 n 에 대하여 a를 n번 곱한 것 $a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n\text{개}}$ 을 a의 n제곱이라 하고, $\boldsymbol{a^n}$으로 나타낸다.

$$\underset{\text{밑}}{a}^{\overset{\text{지수}}{n}}$$

이때 a^1, a^2, a^3, $\cdots$ 을 통틀어 a의 **거듭제곱**이라 한다.

a^n 에서 $\boldsymbol{a}$를 거듭제곱의 밑, $\boldsymbol{n}$ 을 거듭제곱의 지수라고 한다.

지수법칙을 정리하면 a, b가 임의의 실수이고, m, n이 양의 정수일 때, 다음과 같다.

① $a^m a^n = a^{m+n}$　　② $(a^m)^n = (a^n)^m = a^{mn}$

③ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ (단, $b \neq 0$)

④ $a^m \div a^n = \begin{cases} a^{m-n} & (m>n) \\ 1 & (m=n)\ (\text{단, } a \neq 0) \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & (m<n) \end{cases}$

또한 $a^m \div a^n = a^m \times \dfrac{1}{a^n}$에서 $a \neq 0$이고, $m > n$이면 $a^0 \times a^{-1} = 1 \times \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{a}$의 꼴과 $m < n$일 때 $a^{-1} \times a^0 = a^{-1} \times 1 = \dfrac{1}{a}$의 꼴은 같습니다. 그런데 $m > 0$이면 $a^1 \times a^0 = a$이고, $m \neq n$인 $a^1 \times a^{-2} = a^{1-2} = a^{-1} = \dfrac{1}{a}$이 됨을 알 수 있습니다. (정수 지수로의 확장에서 확인할 수 있다.)

2. 거듭제곱근이란

제곱하여 실수 a가 되는 수, 즉 $x^2 = a$인 x를 a의 제곱근이라 하고, 세제곱하여 a가 되는 수를 a의 세제곱근,⋯⋯이라하고, a의 제곱근, 세제곱근, $\cdots$ 을 통틀어 a**의 거듭제곱근**이라 한다.

$$\underset{a\text{의 }n\text{제곱근}}{x}^n = \overset{x\text{의 }n\text{제곱}}{a}$$

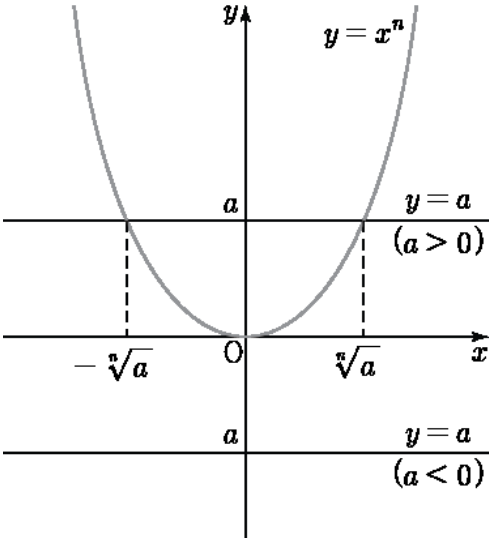
a 의 n 제곱근은 $x^n = a$를 만족시키는 n**차 방정식**임을 알 수 있다.
위의 방정식은 실수 a의 n제곱근은 복소수 범위에서 반드시 n개 존재함이 알려져 있다.
예를 들면 1의 네제곱근을 x라 하면 x는 방정식 $1 = x^4$의 근이다.

$x^4-1=0$에서 $(x^2+1)(x^2-1)=0$, $(x^2+1)(x-1)(x+1)=0$이므로 $x=\pm 1$, $x=\pm i$이고. 이 중 실수인 것은 1과 -1이고 허수인 것은 i과 $-i$임을 알 수 있다.
즉, 복소수의 범위에서 1의 네제곱근은 4개의 해를 갖는다.

일반적으로 n을 $n \geqq 2$인 정수라 할 때, 실수 a에 대하여 방정식$x^n=a$의 해를 a의 n제곱근이라 한다.
n $(n=2,\ 3,\ 4,\ 5,\cdots)$ 번 곱해서 실수 a가 되는 수 x 를 a 의 n 제곱근이라 한다.
특히 실수 a의 n제곱근 중에서 실수인 것은 방정식 $x^n=a$의 실근이므로 함수 $y=x^n$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표와 같다.

함수 $y=x^n$의 그래프를 이용하여 a의 n제곱근 중에서 실수인 것을 구해보면 다음과 같다.
실수 개수를 셀 때에는 n이 짝수인지 n이 홀수 인지와 a 값의 부호에 따라 개수가 다르게 나타남에 주의한다.

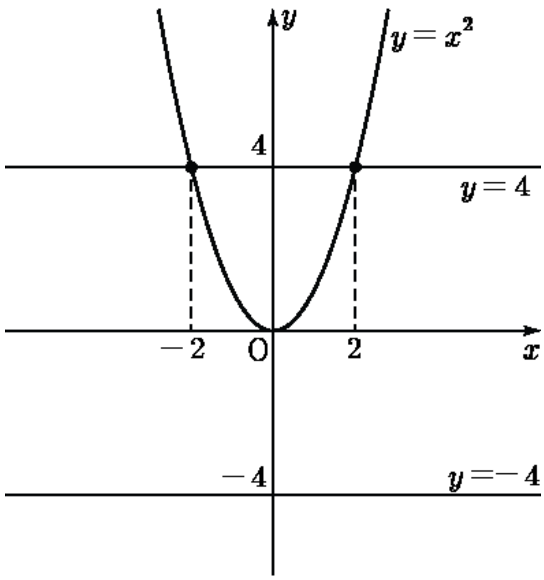
함수 $y=x^n$(n은 양의 정수)의 그래프
① n이 짝수일 때 $(-x)^n=x^n$이므로 y축에 대하여 대칭이다.



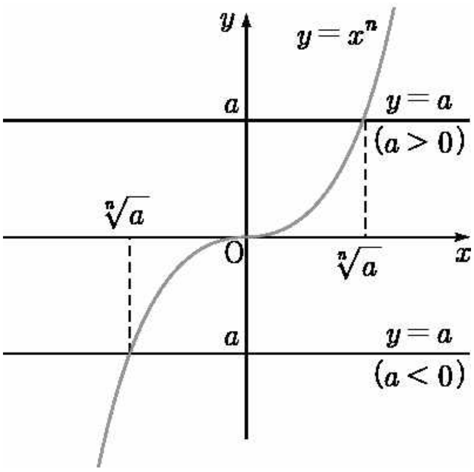
$$n\ :\ \text{짝수}\begin{cases} a>0\ :\ \pm\sqrt[n]{a}\ \text{로 두 개} \\ a=0\ :\ 0\text{만 존재하므로 한 개} \\ a<0\ :\ \text{존재하지 않는다.} \end{cases}$$

$a>0$이면 실수인 것은 교점이 두 개이고, 양의 n제곱근 $\sqrt[n]{a}$, 음의 n제곱근 $-\sqrt[n]{a}$으로 나타낸다.

$a=0$이면 $y=a$와의 교점이 한 개이고, a의 n제곱근 중에서 실수인 것은 0
$a<0$이면 교점이 없으므로 a의 n제곱근 중에서 실수인 것은 존재하지 않는다.
예를 들면 4의 제곱근은 $x^2=4$을 만족시키는 수 2, -2이다.



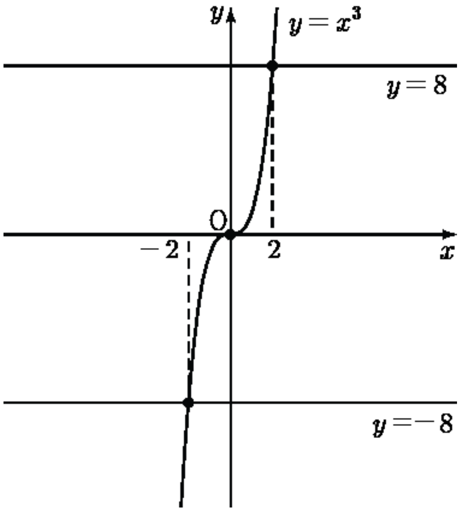
② n이 홀수일 때 $(-x)^n = -x^n$이므로 원점에 대하여 대칭이다.



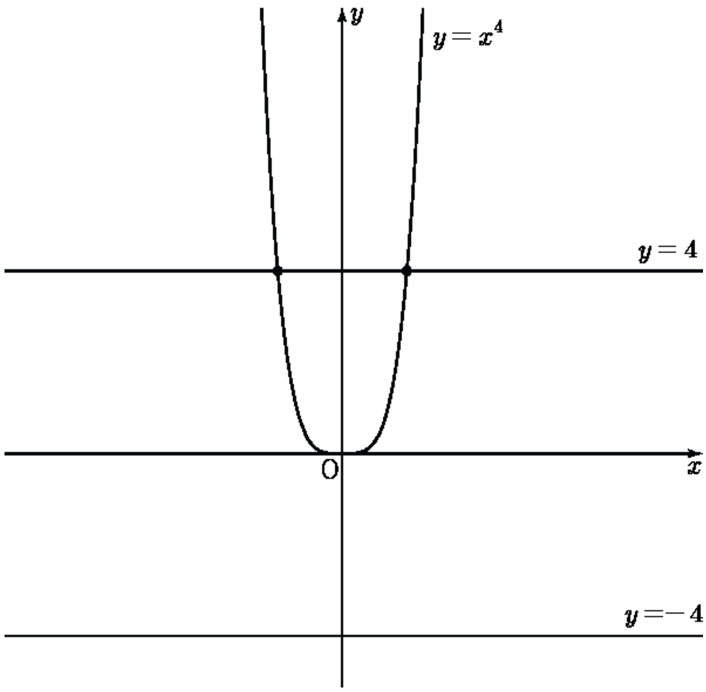
$$n \ : \ \text{홀수} \begin{cases} a > 0 \ : \ \sqrt[n]{a} \text{ 로 한 개} \\ a = 0 \ : \ 0\text{만 존재하므로 한 개} \\ a < 0 \ : \ \sqrt[n]{a} \text{ 로 한 개} \end{cases}$$

$y = x^n$과 $y = a$와의 교점의 개수는 a의 값에 관계없이 항상 한 개만 존재함을 그래프를 통해 확인할 수 있다. 즉, a의 n제곱근 중에서 실수인 것은 오직 하나만 존재하고, 이것을 기호로 $\sqrt[n]{a}$와 같이 나타낸다.

예를 들면 -8의 세제곱근은 $x^3 = -8$을 만족시키는 수는 모두 세 개이며, 이 중 실수인 것은 -2이다. 그렇기 때문에 -8의 세제곱근은 -2로 단정 지으면 틀리게 된다.



또한 -4의 네제곱근은 $x^4 = -4$에서 실수인 것은 $-\sqrt[4]{4}$라고 하면 틀린다. 교점이 존재하지 않기 때문에 실수는 존재하지 않는다.



3. 주의해야 되는 지수의 형태들

(1) a의 n제곱근과 n제곱근 a의 차이

실수 a의 n제곱근은 $x^n = a$ 가 되는 x 의 값 (n개의 해)을 뜻한다.

n제곱근 a는 $\sqrt[n]{a}$로 a의 n제곱근 중 하나이다.

(2) $(\sqrt[n]{a})^n$, $(\sqrt[n]{a^n})$의 차이

$(\sqrt[n]{a})^n$는 거듭제곱근의 정의에 따라 n이 홀수이든 짝수이든 a가 된다.

하지만 $(\sqrt[n]{a^n})$는 n이 홀수라면 a가 되지만 n이 짝수라면 $|a|$로 나온다.

n이 홀수라면 두 식은 차이가 없고 n이 짝수면 차이가 난다.

그 이유는 $(\sqrt[n]{a})^n$가 정의되기 위해선 n이 짝수 일 때는 $a \geq 0$ 인 조건이 이미 적용되

어 있기에 음수가 나타나지 않는 반면, a^n은 n이 짝수이면 a가 음수여도 항상 양수 값을 의미하기 때문에 양수로 바꾼 후 계산을 해주거나 계산 후 절댓값을 씌워주어야 한다.

4. 거듭제곱근의 성질

$a>0$, $b>0$이고 m, n이2 이상의 자연수 일 때 거듭제곱근에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $(\sqrt[n]{a})^n = a$	(2) $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$
(3) $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$	(4) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$
(5) $(\sqrt[n]{a^m}) = \sqrt[np]{a^{mp}}$ (단, p : 자연수)	
(6) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$	

(1) $(\sqrt[n]{a})^n$는 a의 양의 n제곱근 이므로 $(\sqrt[n]{a})^n = a$이다.

(2) $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$

$\{(\sqrt[n]{a})^m\}^n = (\sqrt[n]{a})^{mn} = \{(\sqrt[n]{a})^n\}^m = a^m$

이 때 $(\sqrt[n]{a})^m > 0$이므로 $(\sqrt[n]{a})^m$은 양수 a^m의 양의 n제곱근이다.

따라서 $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$ 이다.

(3) $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

$\sqrt[n]{a} > 0$, $\sqrt[n]{b} > 0$ 이므로 $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} > 0$

따라서 $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$는 ab의 양의 n제곱근이므로 $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ 이다.

(4) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n} = \frac{a}{b}$$

이때 $\sqrt[n]{a} > 0$, $\sqrt[n]{b} > 0$에서 $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} > 0$이므로 $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$는 $\dfrac{a}{b}$의 양의 n제곱근이다.

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

(5) $(\sqrt[n]{a^m}) = \sqrt[np]{a^{mp}}$ (단, p : 자연수)

$(\sqrt[n]{a^m})^{np} = \{(\sqrt[n]{a^m})^n\}^p = (a^m)^p = a^{mp}$이고 $\sqrt[n]{a^m} > 0$이므로

$\sqrt[n]{a^m}$은 양수 a^{mp}의 양의 np제곱근이다.

따라서 $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}} \Leftrightarrow \sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$ 이다.

(6) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

$(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}})^{mn} = \{(\sqrt[m]{\sqrt{a}})^m\}^n = (\sqrt[n]{a})^n = a$

이때 $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} > 0$이므로 $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$는 양수 a의 양의 mn제곱근이다.

따라서 $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ 이다.

[참고] 거듭제곱 꼴의 대소 비교 판정

$a > 0$, $b > 0$일 때, $a > b$이면 $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$이고, $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$이면 $a > b$이 성립한다.

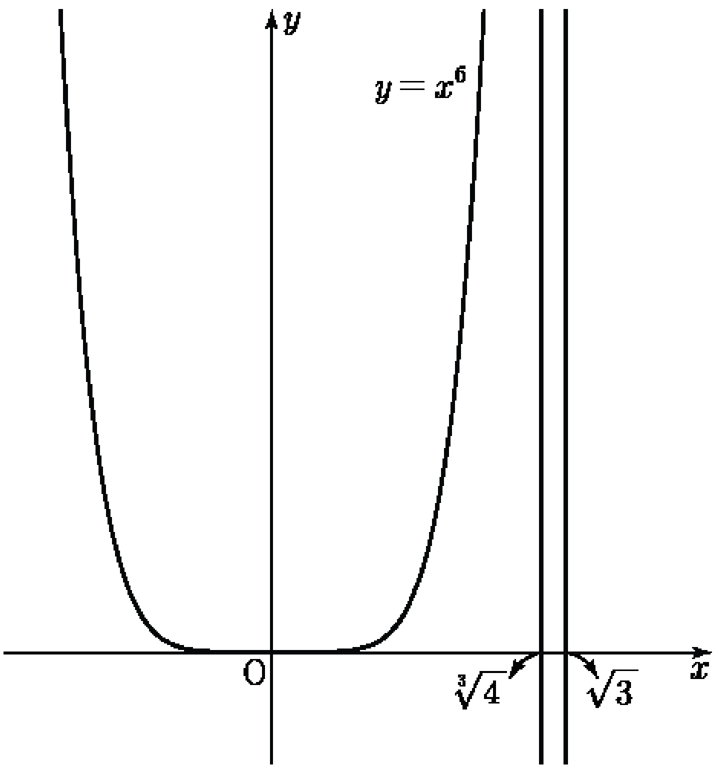
a는 밑이 a이고 지수가 1이므로 $a^1 = a$임을 알 수 있다.

즉, $a^1 > b^1$이면 거듭제곱의 성질에 의해 $\sqrt[n\times 1]{a^1} > \sqrt[n\times 1]{b^1}$이고, $\sqrt[n\times 1]{a^1} > \sqrt[n\times 1]{b^1}$이면 $a^1 > b^1$이 성립함을 확인할 수 있다.

예를 들면 $\sqrt{3}$과 $\sqrt[3]{4}$의 대소를 비교하면

$\sqrt{3} = \sqrt[2\times 3]{3^3} = \sqrt[6]{27}$이고 $\sqrt[3]{4} = \sqrt[3\times 2]{4^2} = \sqrt[6]{16}$이므로 $\sqrt[6]{27}$과 $\sqrt[6]{16}$, $27 > 16$임을 알 수 있다.

따라서 $\sqrt{3} > \sqrt[3]{4}$이 성립된다. 이것은 다음과 같이 그래프를 통해서 확인할 수 있다.



기본개념 확인 : 교과 필수예제 Level

1. 다음 거듭제곱근을 구하시오.

(1) -16의 제곱근

(2) -27의 세제곱근

(3) 1의 네제곱근

(4) 625의 네제곱근

2. 다음 거듭제곱근 중에서 실수인 것을 고르시오.

(1) 4의 제곱근

(2) $\frac{4}{25}$의 제곱근

(3) -216의 세제곱근

(4) $(-7)^4$의 네제곱근

3. 다음 거듭제곱근 중에서 실수인 것을 고르시오.

(1) $\sqrt[3]{512}$

(2) $\sqrt[5]{-32}$

(3) $\sqrt[4]{0.00256}$

(4) $\sqrt[4]{6561}$

4. 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $\sqrt[3]{12} \times \sqrt[3]{18}$

(2) $\frac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt[4]{3}}$

(3) $(\sqrt[6]{27})^4$

(4) $\sqrt[4]{\sqrt{81}}$

(5) $\sqrt{\sqrt[3]{343}}$

(6) $\sqrt[3]{32} \times \sqrt[4]{625}$

5. 다음은 $a>0$, m, n이 1보다 큰 홀수일 때, $(\sqrt[n]{-a})^m =$ (가) 가 성립함을 증명한 것이다.

‖증명‖
$a>0$, n이 1보다 큰 홀수일 때,
$\sqrt[n]{-a}$ $\boxed{(가)}$ 0이므로 $\sqrt[n]{-a}$는 실수이다.
$\{(\sqrt[n]{-a})^m\}^n = (\sqrt[n]{-a})^{mn} = \{(\sqrt[n]{-a})^n\}^m$
따라서 $(\sqrt[n]{-a})^m$은 $\boxed{(나)}$의 실수인 n제곱근이다.
$\therefore\ (\sqrt[n]{-a})^m = \boxed{(다)}$

위의 증명 과정에서 $\boxed{}$ 안의 (가), (나), (다)에 들어갈 알맞은 것을 차례로 쓰시오.

(가) ____________________

(나) ____________________

(다) ____________________

(길잡이 예제1) 거듭제곱근의 뜻

다음 중 옳은 것을 모두 고르시오.

‖ 보기 ‖

㉠ 8의 세제곱근 중 실수인 것은 1개이다.
㉡ $\sqrt{256}$의 네제곱근은 ± 2이다.
㉢ n이 홀수 일 때, 5의 n제곱근 중 실수인 것은 1개이다.
㉣ 세제곱근 27은 3이다.
㉤ $x^4=5$ 를 만족하는 x 는 $y=x^4$ 와 $y=5$ 의 교점의 x좌표와 같다.

[풀이] ㉠ 8의 세제곱근을 x라 하면 $x^3=8$ 이므로

$x^3-8=0,\ (x-2)(x^2+2x+4)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{3}i$ (참)

㉡ $\sqrt{256}=16$이고 16의 네제곱근을 x라 하면

$x^4=16$ 이므로

$x^4-16=0,\ (x+2)(x-2)(x^2+4)=0$

$\therefore x=\pm 2$ 또는 $x=\pm 2i$

따라서 $\sqrt{256}$의 네제곱근은 $-2,\ 2,\ -2i,\ 2i$이다.(거짓)

㉢ 5의 n제곱근 중 실수 인 것은 $x^n=5$를 만족하는 수 x이고

n이 홀수 이므로 $x=\sqrt[n]{5}$ 로 1개이다.(참)

㉣ 세제곱근 27은 $\sqrt[3]{27}$이므로 $\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=3$ (참)

㉤ $y=x^4$ 와 $y=5$ 의 교점의 x좌표는 $x^4=5$ 를 만족하는 실수인 거듭제곱근이다.

즉, 허수일 때는 그래프로 나타내지지 않기 때문에 옳지 않다. (거짓)

개념길잡이 a의 n제곱근과 n제곱근 a를 구분해서 문제를 접근해야 합니다. a의 n제곱근은 n번 곱해서 a가 되는 수이기 때문에 a의 n제곱근를 x라 두면 $x^n=a$를 만족하는 수인 반면에 n제곱근 a는 $\sqrt[n]{a}$를 읽는 방법입니다. 흔히 $\sqrt{a}$를 '루트 a'라고 읽지만 $\sqrt[n]{a}$는 'n루트a' 라고 읽지 않고 n제곱근 a라고 읽어야합니다. 왜냐하면 $n\times\sqrt{a}$인지 $\sqrt[n]{a}$인지 구별하기 힘들기 때문입니다.

(개념Check)1. 다음 중 옳은 것을 모두 고르시오.

‖ 보기 ‖

㉠ 27의 세제곱근은 3뿐이다.
㉡ -81의 네제곱근 중 실수인 것은 없다.
㉢ 제곱근 16은 ± 4이다.
㉣ n이 홀수일 때, 3의 n제곱근 중 실수인 것은 1개이다.

(길잡이 예제2) 거듭제곱근의 계산

다음 식을 간단히 구하시오. $(a>0,\ b>0)$

(1) $\sqrt{a^5b^3}\times\sqrt[3]{ab^2}\div\sqrt[6]{a^5b}$ (2) $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}$ (3) $\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{2}}}\times\sqrt{\dfrac{\sqrt[6]{2}}{\sqrt[3]{2}}}$

[풀이] (1) $\sqrt{a^5b^3}\times\sqrt[3]{ab^2}\div\sqrt[6]{a^5b}=a^{\frac{5}{2}}b^{\frac{3}{2}}\times a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}\div a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{1}{6}}$

$$=a^{\frac{5}{2}+\frac{1}{3}-\frac{5}{6}}b^{\frac{3}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}}$$

$$=a^{\frac{15}{6}+\frac{2}{6}-\frac{5}{6}}b^{\frac{9}{6}+\frac{4}{6}-\frac{1}{6}}$$

$$=a^{\frac{12}{6}}b^{\frac{12}{6}}=a^2b^2$$

(2) $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}=\sqrt{a}\times\sqrt{\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}$

$$=\sqrt{a}\times\sqrt{\sqrt{a}}\times\sqrt{\sqrt{\sqrt{a\sqrt{a}}}}$$

$$=\sqrt{a}\times\sqrt{\sqrt{a}}\times\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}\times\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}}$$

$$=a^{\frac{1}{2}}\times(a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\times((a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\times(((a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$$

$$=a^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{1}{4}}\times a^{\frac{1}{8}}\times a^{\frac{1}{16}}$$

$$=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}}=a^{\frac{15}{16}}=\sqrt[16]{a^{15}}$$

(3) $\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{2}}}\times\sqrt{\dfrac{\sqrt[6]{2}}{\sqrt[3]{2}}}=\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{2}}}{\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}}\times\dfrac{\sqrt{\sqrt[6]{2}}}{\sqrt{\sqrt[3]{2}}}$

$$=\frac{(2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}}{(2^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}}\times\frac{(2^{\frac{1}{6}})^{\frac{1}{2}}}{(2^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{2^{\frac{1}{6}}}{2^{\frac{1}{12}}}\times\frac{2^{\frac{1}{12}}}{2^{\frac{1}{6}}}=1$$

개념길잡이 복잡한 계산이지만 $\sqrt[n]{\ }$ 기호를 모두 지수로 바꿔줘서 계산하면 좀 더 정확하고 빠르게 계산할 수 있습니다. 그리고 (2)처럼 $\sqrt[n]{\ }$가 여러 번 겹쳐서 나오는 것은 안에서부터 하나씩 연산해야 하지만 위의 풀이처럼 인수별로 각각 계산하는 것이 헷갈리지 않는 방법 중 하나입니다.

(개념Check)2. $x>0$일 때, $\sqrt[5]{\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}}\times\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[5]{x}}}\times\sqrt{\dfrac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x}}}$ 을 간단히 구하시오.

5. 지수를 정수의 범위까지 확장

지수가 양의 정수일 때 성립하는 지수법칙이 0 또는 음의 정수인 경우에도 성립하도록 지수 범위를 확장하여 보자

$a \neq 0$일 때, $m = 0$ 또는 $m = -n$ $(n > 0)$인 경우에도 지수법칙 $a^m a^n = a^{m+n}$이 성립한다고 하면

(1) $a^0 = 1$

$$a^0 \times a^n = a^{0+n} = a^n \qquad \therefore a^0 = \frac{a^n}{a^n} = 1$$

(2) $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ $(a \neq 0)$

$$a^{-n} \times a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1 \qquad \therefore a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

(3) $a^m a^n = a^{m+n}$

$m = -p$, $n = -q$ (p, q는 양의 정수)로 놓으면

$$a^m a^n = a^{-p} a^{-q} = \frac{1}{a^p} \times \frac{1}{a^q} = \frac{1}{a^{p+q}}$$

$$= a^{-(p+q)} = a^{(-p)+(-q)} = a^{m+n}$$

(4) $a^m \div a^n = a^{m-n}$

$m = -p$, $n = -q$ (p, q는 양의 정수)로 놓으면

$$a^m \div a^n = a^{-p} \div a^{-q} = \frac{1}{a^p} \div \frac{1}{a^q} = \frac{a^q}{a^p} = a^q \times a^{-p} = a^{q-p} = a^{-n+m} = a^{m-n}$$

이므로 $a^m \div a^n = a^{m-n}$이다.

(5) $(ab)^n = a^n b^n$

$m = -p$, $n = -q$ (p, q는 양의 정수)로 놓으면

$$(ab)^n = (ab)^{-q} = \frac{1}{(ab)^q} = \frac{1}{a^q \times b^q} = \frac{1}{a^q} \times \frac{1}{b^q} = a^{-q} \times b^{-q} = a^n b^n$$

이므로 $(ab)^n = a^n b^n$이다.

m, n중에서 하나만 음의 정수인 경우에도 위와 같은 방법으로 지수법칙이 성립한다.

참고로 n이 양의 정수일 때, $0^n = 0$이지만 0^n과 0^{-n}은 정의하지 않는다.

6. 지수를 유리수의 범위까지 확장

밑이 양수일 때, 지수가 유리수인 경우에도 지수가 정수일 때와 마찬가지로 지수법칙이 성립하도록 지수의 범위를 확장하여 보자.

$a>0, b>0$일 때 유리수 m, n에 대하여

(1) $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

$a>0$일 때, 유리수 p, q에 대하여 지수법칙 $(a^p)^q = a^{pq}$이 성립한다고 하면

유리수 $\frac{m}{n}$ (m, n은 정수, $n \geq 2$)에 대하여

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^{\frac{m}{n} \cdot n} = a^m$$

이때, $a>0$이므로 $a^{\frac{m}{n}} > 0$이다.

따라서 $a^{\frac{m}{n}}$은 a^m의 양의 n제곱근이므로

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

(2) $a^r a^s = a^{r+s}$

$r = \frac{m}{n}$, $s = \frac{p}{q}$ (m, p는 정수, n, q는 2 이상의 자연수)로 놓으면

$a^r a^s = a^{\frac{m}{n}} a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[nq]{a^{mq}}\sqrt[nq]{a^{np}}$

여기서 mq, np는 정수이고 $a^{mq}>0$, $a^{nq}>0$이므로

$a^r a^s = \sqrt[nq]{a^{mq}}\sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq}a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}} = a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} = a^{r+s}$

따라서 $a^r a^s = a^{r+s}$이 성립한다.

(3) $a^r \div a^s = a^{r-s}$

$r = \frac{m}{n}$, $s = \frac{p}{q}$ (m, p는 정수, n, q는 2 이상의 자연수)로 놓으면

$a^{-s} = a^{-\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^{-p}} = \sqrt[q]{\frac{1}{a^p}} = \frac{1}{\sqrt[q]{a^p}} = \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}} = \frac{1}{a^s}$

이므로 $a^r \div a^s = a^r \times \frac{1}{a^s} = a^r a^{-s} = a^{r-s}$

(4) $(a^r)^s = a^{rs}$

$r = \frac{m}{n}$, $s = \frac{p}{q}$ (m, p는 정수, n, q는 2 이상의 자연수)로 놓으면

$(a^r)^s = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^p} = \sqrt[q]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p} = \sqrt[q]{\sqrt[n]{a^{mp}}} = \sqrt[nq]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{nq}} = a^{\frac{m}{n}\times\frac{p}{q}} = a^{rs}$

(5) $(ab)^r = a^r b^r$

$r = \frac{m}{n}$, $s = \frac{p}{q}$ (m, p는 정수, n, q는 2 이상의 자연수)로 놓으면

$$(ab)^r = (ab)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(ab)^m} = \sqrt[n]{a^m b^m} = \sqrt[n]{a^m}\sqrt[n]{b^m} = a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{m}{n}} = a^r b^r$$

7. 지수를 실수의 범위까지 확장

지수의 범위를 실수까지 확장하기 위하여 지수가 무리수인 $2^{\sqrt{3}}$을 예로 들어 보면
무리수 $\sqrt{3} = 1.7320508075\cdots\cdots$에 대하여 $\sqrt{3}$에 한없이 가까워지는 유리수
$1,\ 1.7,\ 1.73,\ 1.732,\ 1.7320,\ 1.73205,\ \cdots\cdots$를 지수로 가지는 수
$2^1,\ 2^{1.7},\ 2^{1.73},\ 2^{1.732},\ 2^{1.7320},\ 2^{1.73205},\ \cdots\cdots$은 일정한 수에 한없이 가까워짐을 알 수 있다.
이 일정한 수를 $2^{\sqrt{3}}$이라고 정의한다. 이와 같은 방법을 이용하면 $a > 0$일 때, 임의의 실수 x에 대하여도 a^x을 정의할 수 있다.
에를 들면 $a > 0$, $b > 0$일 때, $\left(a^{\sqrt{3}} b^{\sqrt{5}}\right)^{\sqrt{15}} = a^{\sqrt{45}} b^{\sqrt{75}} = a^{3\sqrt{5}} b^{5\sqrt{3}}$으로 나타낼 수 있다.

㉠ 정수 지수로의 확장
0 또는 음의 정수인 지수
$a \neq 0$이고 n이 양의 정수일 때, $a^0 = 1$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

㉡ 지수가 정수일 때의 지수법칙
$a \neq 0$, $b \neq 0$이고 m, n이 정수일 때

① $a^m a^n = a^{m+n}$ ② $(a^m)^n = a^{mn}$, $(a^n)^m = a^{mn}$

③ $(ab)^n = a^n b^n$ ④ $a^m \div a^n = a^{m-n}$

㉢ 유리수인 지수
$a > 0$이고 m이 정수, n이 2이상인 정수일 때
$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, 특히 $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

㉣ 지수가 유리수일 때의 지수법칙
$a > 0$, $b > 0$이고 r, s가 유리수일 때

① $a^r a^s = a^{r+s}$ ② $(a^r)^s = a^{rs}$

③ $(ab)^r = a^r b^r$ ④ $a^r \div a^s = a^{r-s}$

㉤ $a > 0$, $b > 0$이고 x, y가 실수일 때

① $a^x a^y = a^{x+y}$ ② $(a^x)^y = a^{xy}$

③ $(ab)^x = a^x b^x$ ④ $a^x \div a^y = a^{x-y}$

8. 양의 실수를 유리수인 지수로 나타내기

a, b는 자연수, m, $n \neq 0$인 정수, x, y는 실수일 때

$a^m = x$, $b^n = y$이면 $a = x^{\frac{1}{m}}$, $b = y^{\frac{1}{n}}$으로 바꾸어 a와 b를 실수 x와 y에 관한 식으로 나타낼 수 있다.

예를 들면 $8^{\frac{2}{3}} = x$, $27^{\frac{3}{4}} = y$일 때, $8^{\frac{2}{3}} = (2^3)^{\frac{2}{3}} = 2^2 = x$이므로

$2 = x^{\frac{1}{2}}$, $27^{\frac{3}{4}} = (3^3)^{\frac{3}{4}} = 3^{\frac{9}{4}}$에서 $3 = y^{\frac{4}{9}}$으로 나타낼 수 있다.

즉, $2 = x^{\frac{1}{2}}$, $3 = y^{\frac{4}{9}}$을 이용하여 $108^{\frac{1}{2}} = (2^2 \times 3^3)^{\frac{1}{2}} = 2^{2 \times \frac{1}{2}} \times 3^{3 \times \frac{1}{2}} = 2 \times 3^{\frac{3}{2}} = x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{2}{3}}$꼴로 나타낼 수 있다. 문제에서는 실수 $(xy)^n$꼴을 물어본다.

9. 지수법칙과 곱셈공식의 곱셈공식 이용 및 응용

① $a > 0$, $b > 0$이고 x, y가 실수일 때,

곱셈공식 $(a^{2x} - b^{2x}) = (a^x + b^y)(a^x - a^y)$, $(a^x \pm y^y)^2 = a^{2x} \pm 2a^x b^y + y^{2y}$,

$(a^x \pm b^y)^3 = a^{3x} \pm 3a^{2x} b^y + 3a^x b^{2y} \pm b^{3y}$을 이용한다.

예를 들면 $a > 0$일 때,

$$(a^{\frac{1}{3}} + a^{-\frac{1}{3}})^3 - (a^{\frac{1}{3}} - a^{-\frac{1}{3}})^3 = a + 3a^{\frac{2}{3}} a^{-\frac{1}{3}} + 3a^{\frac{1}{3}} a^{-\frac{2}{3}} + a^{-1} - a + 3a^{\frac{2}{3}} a^{-\frac{1}{3}} - 3a^{\frac{1}{3}} a^{-\frac{2}{3}} + a^{-1}$$

$$= a^{-1} + a^{-1} + 3a^{\frac{1}{3}} + 3a^{\frac{1}{3}} = 2a^{-2} + 6a^{\frac{1}{3}}$$

으로 간단히 식을 나타낼 수 있다.

② $a > 0$이고 실수 x에 대하여 $a^x + a^{-x}$ 꼴이 주어지는 경우 곱셈공식에서

$a^{2x} + a^{-2x} = (a^x + a^{-x})^2 - 2a^{2x-2x} = (a^x + a^{-x})^2 - 2$

$(a^x + a^{-x})^3 = a^{3x} + 3a^{2x} a^{-x} + 3a^x a^{-2x} + a^{-3x} = a^{3x} + a^{-3x} + 3a^x + 3a^{-x}$에서

$a^{3x} + a^{-3x} = (a^x + a^{-x})^3 - 3(a^x + a^{-x})$꼴로 나타낸다.

예를 들면 $3^{2x} + 3^{-2x} = 11$일 때,

$3^{2x} + 3^{-2x} = (3^x + 3^{-x})^2 - 2$에서 $3^x + 3^{-x} = 3^{2x} + 3^{-2x} + 2 = 11 + 2 = 13$이고

$(2^{\frac{x}{2}} + 2^{-\frac{x}{2}})^2 = 2^x + 2 + 2^{-x} = 2^x + 2^{-x} + 2 = 11 + 2 = 13$, $2^{\frac{x}{2}} + 2^{-\frac{x}{2}} = \pm\sqrt{13}$

$2^{\frac{x}{2}} + 2^{-\frac{x}{2}} > 0$이므로 $2^{\frac{x}{2}} + 2^{-\frac{x}{2}} = \sqrt{13}$

문제에서 $\dfrac{3^x + 3^{-x}}{3^{\frac{x}{2}} + 3^{-\frac{3}{2}}} = \dfrac{13}{\sqrt{13}} = 13\sqrt{13}$으로 간단히 나타낼 수 있다.

하지만 조건에서 $a > 0$이고 p는 실수인 경우, $a^x = p$로 조건이 주어지면

$\dfrac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}}$ 꼴의 경우에는 분모와 분자에 각각 a^x을 곱해준다.

즉, $\dfrac{(a^x - a^{-x})a^x}{(a^x + a^{-x})a^x} = \dfrac{a^{2x}-1}{a^{2x}+1} = \dfrac{p-1}{p+1}$꼴로 나타낼 수 있다.

10. 밑을 통일하여 식의 값 구하기

밑을 같게 하여 지수 법칙을 이용한다.

예를 들면 두 실수 x, y, p에 대하여 $ab=5^p$이고, $a^x=25$, $b^y=125$이면

$a^x=25=5^2$, $a=5^{\frac{2}{x}}$이고 $b^y=125=5^3$, $b=5^{\frac{3}{y}}$이 되어 $ab=5^{\frac{2}{x}+\frac{3}{y}}$꼴이 된다.

즉, $ab=5^p$이므로 $5^p=5^{\frac{2}{x}+\frac{3}{y}}$에서 $\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}=p$로 나타낼 수 있다.

2. 일반각의 유형

두 각을 나타내는 두 동경의 크기가 각각 α, β라고 하면, 동경의 방향은 양(+)의 방향으로 하자. 여기서 θ는 문제에서 요구되는 조건에 의해 범위가 제한되어 주어질 수 있다.

① 두 동경이 일치할 때

$\alpha=\theta$, $\beta=4\theta$이면 일치한다는 것은 $\theta=4\theta$라고 생각할 수 있다.

하지만 동경이 일치한다는 것은 n바퀴 회전해서 일치하는 것을 포함하기 때문에 위와 같이 나타내면 안 된다. 즉, $4\theta=\theta+2\pi\times n$, $4\theta-\theta=2\pi\times n$인 것이다.

일반화 시키면 $\beta-\alpha=2\pi\times n$(단, n은 정수이다.)

② 두 동경이 원점에 대하여 대칭일 때

$\alpha=\theta$, $\beta=4\theta$이면 원점에 대하여 대칭이라는 것은 $\theta+\pi=4\theta$, $4\theta-\theta=\pi$라는 것이다.

$4\theta-\theta=\pi$은 $2\pi\times n$에서 $n=0$이면 원점에 대하여 대칭인 꼴이 아니므로 $(2n+1)\pi$임을 알 수 있다. 즉, $4\theta-\theta=(2n+1)\pi$로 나타낼 수 있다.

일반화 시키면 $\beta-\alpha=(2n+1)\pi$(단, n은 정수이다.)

③ 두 동경이 x축에 대하여 대칭일 때

$\alpha=\theta$, $\beta=4\theta$이면 α의 x축 대칭의 각은 $4\theta+\alpha=2\pi\times n$이므로 $\alpha=2\pi\times n-4\theta$이다.

즉, $\theta=2\pi\times n-4\theta$, $\theta+4\theta=2\pi\times n$꼴이 된다.

일반화 시키면 $\alpha+\beta=2\pi\times n$(단, n은 정수이다.)

④ 두 동경이 y축에 대하여 대칭일 때

$\alpha=\theta$, $\beta=4\theta$이면 $n=0$일 때, $\pi-4\theta=\alpha$, $\pi=\alpha+4\theta=\theta+4\theta$꼴이 되므로

일반화 시키면 $\alpha+\beta=(2n+1)\times\pi$(단, n은 정수이다.)

⑤ 두 동경이 직선 $y=x$에 대하여 대칭일 때

$\alpha=\theta$, $\beta=4\theta$이면 $n=0$일 때, $4\theta+\alpha=\frac{\pi}{2}$, $4\theta=\frac{\pi}{2}-\alpha=\frac{\pi}{2}-\theta$꼴이 되므로

일반화 시키면 $\alpha+\beta=2\pi\times n+\frac{\pi}{2}$(단, n은 정수이다.)

2. 호도법이란

 도($^\circ$)를 단위로 하는 각의 표현법을 육십분법이라 한다. 호도법은 반지름의 길이가 r인 원에서 길이가 r인 호의 중심각의 크기를 단위로 각의 크기를 나타내는 방법이다.

반지름의 길이가 r인 원에서 호의 길이는 중심각의 크기에 비례한다.

원에서 길이가 r인 호 AB에 대한 중심각의 크기를 α°라 하면 $r:2\pi r=\alpha^\circ:360^\circ$이 성립한다. 따라서 $\alpha^\circ=\dfrac{180^\circ}{\pi}$이다.

 반지름의 길이가 r인 원에서 길이가 r인 호의 중심각의 크기 α°는 반지름의 길이 r에 관계없이 $\dfrac{180^\circ}{\pi}$로 일정하다.

이 각의 크기 $\dfrac{180^\circ}{\pi}$를 1라디안(**radian**)이라 하고, 이것을 단위로 각의 크기를 나타내는 방법을 **호도법**이라 한다.

1라디안 $=\dfrac{180^\circ}{\pi}$이므로 $1^\circ=\dfrac{\pi}{180}$라디안이 성립한다. 이를 이용하여 육십분법과 호도법으로 자유롭게 각의 크기를 나타낼 수 있다.

예를 들면, $60^\circ=60\times1^\circ=60\times\dfrac{\pi}{180}=\dfrac{\pi}{3}$이고, $\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6}\times1$(라디안)$=\dfrac{\pi}{6}\times\dfrac{180^\circ}{\pi}=30^\circ$이다.

$\pi=180^\circ$라고 하는데 이 등식은 π의 뒤에 라디안의 단위가 생략된 것이다.

즉, π라디안 $=180^\circ$가 정확한 등식인 것이다. 즉, 호도법과 육십분법의 관계에 의하여 등식 $\pi\times\dfrac{180^\circ}{\pi}=\pi\times$(1라디안)$=180^\circ$가 성립되는데, 여기서 1라디안에 해당하는 $\dfrac{180^\circ}{\pi}$를 생략하기 때문에 $\pi=180^\circ$로 사용되는 것이다.

3. 호도법을 이용한 부채꼴의 호의 길이와 넓이

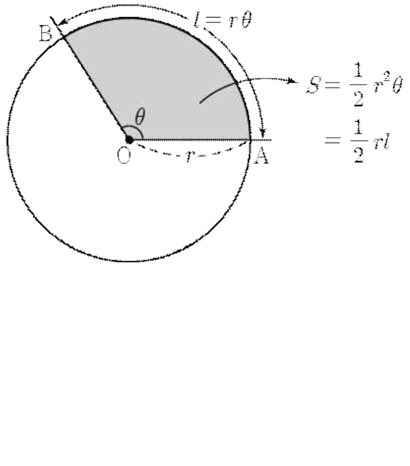
 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ인 부채꼴 OAB에서 호 AB의 길이를 l이라고 하면, 호의 길이는 중심각의 크기에 정비례하므로 $l:2\pi r=\theta:2\pi$임을 알 수 있다.

따라서 $l=r\theta$이다.

부채꼴 OAB의 넓이를 S라고 하면 부채꼴의 넓이도 중심각의 크기에 정비례하므로

$S:\pi r^2=\theta:2\pi$임을 알 수 있다. 따라서 $S=\dfrac{1}{2}r^2\theta$이다.

$l=r\theta$이므로 $S=\dfrac{1}{2}r\theta\times r=\dfrac{1}{2}rl$로도 나타낼 수 있다.



기본개념 확인 : 교과 필수예제 Level

39. 다음 크기와 같은 각을 나타내는 시초선 OX와 동경 OP의 위치를 그림으로 나타내시오.

(1) 60° (2) 225° (3) 570° (4) -150°

40. 다음 각의 동경이 나타내는 일반각을 $360^\circ \times n + \alpha^\circ$ 꼴로 나타내시오.
(단, n은 정수, $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$)

(1) 35° (2) 800° (3) -50° (4) -620°

41. 다음 각은 제몇 사분면의 각인지 구하시오.

(1) 420° (2) 960° (3) -415° (4) 1140°

42. 다음 각을 육십분법은 호도법으로, 호도법은 육십분법으로 나타내시오.

(1) 10° (2) 315° (3) -240° (4) $\frac{3}{4}\pi$

(4) $-\frac{11}{9}\pi$ (5) $\frac{3}{5}\pi$

43. 다음 물음에 답하시오.

(1) 반지름의 길이가 $6\,\text{cm}$이고 중심각의 크기가 $\frac{5}{9}\pi$인 부채꼴의 호의 길이와 넓이를 구하시오.

(2) 호의 길이가 4π, 넓이가 8π인 부채꼴의 중심각의 크기 θ와 부채꼴의 둘레의 길이 l을 구하시오.

(3) 중심각의 크기가 $\frac{2}{3}\pi$이고 호의 길이가 2π인 부채꼴의 넓이를 구하시오.

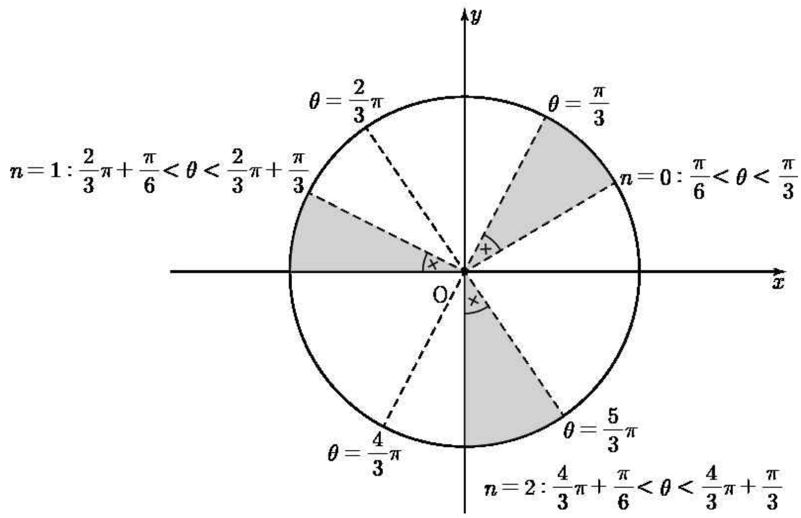
(길잡이예제1)사분면의 각

제 k사분면의 각 θ에 대하여 3θ가 제2사분면의 각이고 4θ는 제4사분면의 각이 되도록 하는 모든 k의 값의 합을 구하시오.

[풀이] 3θ가 제2사분면의 각이므로 $2n\pi+\dfrac{\pi}{2}<3\theta<2n\pi+\pi$ (단, n은 정수)가 성립한다.

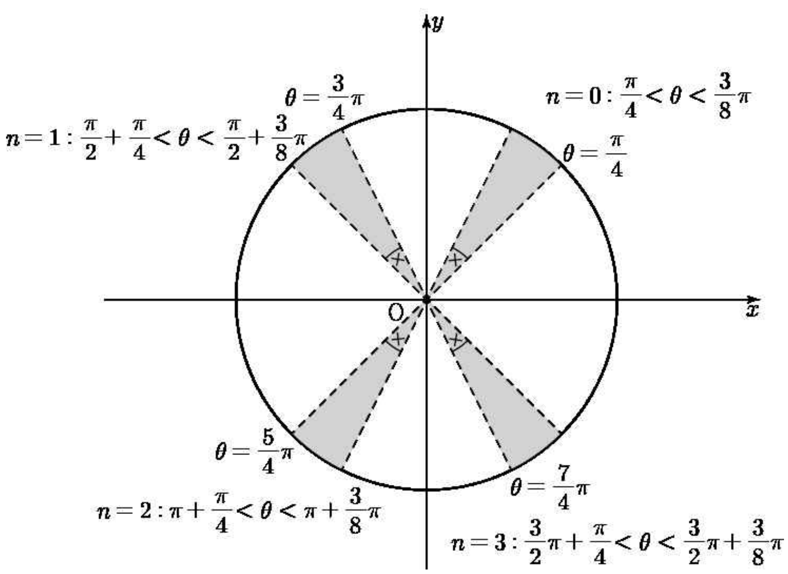
이 부등식에서 양변을 3으로 나누면 $\dfrac{2n\pi}{3}+\dfrac{\pi}{6}<\theta<\dfrac{2n\pi}{3}+\dfrac{\pi}{3}$이다.

$n=0$, $n=1$, $n=2$일 때 θ의 범위를 좌표평면에 나타내면 다음 그림과 같다.

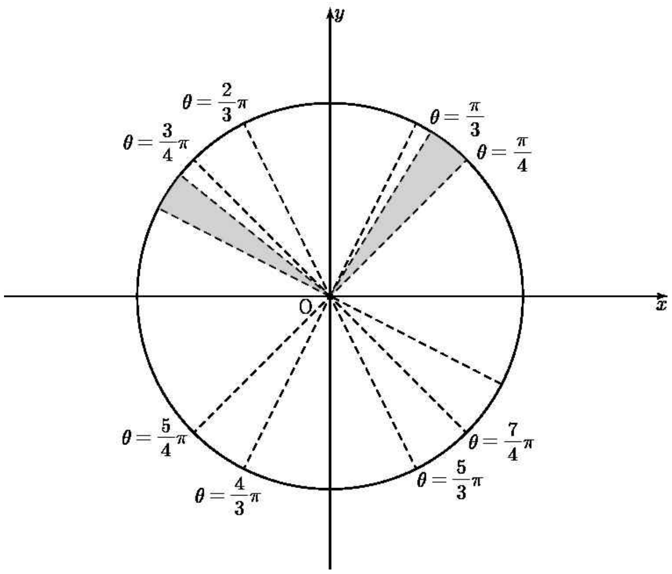


마찬가지로 4θ가 제3사분면의 각이므로 $2n\pi+\pi<4\theta<2n\pi+\dfrac{3\pi}{2}$ (단, n은 정수) 가 성립한다. 이 부등식에서 양변을 4으로 나누면 $\dfrac{n\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{n\pi}{2}+\dfrac{3\pi}{8}$이다.

$n=0$, $n=1$, $n=2$, $n=3$일 때 θ의 범위를 좌표평면에 나타내면 다음 그림과 같다.



위 두 부등식의 공통된 범위는 다음 그림과 같다.



따라서 3θ가 제2사분면의 각이고 4θ가 제4사분면의 각이기 위해서는

$2l\pi+\dfrac{\pi}{4}<\theta<2l\pi+\dfrac{3}{8}\pi$이거나 $2l\pi+\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{6}<\theta<2l\pi+\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{3}{8}\pi$이어야 한다.

즉, $2l\pi+\dfrac{\pi}{4}<\theta<2l\pi+\dfrac{3}{8}\pi$ 또는 $2l\pi+\dfrac{\pi}{2}<\theta<2l\pi+\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{3}{8}\pi$이다.

따라서 θ는 제1사분면 또는 제2사분면의 각이므로 모든 k의 값의 합은 $1+2=3$이다.

개념길잡이 위 예제에서 모든 정수 n에 대하여 $\dfrac{2n\pi}{3}+\dfrac{\pi}{6}<\theta<\dfrac{2n\pi}{3}+\dfrac{\pi}{3}$인 θ는 제2사 분 면의 각입니다. 그러나 $n=0,1,2$에 대한 θ의 범위를 그래프에 나타내면, 모든 정수에 대하여 나타낸 것과 같습니다.

$n=3$이면 이 부등식은 $\dfrac{2\times3\pi}{3}+\dfrac{\pi}{6}<\theta<\dfrac{2\times3\pi}{3}+\dfrac{\pi}{3}$,

즉, $2\pi+\dfrac{\pi}{6}<\theta<2\pi+\dfrac{\pi}{3}$이기 때문에 $n=0$일 때의 θ의 범위와 일치하기 때문입니다.

마찬가지로, $n=4$일 때, $n=1$일 때의 θ의 범위와 일치하고, $n=5$일 때는 $n=2$일 때의 θ의 범위와 일치합니다.

일반적으로 $\dfrac{2n\pi}{k}+\alpha<\theta<\dfrac{2n\pi}{k}+\beta$의 범위를 구하는데 있어서

$n=0,\ 1,\ \cdots\ k-1$에 대하여 범위를 구하면 됩니다.

(개념check)56. 3θ가 제3사분면의 각일 때, $\dfrac{\theta}{2}$는 제 몇 사분면의 각인지 구하시오.

(길잡이예제11)사인함수의 그래프

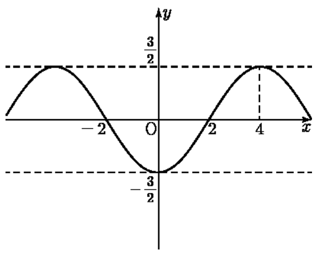
다음 ‖ 보기 ‖ 에서 함수 $f(x)=-\dfrac{3}{2}\sin\dfrac{\pi}{4}x$ 에 대한 설명으로 옳은 것을 모두 고르시오.

‖ 보기 ‖

ㄱ. 주기가 4인 주기함수이다.
ㄴ. 함수의 그래프는 직선 $x=4$에 대하여 대칭이다.
ㄷ. 임의의 실수 x에 대하여 $f(x)=f(-x)$이다.

[풀이] 주어진 함수 $f(x)=-\dfrac{3}{2}\sin\dfrac{\pi}{4}x$ 의 치역은 $\left\{y \mid -\dfrac{3}{2} \le y \le \dfrac{3}{2}\right\}$,

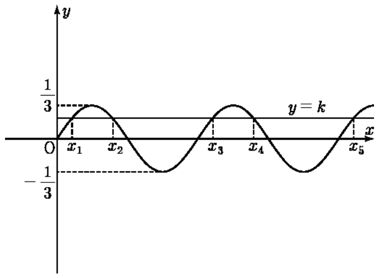
주기는 $\dfrac{2\pi}{\dfrac{\pi}{4}}=8$인 사인함수이다. 다음 그림은 함수 $f(x)$의 그래프를 나타낸 것이다.



ㄱ. 함수 $f(x)$의 그래프는 주기는 8이다. (거짓)
ㄴ. 함수 $f(x)$의 그래프는 직선 $\cdots, x=-4,\ x=0,\ x=4, \cdots$에 대하여 대칭이다. (참)
ㄷ. 함수 $f(x)$의 그래프는 직선 $x=0$, 즉, y축에 대하여 대칭이므로 $f(x)=f(-x)$이 성립 한다. (참)

개념길잡이 삼각함수는 주기함수이고, 대칭성을 가지므로 $\sin x=k, \cos x=k, \tan x=k$ 꼴의 방정식의 해도 주기와 대칭성을 가집니다. 이러한 특성들을 그래프를 통해 알아내도록 합니다.

(개념check)66. 그림과 같이 $x \ge 0$에서 정의된 함수 $y=\dfrac{1}{3}\sin\dfrac{x}{2}$의 그래프와 직선 $y=k\left(0<k<\dfrac{1}{3}\right)$가 만나는 점의 x좌표를 작은 수부터 크기순으로 $x_1,\ x_2,\ x_3, \cdots$이라 하자. $x_9+x_{10}=\alpha\pi$일 때, α의 값을 구하시오.



(길잡이예제12)절댓값기호를 포함한 코사인함수의 그래프

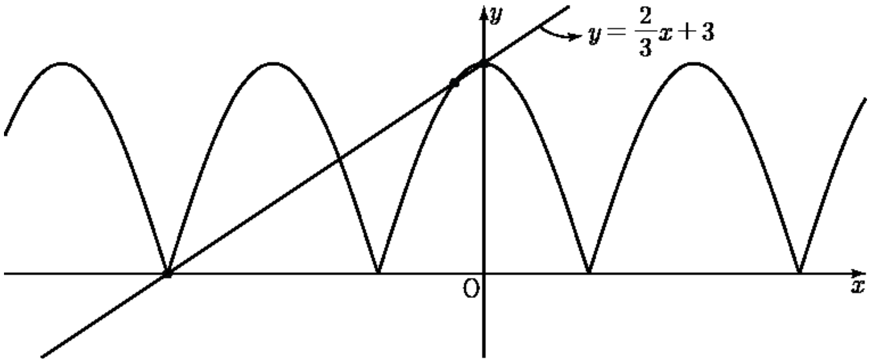
다음 ‖ 보기 ‖ 에서 함수 $f(x)=\left|3\cos\frac{\pi}{3}x\right|$에 대한 설명으로 옳은 것을 모두 고르시오.

‖ 보기 ‖

ㄱ. 주기가 6인 주기함수이다.
ㄴ. 함수 $f(x)$의 그래프는 직선 $x=6$에 대하여 대칭이다.
ㄷ. 함수 $f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{2}{3}x+3$와의 교점은 4개다.

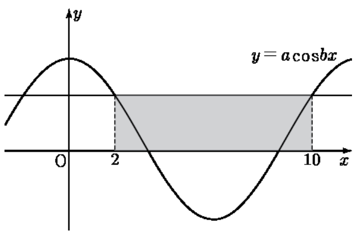
[풀이] 함수 $f(x)=\left|3\cos\frac{\pi}{3}x\right|$의 치역은 $\{y|\ 0 \le y \le 3\}$, 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}}=6$

ㄱ. 함수 $f(x)$의 그래프는 주기가 6이다. (참)
ㄴ. 함수 $f(x)$의 그래프는 직선 $x=0,\ 3,\ 6,\ \cdots,\ x=-3,\ -6,\ \cdots$에 대하여 대칭인 함수이다. (참)
ㄷ. 함수 $f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같이 직선 $y=\frac{2}{3}x+3$와의 교점이 4개임을 확인할 수 있다. (참)



개념길잡이 코사인함수와 직선과의 교점에서 직선의 기울기를 우선 확인하면 교점의 개수를 세는데 있어서 기준이 됨을 알 수 있습니다. (예제 12)번에서와 같이 직선의 기울기 $\frac{2}{3}$을 통해 x와 y좌표축에서 직선이 지나는 점을 통해 교점을 찾을 수 있습니다.

(개념check)67. 다음 그림과 같이 $y=a\cos bx$의 그래프의 일부분과 x축에 평행한 직선 l이 만나는 점의 x좌표가 2, 10이다. 직선 l, $x=2$, $x=10$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 20일 때, a의 값을 구하시오.



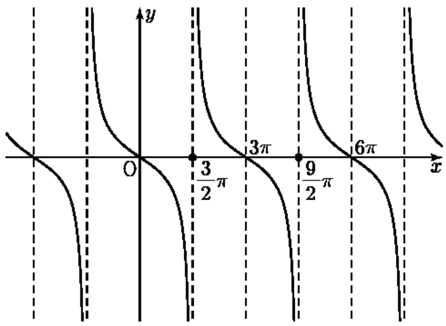
(길잡이예제13)탄젠트함수의 그래프

함수 $f(x)=2\tan\left(-\dfrac{x}{3}\right)$에 대한 설명으로 ‖ 보기 ‖ 에서 옳은 것을 모두 고르시오.

‖ 보기 ‖

ㄱ. 직선 $x=\pi$는 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선이다.
ㄴ. 정의역의 모든 원소 x에 대하여 $f(x+3\pi)=f(x)$이다.
ㄷ. 두 함수 $y=f(-x), y=-f(x)$의 그래프는 서로 일치한다.

[풀이] 함수 $f(x)=2\tan\left(-\dfrac{x}{3}\right)$의 주기는 $\dfrac{\pi}{\left|-\dfrac{1}{3}\right|}=3\pi$이다. 함수 $f(x)$의 그래프는 다음 그림 과 같다.



ㄱ. $f(x)$의 그래프에서 알 수 있듯이, 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은

$\cdots,\ x=-\dfrac{3}{2}\pi,\ x=-\dfrac{7}{2}\pi,\ x=\dfrac{3}{2}\pi,\ x=\dfrac{7}{2}\pi,\ \cdots$이다.

$x=\pi$는 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선이 아니다. (거짓)

ㄴ. 함수 $y=f(x)$의 주기는 3π이므로 정의역의 모든 원소 x에 대하여 $f(x+3\pi)=f(x)$을 만족한다. (참)

ㄷ. $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이다. (참)

개념길잡이 0이 아닌 상수 a, b에 대하여 함수 $y=a\tan bx$의 그래프는 $y=\tan x$의 그래프를 y축의 방향으로 a배, x축의 방향으로 $\dfrac{1}{b}$배를 한 그래프입니다. $y=\tan x$의 치역은 실수 전체이기 때문에 $y=a\tan bx$의 그래프의 치역도 실수 전체입니다.

$y=a\tan bx$의 그래프의 주기는 $\dfrac{\pi}{|b|}$이다. 또한, 원점에 가장 가까이에 있는 점근선 은 $x=\pm\dfrac{\pi}{2|b|}$이고, 주기마다 반복됩니다.

(개념check)68. $0\le x\le\pi$에서 나타나는 함수 $y=\tan 2x$의 그래프의 두 개의 점근선을 원점에서 가까운 것부터 차례로 $x=x_1$, $x=x_2$ 할 때, $\tan\left(x_2-\dfrac{\pi}{2}\right)$의 값을 구하시오.

(길잡이예제18) 삼각함수의 성질

$\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)}{1-\sin\left(\dfrac{3}{2}\pi+\theta\right)}+\dfrac{\sin(\pi+\theta)}{1+\cos(\pi+\theta)}$ 을 간단히 하시오. (단, $\theta \neq n\pi$, n은 정수)

[풀이] $\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)}{1-\sin\left(\dfrac{3}{2}\pi+\theta\right)}+\dfrac{\sin(\pi+\theta)}{1+\cos(\pi+\theta)}=\dfrac{\sin\theta}{1-(-\cos\theta)}+\dfrac{-\sin\theta}{1-\cos\theta}$

$$=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\frac{-\sin\theta}{1-\cos\theta}$$

이 식에서 분모를 $(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)$로 통분하면

$$\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\frac{-\sin\theta}{1-\cos\theta}=\frac{\sin\theta(1-\cos\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}+\frac{-\sin\theta(1+\cos\theta)}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}$$

$$=\frac{\sin\theta(1-\cos\theta)-\sin\theta(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$$

$$=\frac{-2\sin\theta\cos\theta}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$$

$$=\frac{-2\sin\theta\cos\theta}{1-\cos^2\theta}$$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에서 $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$이므로

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{1-\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)}+\frac{\sin(\pi+\theta)}{1+\cos(\pi+\theta)}=\frac{-2\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta}=-\frac{2\cos\theta}{\sin\theta} \qquad \therefore -\frac{2\cos\theta}{\sin\theta}$$

개념길잡이 θ를 예각으로 간주한 후, $\cos\left(\dfrac{n\pi}{2}+\theta\right)$값을 구할 때는 두 가지를 고려합니다. 첫째로, n이 짝수일 땐, $\cos\theta$으로, n이 홀수일 때는 $\sin\theta$으로 변형합니다. 두 번째로, 부호를 결정합니다. 동경이 $\dfrac{n\pi}{2}+\theta$가 속하는 사분면이 제1, 4사분면일 때는 $+$로, 제2, 3사분면일 때는 $-$의 부호를 붙여줍니다.

$\sin\left(\dfrac{n\pi}{2}+\theta\right)$의 값을 구할 때도 θ를 예각으로 간주한 후, n이 짝수일 땐, $\sin\theta$으로, n이 홀수일 때는 $\cos\theta$으로 변형합니다. 두 번째로, 부호를 결정합니다.

동경이 $\dfrac{n\pi}{2}+\theta$가 속하는 사분면이 제1, 2사분면일 때는 $+$로, 제3,4사분면일 때는 $-$의 부호를 붙여줍니다.

(개념check)72. $\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\cos\dfrac{11}{4}\pi+\sin\dfrac{5}{6}\pi\sin\dfrac{13}{6}\pi+\tan\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\tan\dfrac{13}{3}\pi$
의 값을 구하시오.

2. 삼각함수가 포함된 방정식과 부등식의 문제화

삼각함수가 포함된 방정식과 부등식은 θ의 범위에서 두 식의 관계가 문제화 된다.

① 방정식의 일차식의 꼴

$\sin x = k$ 또는 $\cos x = k$ 또는 $\tan x = k$ 꼴

$\sin x = k$는 함수 $y = \sin x$의 그래프와 직선 $y = k$의 교점의 x좌표가 방정식의 해가 된다.

단, 방정식의 해의 조건에 맞는 해를 우선적으로 구한다.

그래프와 직선의 교점을 통해 삼각함수의 성질을 이용하여 우선적으로 구한 해의 나머지를 구한다.

② 방정식의 치환을 이용하는 꼴

$\sin(ax+b) = k$ 또는 $\cos(ax+b) = k$ 또는 $\tan(ax+b) = k$꼴

$ax+b=t$로 치환하여 주어진 θ의 범위를 t에 대한 범위로 고친다.

그러면 함수 $y = \sin t$의 그래프와 직선 $y = k$의 교점의 t의 좌표를 구한다.

치환된 t를 다시 x에 관한 해로 식을 정리한다.

항상 구하고자 하는 값은 t의 값이 아닌 x의 값임에 주의한다.

③ 이차방정식의 꼴

서로 다른 이차식의 삼각함수가 포함된 경우 하나의 삼각함수가 포함된 꼴로 식을 만들어 준다. 두 다항식으로 인수분해 되므로 ①에서 사용된 방식을 통해 교점의 해를 구하면 된다.

③ 부등식의 일차식의 꼴

$\sin x > k$ 또는 $\cos x > k$ 또는 $\tan x > k$꼴

삼각함수와 직선 k와의 교점에서 k보다 위쪽인 x값의 범위

$\sin x < k$ 또는 $\cos x < k$ 또는 $\tan x < k$꼴

삼각함수와 직선 k와의 교점에서 k보다 아래쪽인 x값의 범위

④ 부등식의 치환을 이용하는 꼴

방정식의 치환을 이용하는 꼴과 같은 방식으로 삼각함수 $ax+b=t$로 치환하여 주어진 θ의 범위를 t에 대한 범위로 고친 뒤에 치환된 t의 범위를 다시 x에 관한 부등식의 범위로 고쳐서 부등식의 해의 범위를 구한다.

⑤ 이차부등식의 꼴

이차방정식의 꼴과 같은 방식으로 서로 다른 삼각함수가 포함된 경우 하나의 삼각함수가 포함된 꼴로 식을 만들어 준다. 두 다항식을 인수분해 한 뒤에 부등식의 조건의 범위에 맞는 해의 범위를 구한다.

⑥ 이차방정식 부등식의 판별식을 이용하는 꼴

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식 $D=b^2-4ac$를 이용한다.

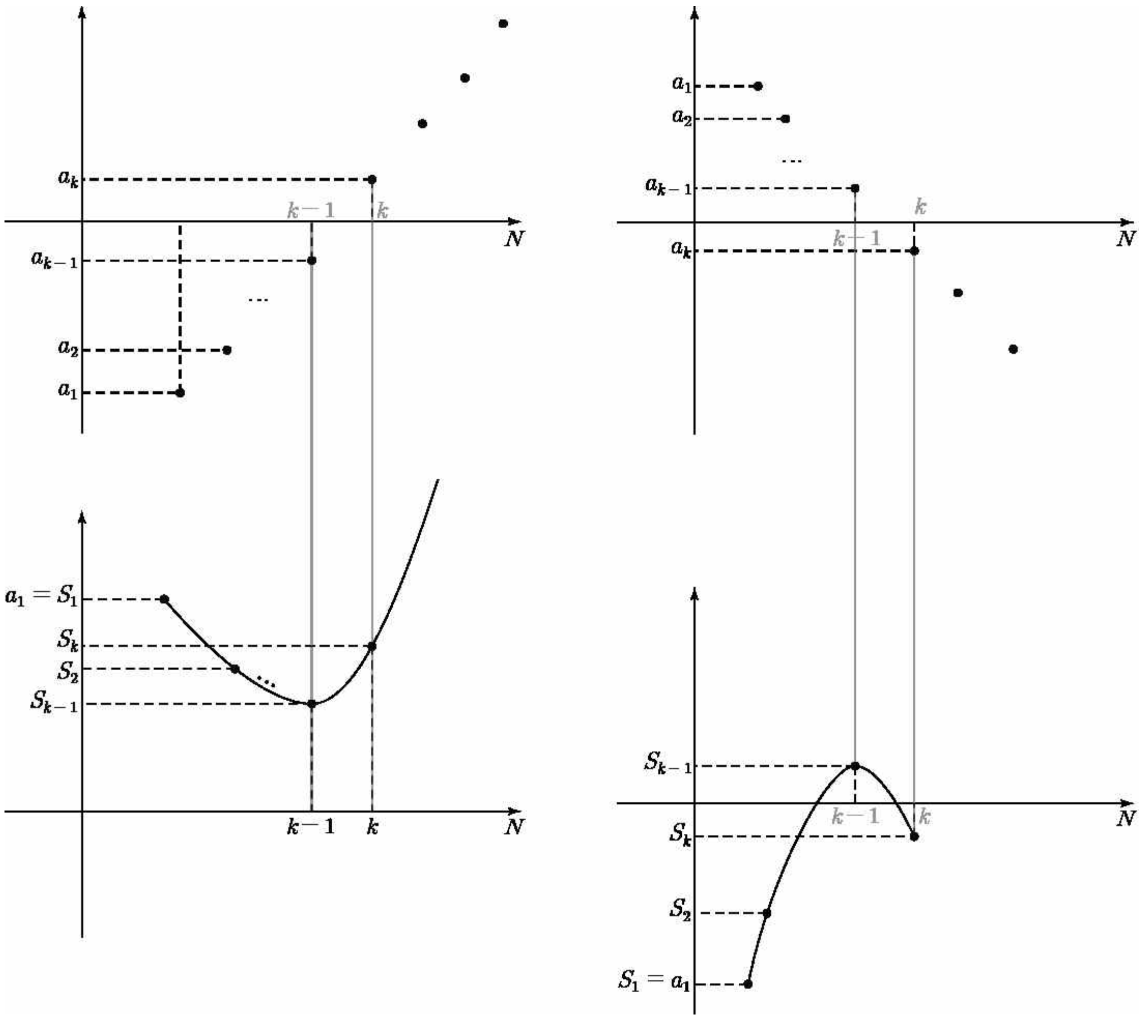
$D>0$인 경우 서로 다른 두 실근

$D=0$인 경우 중근

$D<0$경우 서로 다른 두 허근(실근을 갖지 않도록 하는 θ의 범위)

⑦ 삼각함수 그래프의 대칭성과 주기성 활용

예를 들면 함수 $f(x)=\sin kx$(단, k, $x>0$)의 그래프와 직선 $y=a$(단, $0<a<1$)과의 교점 $\alpha<\beta<\gamma$의 관계가 다음 그림과 같을 때, $f(\alpha+\beta+\gamma)$의 값을 구하는 경우를 나타낸 것이다.



(개념check)102. 첫째항이 42, 공차가 정수인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. S_n이 $n=k$, $n=l$에서 최댓값을 가질 때, a_k의 값을 구하시오. (단, $10 < k < l < 40$)

실력문제 : 고정 1등급 Level

36. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k = n^2 - 11n$일 때, $\sum_{k=1}^{20} |a_{2k}|$의 값을 구하시오.

37. $3x + 5x^2 + 7x^3 + 9x^4 + \cdots + (2n+1)x^n$을 간단히 나타내시오.

38. 1, 2, 3, …, 20에서 임의로 서로 다른 두 수를 뽑아 a, $b\,(a<b)$라 할 때, 수열 $\{a_n\}$의 일반항 $a_n = \frac{a}{b}$이라 할 때, $\sum_{k=1}^{65} a_k$의 값을 구하시오.

39. 자연수 n에 대하여 이차함수 $y = \frac{1}{5}x^2$의 그래프 위의 점 $\mathrm{A}_n\left(n, \frac{n^2}{5}\right)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 n인 원을 C_n, 원 C_n이 x축 및 y축과 만나는 서로 다른 점의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{k=1}^{9}(a_k+1)$의 값을 구하시오.

[해설]샘플

87. 모든 실수 x에 대하여 부등식

$3x^2-2\sqrt{2}x\cos\theta+\sin\theta>0$이 항상 성립하므로

$3x^2-2\sqrt{2}x\cos\theta+\sin\theta=0$의 판별식을 D라 하면 $D<0$이다.

즉 $\frac{D}{4}=(\sqrt{2}\cos\theta)^2-3\sin\theta<0$

$\therefore\ 2\cos^2\theta-3\sin\theta<0$

이때, $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$이므로 이를 이용하여 부등식 $2\cos^2\theta-3\sin\theta<0$을 변형하면

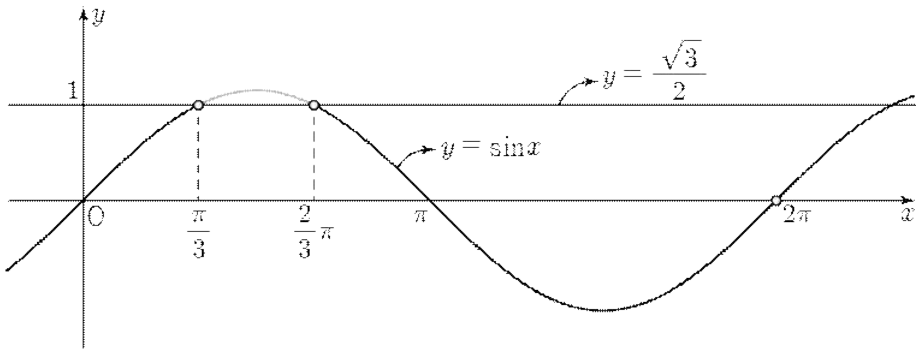
$2(1-\sin^2\theta)-3\sin\theta<0$, $2\sin^2\theta+3\sin\theta-2>0$

$(2\sin\theta-1)(\sin\theta+2)>0\quad\therefore\ \sin\theta<-2$ 또는 $\sin\theta>\frac{1}{2}$

그런데 $0\le\theta\le2\pi$에서 $-1\le\sin\theta\le1$이므로

$\sin\theta>\frac{1}{2}$와 $-1\le\sin\theta\le1$의 공통범위가 조건의 범위를 만족한다.

$\therefore\ \frac{1}{2}<\sin\theta\le1$



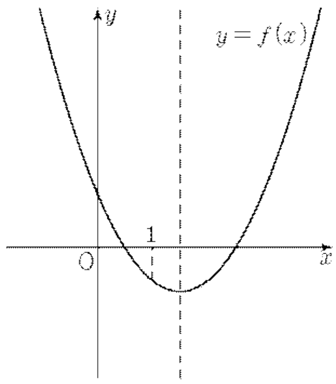
위 그림에서 부등식 $\frac{1}{2}<\sin\theta\le1$의 해는 $\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{5}{6}\pi$이다.

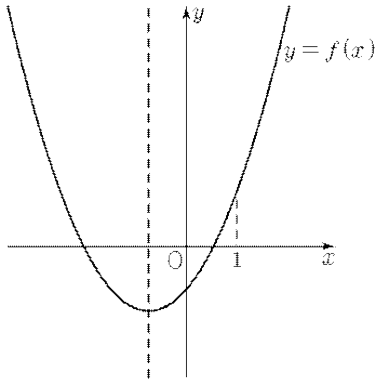
따라서 $\alpha=\frac{\pi}{6}$, $\beta=\frac{5}{6}\pi$이므로 $\alpha+\beta=\pi$

88. $x^2-x\sin\theta=1-2\sin\theta$에서 $x^2-x\sin\theta+2\sin\theta-1=0$라 하면

방정식 $x^2-x\sin\theta+2\sin\theta-1=0$을 함수 $f(x)=x^2-x\sin\theta+2\sin\theta-1$임을 알 수 있다.

$y=f(x)$의 그래프는 조건에서 서로 다른 실근을 갖고 한 근이 0보다 크고, 1보다 작으므로 다음 그림과 같이 나타낼 수 있다.



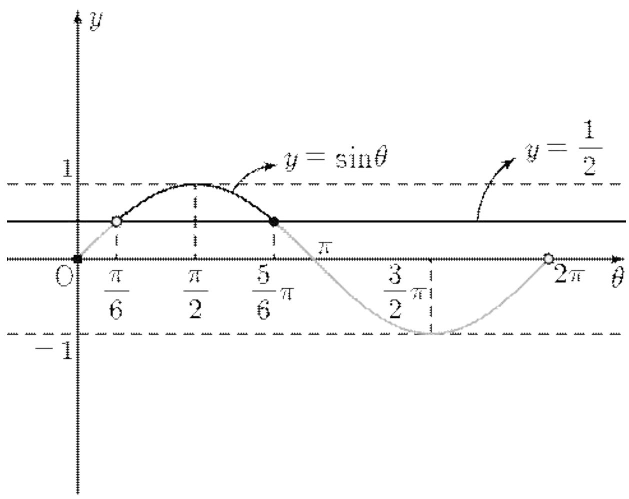


위의 그림의 조건에 의하면 $f(0)\times f(1) < 0$임을 알 수 있다.

$f(x) = x^2 - x\sin\theta + 2\sin\theta - 1$에서 $f(0) = 2\sin\theta - 1$, $f(1) = 1 - \sin\theta + 2\sin\theta - 1 = \sin\theta$

즉, $f(0)\times f(1) = (2\sin\theta - 1)\sin\theta < 0$이므로 $0 < \sin\theta < \frac{1}{2}$

다음 그림을 통해 $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$에서 $0 < \sin\theta < \frac{1}{2}$을 만족시키는 θ의 범위는

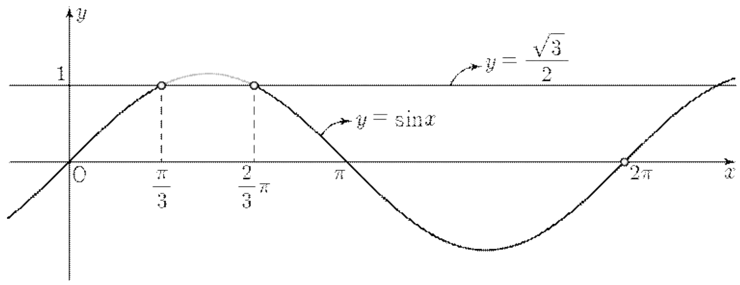


$0 \leq \theta < \frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{5}{6}\pi \leq \theta < 2\pi$임을 알 수 있다.

$\therefore\ 0 \leq \theta < \frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{5}{6}\pi \leq \theta < 2\pi$

89. $0 \le x < 2\pi$에서 $\frac{\sqrt{3}}{2} < \sin x$와 $\sin x < \cos x$의 경우로 나누어 접근하면

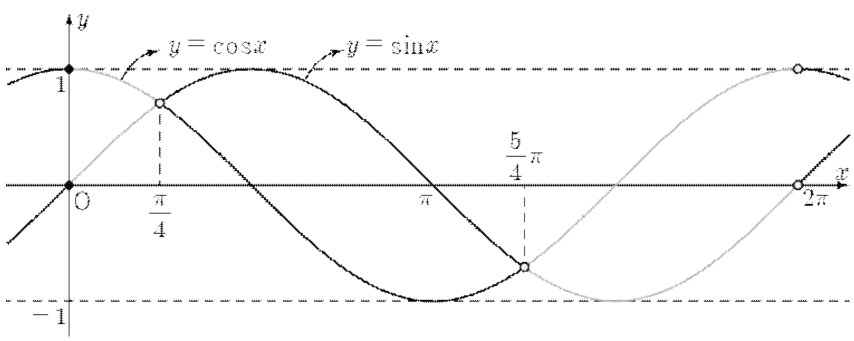
$\frac{\sqrt{3}}{2} < \sin x$일 때, 다음 그림과 같이 $0 \le x < 2\pi$의 범위에서 부등식 $\frac{\sqrt{3}}{2} < \sin x$을 만족하는 범위는 $y = \sin x$와 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$과의 교점의 x좌표는



$\therefore \ \frac{\pi}{3} < x < \frac{2}{3}\pi$ ⋯⋯㉠

$\sin x < \cos x$일 때, $\frac{\sin x}{\cos x} < 1$, $\tan x < 1$이므로 $0 \le x < 2\pi$의 범위에서 방정식 $\tan x = 1$을 만족하는 $x = \frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{5}{4}\pi$임을 알 수 있다. 그러므로 $y = \sin x$와 $y = \cos x$의 그래프는 $x = \frac{\pi}{4}$, $\frac{5}{4}\pi$에서 만나는 것을 알 수 있다.

두 함수 $y = \sin x$의 그래프와 $y = \cos x$그래프의 교점은 $0 \le x < 2\pi$의 범위에서 $\sin x < \cos x$을 만족하는 범위는 다음 그림과 같이



$\therefore \ 0 \le x < \frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{5}{4}\pi < x < 2\pi$ ⋯⋯㉡

따라서 ㉠, ㉡의 공통인 범위는 $\frac{5}{4}\pi < x < \frac{2}{3}\pi$이다.

$a = \frac{5}{4}\pi$, $b = \frac{2}{3}\pi$이므로 $a + b = \frac{5}{4}\pi + \frac{2}{3}\pi = \frac{23}{12}\pi$ $\quad \therefore \ \frac{23}{12}\pi$

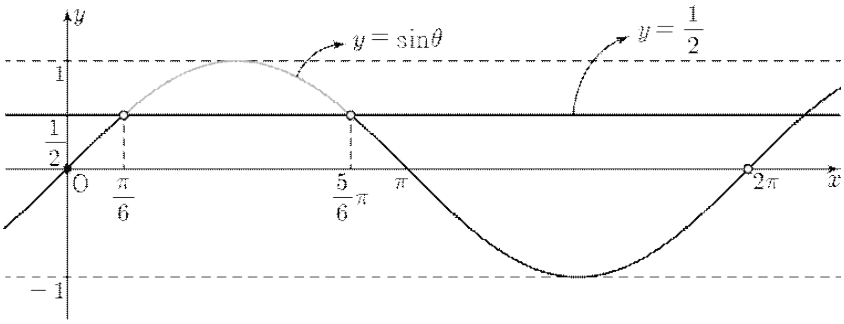
90. $x^2 + x\sin\theta - 2\sin\theta + 2 = -x\sin\theta + \cos^2\theta$에서

$x^2+x\sin\theta-2\sin\theta+2+x\sin\theta-\cos^2\theta=0$, $x^2+2x\sin\theta-2\sin\theta-\cos^2\theta+2=0$
로 나타내면 서로 다른 두 점에서 만나므로 판별식 $D>0$이므로

$\frac{D}{4}=(\sin\theta)^2-(-2\sin\theta-\cos^2\theta+2)=\sin^2\theta+2\sin\theta+\cos^2\theta-2>0$

$2\sin\theta-1>0 \quad \therefore\ \sin\theta>\frac{1}{2}$

$0\le\theta<2\pi$에서 부등식 $\sin\theta>\frac{1}{2}$을 만족하는 θ의 범위는 다음 그림과 같이



따라서 $\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{5}{6}\pi$임을 알 수 있다. $\quad\therefore\ \frac{\pi}{6}<\theta<\frac{5}{6}\pi$