# 랑데뷰
# N제

쉬삼어삼-수학II

대표저자 황보백 송원학원, 랑데뷰수학

집필진
[김은수 샤인수학학원 010-5687-5722]
[김효경 수학의 정원 010-6369-6416]
[박현주 math플래너 010-4113-4018]
[서영만 다니엘 영수학원 010-9244-0910]
[오세준 오엠 수학교습소 010-8858-9561]
[오은경 오은경수학 010-4534-5129]
[우성근 우성근수학 010-3040-0005]
[유승희 서울 오름학원 010-5298-1393]
[이재호 이재호 수학학원 010-4527-1703]
[이지훈 SY영수학원 010-8598-5284]
[이태형 가토수학과학학원 gatoms@kakao.com]
[이현일 이현일수학 010-2681-9501]
[장선정 오름수학 010-4894-1764]
[장세완 장선생수학 010-2568-0049]
[장정보 장정보 수학교습소 010-9504-5938]
[조필재 샤인수학학원 053-754-3121]
[조남웅 STM수학학원 010-2024-0707]
[최성훈 최성훈 수학교습소 010-2680-5281]
[최재영 셰르파 수학교습소 010-2577-4221]
[최현정 MQ멘토수학 010-2655-9279]
[한정아 한정아 수학교습소 010-7220-6368]
[황수영 JS수학연구소 010-6780-8242]

그림 이현일, 최성훈

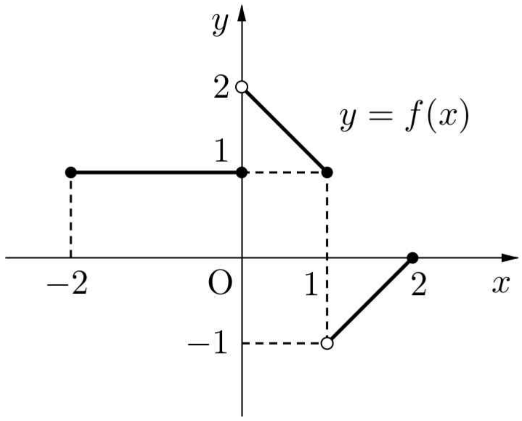
## [유형 1]
## 함수의 좌극한과 우극한

출제유형 | 함수의 그래프에서 좌극한과 우극한 또는 극한값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 그래프가 주어진 함수, $x$의 값의 범위에 따라 다르게 정의된 함수 등에서 좌극한과 우극한을 각각 구하는 과정을 이해한다.

1) 2021학년도 9월 평가원

닫힌구간 $[-2,\ 2]$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

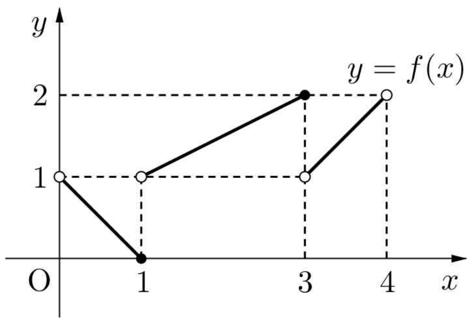



$\lim_{x \to 0+} f(x) + \lim_{x \to 2-} f(x)$의 값은?

① $-2$　② $-1$　③ $0$　④ $1$　⑤ $2$

2) 2021학년도 6월 평가원

열린구간 $(0,\ 4)$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

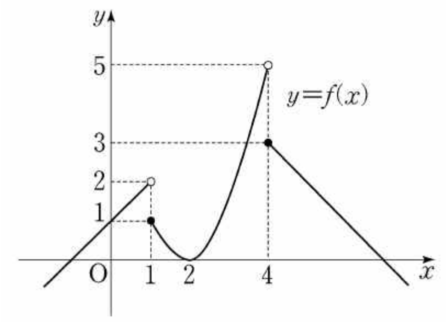



$\lim_{x \to 1+} f(x) - \lim_{x \to 3-} f(x)$의 값은?

① $-2$　② $-1$　③ $0$　④ $1$　⑤ $2$

3) 2011학년도 6월 평가원

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

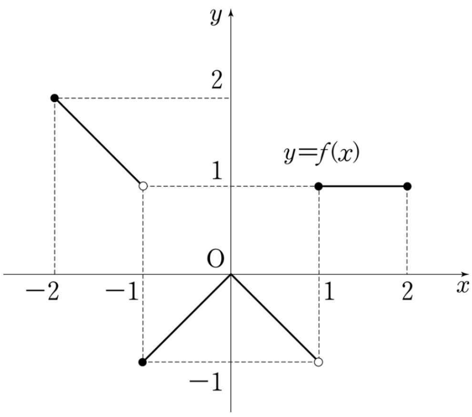



$\lim_{t\to\infty} f\left(\frac{t-1}{t+1}\right)+\lim_{t\to-\infty} f\left(\frac{4t-1}{t+1}\right)$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

4) 2012학년도 6월 평가원

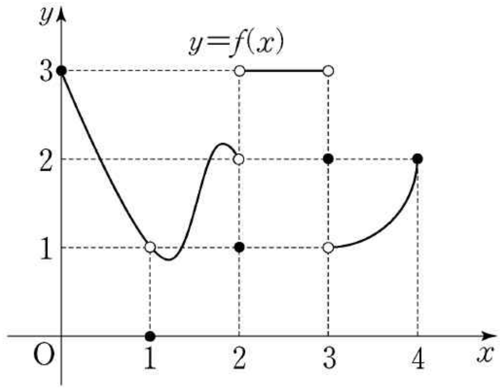
정의역이 $\{x \mid -2 \le x \le 2\}$인 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, $\lim_{x\to-1-} f(x)+\lim_{x\to1+} f(x)$의 값은?




① $-2$ ② $-1$ ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

5) 2012학년도 9월 평가원

정의역이 $\{x \mid 0 \le x \le 4\}$인 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

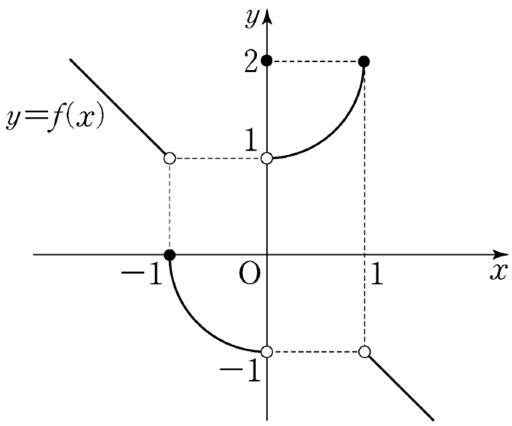



$\lim_{x\to0+} f(f(x))+\lim_{x\to2+} f(f(x))$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

6) 2012학년도 9월 평가원

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.




$\lim_{x\to-1-} f(x)+f(0)+\lim_{x\to1+} f(x)$의 값은?

① $-2$ ② $-1$ ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

68) 2017학년도 6월 평가원

함수

$$f(x)=\begin{cases}4x^2-a & (x<1)\\ x^3+a & (x\geq 1)\end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 $a$의 값은?

① $\frac{3}{2}$ ② $2$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $3$ ⑤ $\frac{7}{2}$

69)

함수

$$f(x)=\begin{cases}x^2-3x & (x<a)\\ 3x+a & (x\geq a)\end{cases}$$

가 $x=a$에서 연속이 되도록 하는 모든 실수 $a$의 값의 합을 구하시오.

70)

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이고

$$\lim_{x\to 1-}f(x)=a+3,\ \lim_{x\to 1+}f(x)=3a-1$$

를 만족시킬 때, $a+f(1)$의 값을 구하시오.

(단, $a$는 상수이다.)

71)

함수

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+ax+b}{x-1} & (x\neq 1)\\ 2 & (x=1)\end{cases}$$

이 $x=1$에서 연속이 되도록 하는 두 상수 $a$, $b$에 대하여 $a+b$의 값은?

① $4$ ② $2$ ③ $1$ ④ $-1$ ⑤ $-2$

## [유형 8]
## 연속함수의 성질

출제유형 | 연속 또는 불연속인 함수들의 합, 차, 곱 또는 몫의 연속성을 묻는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | $f(a)$, $\lim_{x \to a} f(x)$의 값을 비교하여 $x=a$에서 연속성을 조사하고 구간에 따라 나누어 정의된 함수의 경우는 구간의 경계인 $x$의 값에서 좌극한과 우극한의 값을 비교하여 연속성을 조사한다.

72) 2017학년도 9월 평가원

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$\lim_{x \to 2} \frac{(x^2-4)f(x)}{x-2} = 12$$

를 만족시킬 때, $f(2)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

73) 2006학년도 6월 평가원

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

| 보 기 |

ㄱ. $\lim_{x \to 0} f(x)$와 $\lim_{x \to 0} g(x)$가 모두 존재하지 않으면 $\lim_{x \to 0} \{f(x)+g(x)\}$도 존재하지 않는다.

ㄴ. $y=f(x)$가 $x=0$에서 연속이면 $y=|f(x)|$ 도 $x=0$에서 연속이다.

ㄷ. $y=|f(x)|$ 가 $x=0$에서 연속이면 $y=f(x)$도 $x=0$에서 연속이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

# 함수의 극한 단원평가

91) $\lim_{x\to1}\frac{x^2+4x-5}{x-1}$의 값을 구하시오.

92)

다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=1$

(나) $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=2$

$f(3)$의 값은?

① $-1$ ② $3$ ③ $8$ ④ $\frac{28}{3}$ ⑤ $\frac{32}{3}$

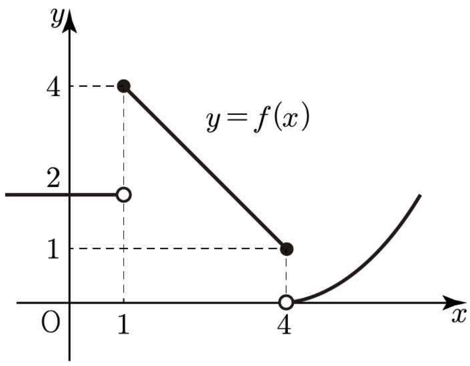
93)

$\lim_{x\to2}\frac{x-2}{f(x-2)}=\frac{5}{3}$일 때, $\lim_{x\to1}\frac{x^2+2x-3}{f(x-1)}$의 값은?

① $\frac{20}{3}$ ② $6$ ③ $\frac{16}{3}$ ④ $\frac{14}{3}$ ⑤ $4$

94)

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



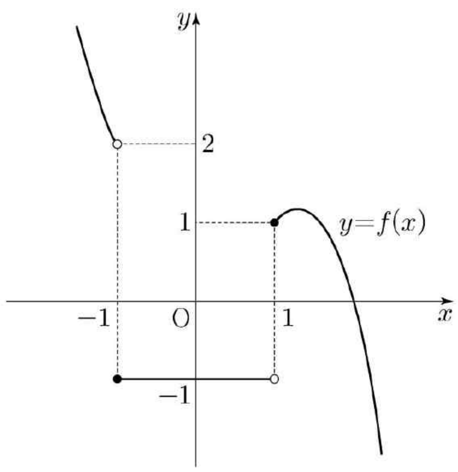

$\lim_{x\to1-}f(f(x))+\lim_{x\to4-}f(f(x))$의 값은?

(단, $1\le x\le 4$일 때 $f(x)=-x+5$이다.)

① $3$ ② $4$ ③ $5$ ④ $6$ ⑤ $7$

95)

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

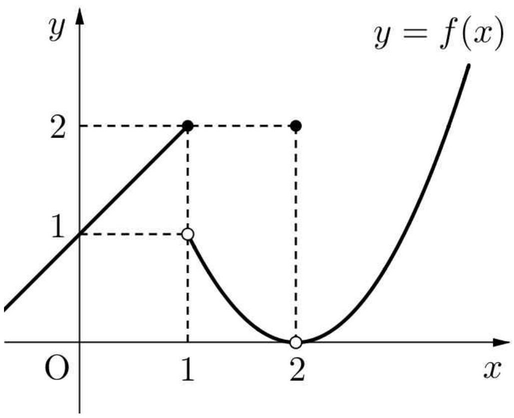



$\lim_{x\to-1-} f(x) + f(0) + \lim_{x\to1+} f(x)$의 값은?

① $-1$ ② $0$ ③ $1$ ④ $2$ ⑤ $3$

96)

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

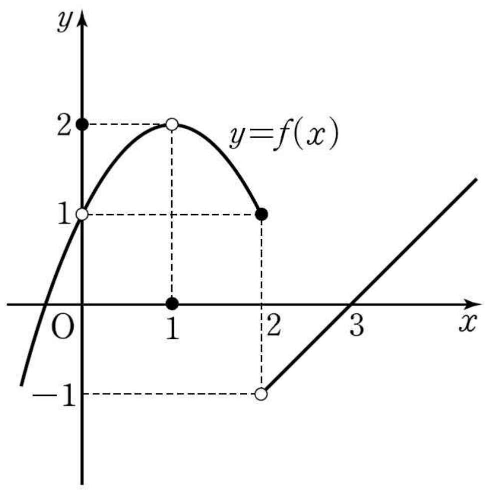



$\lim_{x\to2} f(x) + \lim_{x\to1+} f(x)$의 값은?

① $1$ ② $2$ ③ $3$ ④ $4$ ⑤ $5$

97)

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

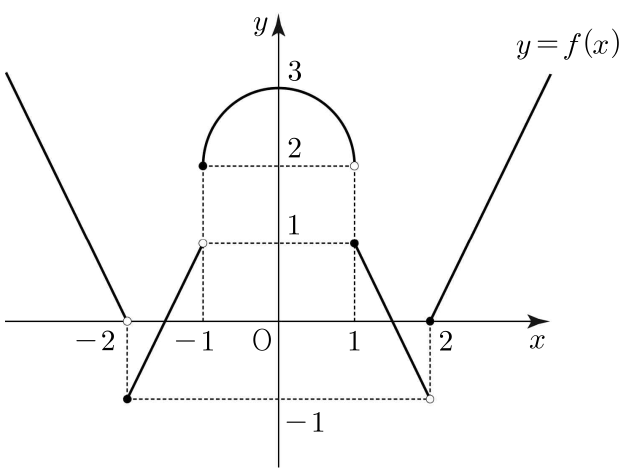



$\lim_{x\to1-} f(x) + \lim_{x\to2+} f(x)$ 의 값은?

① $0$ ② $1$ ③ $2$ ④ $3$ ⑤ $4$

98)

함수 $f(x)$의 그래프가 그림과 같다.




$\lim_{x\to2-} f(x) + \lim_{x\to1+} f(x-2)$의 값은?

① $-2$ ② $-1$ ③ $0$ ④ $1$ ⑤ $2$

## [유형 1]
## 미분계수의 뜻과 정의

출제유형 | 주어진 극한값의 식의 변형을 응용하여 미분계수를 구하거나 미분계수의 기하학적 의미가 접선의 기울기임을 이용하여 미분계수를 구하는 문제가 출제된다.
출제유형잡기 | 미분계수의 정의를 여러 변형된 식으로 활용할 수 있어야 하고 미분계수가 곡선에 접하는 접선의 기울기임을 이해하고 활용할 줄 알아야 한다.
(1) 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수

$$f'(a)=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(a+kh)=f(a)}{kh}$$

(단 $k$는 0이 아닌 상수)
(2) 곡선 $y=f(x)$위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기가 $p$이면

$$f'(a)=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=p$$

130) 2009학년도 11월 수능

다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to2}\frac{f(x+1)-8}{x^2-4}=5$일 때, $f(3)+f'(3)$의 값을 구하시오.

131) 2012학년도 6월 평가원

다항함수 $f(x)$ 에 대하여 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x^2-1}=3$ 일 때, $\frac{f'(1)}{f(1)}$ 의 값은?

① $3$ ② $\frac{7}{2}$ ③ $4$ ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ $5$

275)

다항함수 $f(x)$가 $f(x)-x=(x-1)f'(x)$를 만족시킬 때, $f'(1)$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

276)

함수 $f(x)$가 다음과 같다.

$$f(x)=\begin{cases} a(x-1)^2+1 & (x<-1) \\ bx^4-x-2 & (x\geq -1) \end{cases}$$

함수 $f(x)$가 모든 실수에서 미분 가능할 때, 두 상수 $a$, $b$의 합 $a+b$의 값은?

① $-\frac{9}{4}$ ② $-\frac{7}{4}$ ③ $-\frac{5}{4}$
④ $-\frac{3}{4}$ ⑤ $-\frac{1}{4}$

277)

함수 $f(x)=x^3-2x+1$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=2$인 점에서의 접선의 기울기를 구하시오.

278)

미분 가능한 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 기울기가 $3$일 때, 함수 $y=f(x)\{f(x)+x\}$의 그래프 위의 점 $(1,\ a)$에서의 접선의 기울기는 $b$이다. $a+b$의 값을 구하시오.

279)

곡선 $y=x^3-2x^2$ 위의 점 $(2, 0)$에서의 접선과 $x$축, $y$축으로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① 7 ② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 11

280)

함수 $f(x)=x^3-2x^2+x$의 그래프 위의 점 $(0, 0)$에서의 접선과 평행한 접선이 존재할 때, 이 접선의 접점의 0이 아닌 $x$좌표는?

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ 2
④ $\frac{6}{3}$ ⑤ $\frac{8}{3}$

281)

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 모두 만족시킨다.

(가) 모든 실수 $x$에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이다.
(나) 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(1, 0)$을 지난다.

함수 $g(x)$를 $g(x)=f(x)-f'(x)$라 할 때, 함수 $g(x)$가 극값을 갖는 $x$값을 $\alpha$, $\beta$라 할 때, $\alpha+\beta$의 값을 구하시오.

282)

삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$는 $x=-1$에서 극댓값 $M$을 갖고 $x=1$에서 극솟값 $m$을 갖는다. $M=2m$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. (단, $a$, $b$, $c$는 상수이다.)

373)

원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 $t$초 후의 $x$좌표가 $x=t^3-\frac{9}{2}t^2+6t$로 주어질 때, 원점을 출발한 후 처음 3초 동안 점 P가 움직인 거리는 $a$이다. $10a$의 값을 구하시오.

374)

원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t$에서의 속도 $v(t)$는

$$v(t)=t^2-7t+12$$

이다. 점 P가 출발한 후 운동 방향이 두 번째로 바뀌는 순간의 점 P의 위치는?

① $\frac{32}{3}$ ② $\frac{34}{3}$ ③ 12 ④ $\frac{38}{3}$ ⑤ $\frac{40}{3}$

375)

수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q가 원점을 출발한 지 $t$초가 되는 순간, 두 점 P, Q의 속도를 각각 $v_P(t)$, $v_Q(t)$라 하면

$$v_P(t)=-2t+3,\ v_Q(t)=3t^2-3$$

이 성립한다. 두 점 P, Q가 원점을 동시에 출발한 지 $s$초 후에 다시 만난다고 할 때, $s$의 값은? (단, $t>0$, $s>0$)

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2

④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

$\lim_{x\to2-} h(x) = \lim_{x\to2-} f(x)g(x)$

$= \lim_{x\to2-} f(x) \lim_{x\to2-} g(x) = (4+2a)\times(-1) = -4-2a$

따라서, $4+2a=-4-2a$ 이므로 $a=-2$

(i), (ii)에 의하여 $f(x)=x^2-2x$ 이므로

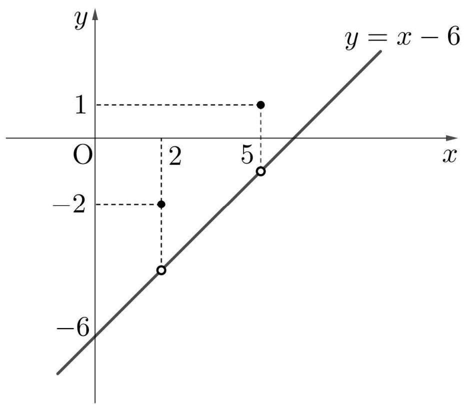
$f(5)=15$

80) 정답 ⑤

$f(x)=\begin{cases} x-3 \ (x\neq2) \\ \ 1 \quad (x=2) \end{cases}$ 이고,

$(f \circ f)(x)=\begin{cases} x-6 \ (x\neq2, x\neq5) \\ -2 \ (x=2) \\ \ 1 \ \ (x=5) \end{cases}$

이므로 $y=(f \circ f)(x)$의 그래프는 다음과 같다.




따라서 합성함수 $(f \circ f)(x)$는 $x=2$ 또는 $x=5$에서 불연속이므로 $0\leq a\leq6$에서 모든 $a$의 값의 합은 $2+5=7$

[랑데뷰팁] - 랑데뷰세미나(70번) 참고

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이므로

합성함수 $f(f(x))$은 $x=2$와 $f(x)=2$인 점에서 연속성을 조사하면 되므로 $x=2$와 $x=5$에서만 조사하면 된다.

81) 정답 ③

ㄱ. $\lim_{x\to0+} f(x)=1$이므로 ㄱ은 참.

ㄴ. $\lim_{x\to2-} f(x)=1$이므로 ㄴ은 거짓.

ㄷ. $|f(2)|=|-1|=1$이고

$\lim_{x\to2-}|f(x)|=|1|=1$, $\lim_{x\to2+}|f(x)|=|-1|=1$

이므로 $|f(x)|$는 $x=0$에서 연속이다. 따라서 ㄷ은 참.

그러므로 옳은 것은 ㄱ,ㄷ이다.

82) 정답 ①

함수 $g(x)=f(x)\{f(x)+k\}$ 가 $x=0$ 에서 연속이 되기 위해

$g(0)=\lim_{x\to0-} g(x)=\lim_{x\to0+} g(x)$

$g(0)=\lim_{x\to0-} g(x)=f(0)\{f(0)+k\}=2\times(2+k)$

$\lim_{x\to0+} g(x)=\lim_{x\to0+} f(x)\{f(x)+k\}=0\times k$

$\therefore k=-2$

83) 정답 ③

$0<x<1$일 때, $f(x)=\dfrac{1-x}{x}$

$1<x<2$일 때, $f(x)=\dfrac{2-x}{x-1}$

ㄱ. $\lim_{x\to1-} f(x)g(x)=\lim_{x\to1-}\left\{-\dfrac{(x-1)^3}{x}\right\}=0$,

$\lim_{x\to1+} f(x)g(x)=\lim_{x\to1+}(2-x)(x-1)=0$

$\therefore \lim_{x\to1} f(x)g(x)=0$

이때, $f(1)g(1)=0\times0=0$이므로

$y=f(x)g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

ㄴ. $\lim_{x\to1-} f(x)g(x)=\lim_{x\to1-}\dfrac{1-x}{x}\{(x-1)^3+1\}=0$

$\lim_{x\to1+} f(x)g(x)=\lim_{x\to1+}\dfrac{2-x}{x-1}\{(x-1)^3+1\}=\infty$

따라서 $\lim_{x\to1} f(x)g(x)$의 값이 존재하지 않으므로

$y=f(x)g(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

ㄷ. $\lim_{x\to1-} f(x)g(x)=\lim_{x\to1-}\dfrac{1-x}{x}(x^2+1)=0$

$$\lim_{x\to1+} f(x)g(x) = \lim_{x\to1+} \frac{2-x}{x-1}(x-1)^3$$

$$= \lim_{x\to1+}(2-x)(x-1)^2 = 0$$

$\therefore \lim_{x\to1} f(x)g(x) = 0$

이때, $f(1)g(1) = 0\times2 = 0$이므로

$y = f(x)g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

따라서 연속인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

**[랑데뷰팁]**

$y=\frac{1}{x}-1$의 그래프는 $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 $y$축의 방향으로 $-1$만큼 평행이동한 것이고,

$y=\frac{1}{x-1}-1$의 그래프는 $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $1$만큼, $y$축의 방향으로 $-1$만큼 평행이동한 것이다.

이를 이용하여 $f(x)$와 $g(x)$의 그래프를 그려서 생각하면 좀 더 쉽게 연속성을 파악할 수 있다.

84) 정답 ⑤

$$f(x) = \begin{cases} x & (x>0) \\ a & (x=0) \\ \frac{1}{3}x & (x<0) \end{cases}$$

ㄱ. $f(-3) = -1$ $\therefore$ 거짓

ㄴ. $x>0$, $f(x) = x$ $\therefore$ 참

ㄷ. $\lim_{x\to0} f(x) = 0$, $f(0) = a$이므로

$a=0$일 때 $\lim_{x\to0} f(x) = 0$ $\therefore$ 참

따라서, 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

85) 정답 ④

(i) $a=0$일 때, $-4x+2=0$ $\therefore x=\frac{1}{2}$

즉, $f(0)=1$

(ii) $a\neq0$일 때,

이차방정식 $ax^2+2(a-2)x-(a-2)=0$의 판별식을 D라 하면

$D/4 = (a-2)^2 + a(a-2) = 2(a-1)(a-2)$

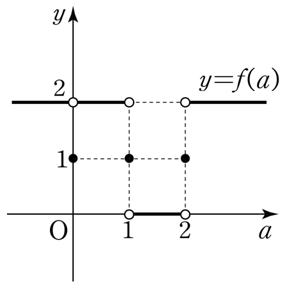
즉, 이 이차방정식은 $a=1$ 또는 $a=2$일 때 중근을 갖고, $1<a<2$일 때 실근을 갖지 않고,

$a<1$ 또는 $a>2$일 때 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서, 함수 $f(a)$는 $f(0)=f(1)=f(2)=1$,

$1<a<2$일 때 $f(a)=0$,

$a<0$ 또는 $0<a<1$ 또는 $a>2$일 때 $f(a)=2$




ㄱ. (거짓) $\lim_{a\to0} f(a) = 2$,

$f(0)=1$, $\lim_{a\to0} f(a) \neq f(0)$

ㄴ. (참) $\lim_{a\to c+} f(a) \neq \lim_{a\to c-} f(a)$를 만족하는 c는 1, 2의 2개다.

ㄷ. (참) 함수 $f(a)$가 불연속인 점은 $a=0$, $a=1$, $a=2$ 일 때의 3개이다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

86) 정답 ③

ㄱ. $x>1$에서 $f(x)=-x+2$이므로

$\lim_{x\to1+} f(x) = \lim_{x\to1+}(-x+2) = 1$ (참)

ㄴ. $x\leq1$에서 $f(x)=a$이므로

$\lim_{x\to1-} f(x) = \lim_{x\to1-} a = \lim_{x\to1-} 0 = 0$

이므로 ㄱ에서 $\lim_{x\to1+} f(x) \neq \lim_{x\to1-} f(x)$

즉, $\lim_{x\to1} f(x)$의 극한값이 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다. (거짓)

ㄷ. 함수 $g(x)=(x-1)f(x)$에 대하여

$\lim_{x\to1+} g(x)$

$= \lim_{x\to1+}(x-1)f(x)$

$= \lim_{x\to1+}(x-1)(-x+2) = 0$

$\lim_{x\to1-} g(x) = \lim_{x\to1-}(x-1)f(x) = \lim_{x\to1-} a(x-1) = 0$