수열의 극한

2

2 수열의 극한

이 단원에서 출제되는 논제의 형태는 세 가지로 정리할 수 있다.

수열의 극한 단원의 논제형태 I

$\boxed{a_n\text{을 } n\text{에 관한 식으로 나타낼 수 있는 조건}}$을 만족하는 a_n에 대해,

극한 $\lim_{n\to\infty}\boxed{a_n\text{에 관한 식}}$을 구하시오.

위 논제형태와 같이

[논제조건] 이 **a_n을 n에 관한 식으로 나타낼 수 있는 조건**이고

[논제의 결론] 이 수열의 극한 $\lim_{n\to\infty}\boxed{a_n\text{에 관한 식}}$을 구하라는 것이면

먼저 $\boxed{a_n\text{을 } n\text{에 관한 식으로 나타낼 수 있는 조건}}$을 이용하여

a_n을 n에 관한 식으로 나타낸 뒤,

나타낸 $a_n=\boxed{n\text{에 관한 식}}$을 이용하여

주어진 극한 식을 정리하자.

$$\lim_{n\to\infty}\boxed{a_n\text{에 관한 식}}=\lim_{n\to\infty}\boxed{n\text{에 관한 식}}=\cdots=\lim_{n\to\infty}\boxed{\text{정리된 식}}$$

그런 다음

도출된 $\lim_{n\to\infty}\boxed{\text{정리된 식}}$이

다음 ⅰ), ⅱ), ⅲ) 중 어느 꼴에 해당하는지 확인하자.

ⅰ) 수렴하는 꼴	c 꼴(상수 꼴), $\frac{1}{\infty}$ 꼴 등이 이 꼴에 해당한다. 예) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} \rightarrow \frac{1}{\infty}$ 꼴
ⅱ) 발산하는 꼴	$\pm\infty$ 꼴, 진동 꼴 등이 이 꼴에 해당한다. 예) $\lim_{n\to\infty}(-1)^n \rightarrow$ 진동 꼴
ⅲ) 수렴과 발산을 알 수 없는 꼴	$\pm\frac{\infty}{\infty}$ 꼴, $\frac{\text{진동}}{\infty}$ 꼴 등이 이 꼴에 해당한다. 예) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2^n}$, $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n} \rightarrow \frac{\infty}{\infty}$ 꼴

i) $\lim_{n \to \infty}$ $\boxed{\text{정리된 식}}$ **이 수렴하는 꼴에 해당하면**

극한값을 도출하면서 계산을 마무리하면 되고,

서술은 다음과 같이 하면 된다.

서술예시

$\boxed{\text{논제조건}}$ 이 성립하므로 $a_n = \boxed{n\text{에 관한 식}}$ 이다.

이때 논제에 주어진 극한을 계산하면

$$\lim_{n \to \infty} \boxed{a_n\text{에 관한 식}} = \lim_{n \to \infty} \boxed{n\text{에 관한 식}}$$

$$\vdots$$

$$= \lim_{n \to \infty} \boxed{\text{정리된 식 (수렴하는 꼴)}}$$

$$= \alpha$$

이다.

ii) $\lim_{n \to \infty}$ $\boxed{\text{정리된 식}}$ **이 발산하는 꼴에 해당하면**

'∞' 또는 '$-\infty$'로 계산을 마무리하거나

'주어진 극한은 발산한다.'라고 서술하여 계산을 마무리하면 되고,

서술은 다음과 같이 하면 된다.

서술예시

$\boxed{\text{논제조건}}$ 이 성립하므로 $a_n = \boxed{n\text{에 관한 식}}$ 이다.

이때 논제에 주어진 극한을 계산하면

$$\lim_{n \to \infty} \boxed{a_n\text{에 관한 식}} = \lim_{n \to \infty} \boxed{n\text{에 관한 식}}$$

$$\vdots$$

$$= \lim_{n \to \infty} \boxed{\text{정리된 식 (발산하는 꼴)}}$$

$$= \infty$$

이다.

iii) $\lim_{n\to\infty}$ $\boxed{\text{정리된 식}}$ **이 수렴과 발산을 알 수 없는 꼴에 해당하면**

극한값을 직접 도출하거나 **발산한다**는 결론을 낼 수 없으므로

극한값을 도출할 수 있는 정리인

극한의 대소 관계를 이용하여 극한값을 도출해야 한다.

교과서 개념체크

1 **수열의 극한의 대소 관계**

수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$이

[정리의 조건 ①] 모든 자연수 n에 대하여 $b_n \le a_n \le c_n$이고

[정리의 조건 ②] $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$이면 **[정리의 결론]** $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$이다.

극한의 대소 관계를 이용하여

$\lim_{n\to\infty}$ $\boxed{\text{정리된 식(수렴과 발산을 알 수 없는 꼴)}}$ 의 값을 도출할 때는

먼저 $\boxed{\text{정리된 식(수렴과 발산을 알 수 없는 꼴)}}$ 에서

수렴과 발산을 알 수 없는 부분$(=I_n)$을 찾아내고

'$\lim_{n\to\infty} I_n$만 계산해보자.'라고 서술하자.

그런 다음

논제조건으로 주어진 **부등식 조건** 또는 **항상 성립하는 조건**인 **절대부등식**을 근거로

[정리의 조건 ①] $b_n \le I_n \le c_n$을 도출하고

[정리의 조건 ②] $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$를 만족함을 보인 뒤,

[정리의 결론] '$\lim_{n\to\infty} I_n = \alpha$'를 도출하자.

이때 얻은 **[정리의 결론]** '$\lim_{n\to\infty} I_n = \alpha$'를 이용하여

$\lim_{n\to\infty}$ $\boxed{\text{정리된 식(수렴과 발산을 알 수 없는 꼴)}}$ 의 값을 도출하면 된다.

서술은 다음과 같이 하면 된다.

서술예시

$\boxed{\text{논제조건}}$ 이 성립하므로

$$a_n = \boxed{n\text{에 관한 식}}$$

이다.

이때 논제에 주어진 극한을 계산하면

$$\lim_{n\to\infty} \boxed{a_n\text{에 관한 식}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \boxed{n\text{에 관한 식}}$$

$$\vdots$$

$$= \lim_{n\to\infty} \boxed{\text{정리된 식 (수렴과 발산을 알 수 없는 꼴)}} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이다.

이때 $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$ 만 계산해보자.

$\boxed{\text{근거 조건 (논제조건으로 주어진 부등식 조건 또는 절대부등식)}}$ 이 성립하므로

$$b_n \le I_n \le c_n$$

을 만족하고

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \boxed{\text{정리된 식}} = \alpha$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \boxed{\text{정리된 식}} = \alpha$$

이다. 따라서 **극한의 대소 관계**에 의해

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \alpha$$

이다.

이를 이용하여 ㉠을 계산해보면

$$\lim_{n\to\infty} \boxed{\text{정리된 식 (수렴과 발산을 알 수 없는 꼴)}} = \boxed{\text{도출된 값}}$$

이다.

수열의 극한 단원의 논제형태 II

a_n에 관한 극한값 조건 $\left(\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha,\ \lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_n}=0,\ \cdots\right)$ 을 만족할 때,

극한 $\lim_{n\to\infty}$ $\boxed{a_n\text{에 관한 식}}$ 을 구하시오.

위 논제형태와 같이

[논제조건] 이 **a_n에 관한 극한값 조건**이고

[논제의 결론] 이 수열의 극한 $\lim_{n\to\infty}$ $\boxed{a_n\text{에 관한 식}}$ 을 구하라는 것이면

수열의 극한에 대한 성질을 이용하여

교과서 개념체크

1 수열의 극한에 대한 성질

수렴하는 두 수열 $\{b_n\}$, $\{c_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$, $\lim_{n\to\infty} c_n=\gamma$일 때,

다음 등식이 성립한다. (단, β, γ는 실수)

i) (합, 차) $\lim_{n\to\infty}(b_n \pm c_n) = \lim_{n\to\infty} b_n \pm \lim_{n\to\infty} c_n = \beta \pm \gamma$ (복부호동순)

ii) (상수배) $\lim_{n\to\infty} kb_n = k\lim_{n\to\infty} b_n = k\beta$ (단, k는 상수)

iii) (곱) $\lim_{n\to\infty} b_n c_n = \lim_{n\to\infty} b_n \times \lim_{n\to\infty} c_n = \beta\gamma$

iv) (몫) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{c_n} = \dfrac{\lim_{n\to\infty} b_n}{\lim_{n\to\infty} c_n} = \dfrac{\beta}{\gamma}$ (단, $\gamma \neq 0$)

극한 $\lim_{n\to\infty}$ $\boxed{a_n\text{에 관한 식}}$ 을

다음 수렴하는 극한 식들의 합, 차, 상수배, 곱, 몫으로 나타낸 뒤,

i) 논제조건의 극한 식	예) 논제조건 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$의 극한 식 $\lim_{n\to\infty} a_n$
ii) 극한 공식을 이용한 극한 식	예) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$를 이용한 극한 식 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{n^2}$
iii) 연속함수를 이용한 극한 식	예) 연속함수 $y=e^x$을 이용한 극한 식 $\lim_{n\to\infty} e^{a_n}$

극한값을 구하면 된다.

예를 들어 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 1$을 이용하여 극한 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n e^{na_n}$을 구할 때는

다음과 같이 서술하면 된다.

서술예시

논제에 주어진 극한을 계산하면

$$\lim_{n\to\infty} a_n e^{na_n} = \underbrace{\boxed{\lim_{n\to\infty} na_n}}_{\text{논제조건의 극한 식}} \times \overbrace{\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}}}^{\text{극한 공식을 이용한 극한 식}} \times \underbrace{\boxed{\lim_{n\to\infty} e^{na_n}}}_{\text{연속함수를 이용한 극한 식}}$$

$$= 1 \times 0 \times e^1$$

$$= 0$$

이다.

또는 논제에 주어진 극한 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n e^{na_n}$을 계산하기 전에

수렴하는 극한 식들을 이용하여 **새로운 극한값 조건 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$**을 도출한 다음

논제에 주어진 극한 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n e^{na_n}$을

새로운 극한값 조건의 수렴하는 극한 식 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$과

p.20의 수렴하는 극한 식들의 합, 차, 상수배, 곱, 몫으로 나타낸 뒤,

극한값을 구해도 좋다.

서술예시

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} na_n \times \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 1 \times 0 = 0$임을 이용하여

주어진 극한을 계산하면

$$\lim_{n\to\infty} a_n e^{na_n} = \underbrace{\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n}}_{\text{새로운 극한값 조건의 극한 식}} \times \underbrace{\boxed{\lim_{n\to\infty} e^{na_n}}}_{\text{연속함수를 이용한 극한 식}}$$

$$= 0 \times e^1$$

$$= 0$$

이다.

수열의 극한 단원의 논제형태III

$\boxed{a_n\text{에 관한 부등식을 도출할 수 있는 부등식 조건}}$ 을 만족할 때,

극한 $\lim_{n\to\infty}\boxed{a_n\text{에 관한 식}}$ 을 구하시오.

위 논제형태와 같이

[논제조건] 이 ***a_n* 에 관한 부등식을 도출할 수 있는 부등식 조건**이고

[논제의 결론] 이 수열의 극한 $\lim_{n\to\infty}\boxed{a_n\text{에 관한 식}}$ 을 구하라는 것인 경우

극한 $\lim_{n\to\infty}\boxed{a_n\text{에 관한 식}}$ 의 값을 직접 도출할 수 없는 경우에 해당하므로[2)]

극한값을 도출할 수 있는 정리인 **극한의 대소 관계**를 이용하여 극한값을 도출해야 한다.

2) 부등식 조건으로부터 또 다른 부등식 조건을 도출하는 것은 가능하지만,

부등식 조건으로부터 극한값을 직접 도출하는 것은 불가능하다.

교과서 개념체크

1 수열의 극한의 대소 관계

수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$이

[정리의 조건 ①] 모든 자연수 n에 대하여 $b_n \le a_n \le c_n$이고

[정리의 조건 ②] $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$이면 **[정리의 결론]** $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$이다.

극한의 대소 관계를 이용하여

$\lim_{n\to\infty}\boxed{a_n\text{에 관한 식}}$ 의 값을 도출할 때는

논제조건으로 주어진 $\boxed{a_n\text{에 관한 부등식을 도출할 수 있는 부등식 조건}}$ 또는

항상 성립하는 조건인 **절대부등식**을 근거로

[정리의 조건 ①] $b_n \le \boxed{a_n\text{에 관한 식}} \le c_n$을 도출하고

[정리의 조건 ②] $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$를 만족함을 보인 뒤,

[정리의 결론] '$\lim_{n\to\infty}\boxed{a_n\text{에 관한 식}} = \alpha$'를 도출하면 된다.

서술은 다음과 같이 하면 된다.

서술예시

$\boxed{a_n\text{에 관한 부등식을 도출할 수 있는 부등식 조건}}$ 이 성립하므로

$$b_n \le \boxed{a_n\text{에 관한 식}} \le c_n$$

을 만족하고

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \boxed{\text{정리된 식}} = \alpha$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \boxed{\text{정리된 식}} = \alpha$$

이다.

따라서 **극한의 대소 관계**에 의해

$$\lim_{n\to\infty} \boxed{a_n\text{에 관한 식}} = \alpha$$

이다.

논제 3 2019학년도 인하대학교 자연계열 오전 수시논술

(가) 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ 사이의 거리는 다음과 같다.

$$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

(나) 서로 다른 두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$를 지나는 직선의 방정식은 다음과 같다.

$x_1 \neq x_2$일 때, $y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$

$x_1=x_2$일 때, $x=x_1$

좌표평면에서 자연수 n에 대하여 곡선 $y=\sqrt{x}$ (단, $x \geq 0$) 위의 점 A_n이

$$\overline{\mathrm{OA}_n}=\frac{1}{n^2}$$

을 만족할 때, A_n의 x좌표를 a_n이라 하자. 두 점 A_n과 $\left(0,\ \dfrac{1}{n^2}\right)$을 지나는 직선의 x절편을 b_n이라 하자. (단, O는 원점이다.)

(1) 극한 $\lim\limits_{n\to\infty} n^4 a_n$을 구하시오.

(2) 극한 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$을 구하시오.

논리적인 답안을 위해

논제조건과 **논제의 결론**을 파악하면 다음과 같다.

논제 3 2019학년도 인하대학교 자연계열 오전 수시논술

(제시문 생략)

좌표평면에서 자연수 n에 대하여 곡선 $y=\sqrt{x}$ (단, $x \geq 0$) 위의 점 A_n이

[논제조건 ①] $\overline{\mathrm{OA}_n}=\dfrac{1}{n^2}$

을 만족할 때, A_n의 x좌표를 a_n이라 하자.

(1) **[논제의 결론]** 극한 $\lim\limits_{n\to\infty} n^4 a_n$을 구하시오.

논제 (1)의 경우

[논제조건] 이 **a_n을 n에 관한 식으로 나타낼 수 있는 조건** $\overline{\mathrm{OA}_n}=\dfrac{1}{n^2}$이고

[논제의 결론] 이 극한 $\lim\limits_{n\to\infty} n^4 a_n$을 구하라는 것이므로

먼저 $\overline{\mathrm{OA}_n}=\dfrac{1}{n^2}$을 이용하여

a_n을 n에 관한 식으로 나타낸 뒤,

나타낸 $a_n=\dfrac{-1+\sqrt{1+\dfrac{4}{n^4}}}{2}$를 이용하여

주어진 극한 식을 정리하자.

$$\lim_{n\to\infty} n^4 a_n=\lim_{n\to\infty}\boxed{n\text{에 관한 식}}=\cdots=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\dfrac{4}{n^4}}+1}$$

그런 다음

도출된 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{\sqrt{1+\dfrac{4}{n^4}}+1}$가

다음 i), ii), iii) 중 어느 꼴에 해당하는지 확인하자.

ⅰ) 수렴하는 꼴	c 꼴(상수 꼴), $\frac{1}{\infty}$ 꼴 등이 이 꼴에 해당한다.
ⅱ) 발산하는 꼴	$\pm\infty$ 꼴, 진동 꼴 등이 이 꼴에 해당한다.
ⅲ) 수렴과 발산을 알 수 없는 꼴	$\pm\frac{\infty}{\infty}$ 꼴, $\frac{\text{진동}}{\infty}$ 꼴 등이 이 꼴에 해당한다.

도출된 $\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{4}{n^4}}+1}$ 는 c 꼴(상수 꼴)로 **수렴하는 꼴**에 해당한다.

따라서 **극한값을 도출하면서** 계산을 마무리하면 된다.

논제 (1)의 해설은 다음과 같다.

점 $\mathrm{A}_n(a_n, \sqrt{a_n})$이 $\overline{\mathrm{OA}_n}=\frac{1}{n^2}$을 만족하므로

$$\sqrt{a_n^2+a_n}=\frac{1}{n^2}$$

이다. 양변을 제곱하여 한쪽으로 정리하면

$$a_n^2+a_n-\frac{1}{n^4}=0$$

이고 근의 공식을 이용하여 a_n (단, $a_n>0$)을 구하면

$$a_n=\frac{-1+\sqrt{1+\frac{4}{n^4}}}{2}$$

이다.

이때 논제에 주어진 극한을 계산하면

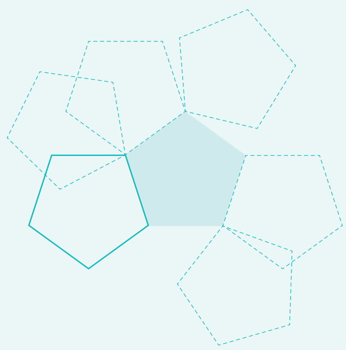
$$\lim_{n\to\infty}n^4a_n=\lim_{n\to\infty}n^4\times\left\{\frac{-1+\sqrt{1+\frac{4}{n^4}}}{2}\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{4}{n^4}}+1}=1$$

이다.

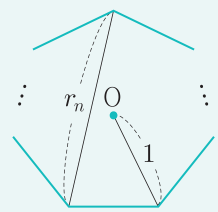
논제 4 : 실전논제 30min

2021학년도 홍익대학교 자연계열 오전 수시논술

아래 [그림 1]과 같이 중심에서 꼭짓점까지의 거리가 1인 정n각형 두 개가 꼭짓점을 맞대며 한 변에서 서로 접하고 있다. 두 도형 중 하나의 '고정 도형'은 제 자리에 고정되어 있다. 나머지 하나의 '회전 도형'이 꼭짓점을 축으로 다음 변이 접할 때까지 회전하고, 이를 반복하여 '고정 도형'의 주위를 돌아 원래 자리까지 움직인다. (단, 정n각형의 중심은 외접원의 중심이다.)



[그림 1]



[그림 2]

(1) $n=3$일 때 '회전 도형'이 훑고 지나간 면적을 구하시오.

(2) n이 3 이상의 홀수일 때 [그림 2]와 같이 중심 O에서 꼭짓점까지의 거리가 1인 정n각형의 가장 먼 두 꼭짓점 사이의 거리를 r_n이라 하자. $r_n = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)$임을 보이시오.

(3) n이 3 이상의 홀수일 때, '회전 도형'이 훑고 지나간 면적을 S_n이라 하자. S_n의 식을 구하고, $\displaystyle\lim_{k\to\infty} S_{2k+1}$을 구하시오. (단, k는 자연수이다.)

(가) 자연수 n에 대하여 다음이 성립한다.

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

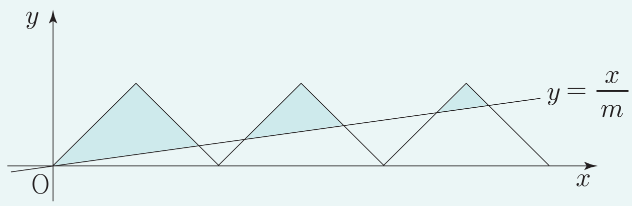
(나) 함수 $y=f(x)$는 $0 \le x \le 2$일 때 $f(x)=1-|1-x|$를 만족하고,

음이 아닌 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$를 만족한다.

이때, 아래 그림의 색칠한 부분과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프와

직선 $y=\frac{x}{m}$로 둘러싸인 영역의 넓이를 $g(m)$이라고 하자.

(단, $m>1$인 실수)



(다) 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하고 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$일 때,

수열 $\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le c_n \le b_n$이고 $\alpha=\beta$이면

$\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$이다.

(1) 제시문 (나)에서 $m=4$일 때, $g(4)$의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

(2) 양의 실수 m이 자연수 n에 대하여 $2n-1 \le m < 2n+1$을 만족할 때,

제시문 (나)에서 $3(n-g(m))$의 값은 어떤 다항식 $h(n)$에 대하여

$3(n-g(m)) = \frac{h(n)}{m+1} - \frac{h(n-1)}{m-1}$로 쓰여진다.

이때, 다항식 $h(n)$을 n에 대한 식으로 표현하고 그 이유를 논하시오.

(3) 제시문 (나)에서 극한 $\lim_{m\to\infty} \frac{g(m)}{m}$의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

논제 6 2011학년도 서강대학교 자연계열 2차 수시논술 변형

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 각각 α와 β에 수렴할 때, 임의의 실수 p, q에 대해 수열 $\{pa_n + qb_n\}$은 $p\alpha + q\beta$에 수렴한다.

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 2$를 만족할 때, 다음 극한값을 구하시오.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n + b_n}{2a_n - 3b_n}$$

논리적인 답안을 위해

논제조건과 **논제의 결론**을 파악하면 다음과 같다.

논제 6 2011학년도 서강대학교 자연계열 2차 수시논술 변형

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 각각 α와 β에 수렴할 때, 임의의 실수 p, q에 대해 수열 $\{pa_n+qb_n\}$은 $p\alpha+q\beta$에 수렴한다.

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 **[논제조건 ①]** $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$, **[논제조건 ②]** $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=2$를 만족할 때, 다음 극한값을 구하시오.

[논제의 결론] $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+b_n}{2a_n-3b_n}$

위 논제는

[논제조건] 이 a_n, b_n**에 관한 극한값 조건** $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=2$ 이고

[논제의 결론] 이 극한값 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+b_n}{2a_n-3b_n}$을 구하라는 것이므로

수열의 극한에 대한 성질을 이용하여

극한 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+b_n}{2a_n-3b_n}$을 **다음 수렴하는 극한 식들의 합, 차, 상수배, 곱, 몫으로 나타낸 뒤,**

i) 논제조건의 극한 식	예) 논제조건 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$의 극한 식 $\lim_{n\to\infty} a_n$
ii) 극한 공식을 이용한 극한 식	예) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$를 이용한 극한 식 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$
iii) 연속함수를 이용한 극한 식	예) $f(x)=e^x$을 이용한 극한 식 $\lim_{n\to\infty} e^{a_n}$

극한값을 구하면 된다.

해설은 다음과 같다.

논제에 주어진 극한을 계산하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+b_n}{2a_n-3b_n}=\frac{\lim_{n\to\infty}2-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}\times\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)}{\lim_{n\to\infty}(-1)+\lim_{n\to\infty}\frac{3}{a_n}\times\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)}$$
$$=\frac{2-0\times2}{-1+0\times2}$$
$$=-2$$

이다.

또는 극한 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+b_n}{2a_n-3b_n}$ 을 계산하기 전에

수렴하는 극한 식들을 이용하여 **새로운 극한값 조건** $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=1}$ 을 도출한 다음

극한 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+b_n}{2a_n-3b_n}$ 을

새로운 극한값 조건의 수렴하는 극한 식 $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}}$ 과

p.34의 수렴하는 극한 식들의 합, 차, 상수배, 곱, 몫으로 나타낸 뒤,

극한값을 구해도 좋다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}\cdot\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{b_n}{a_n}\right)=0$$이 성립하므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}1-\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{b_n}{a_n}\right)=1$$

이다. 이를 이용하여 논제에 주어진 극한을 계산하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+b_n}{2a_n-3b_n}=\frac{\lim_{n\to\infty}1+\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}}{\lim_{n\to\infty}2-3\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}}=-2$$

이다.

논제 7 : 실전논제 10min

2019학년도 한양대학교 자연계열 오후 II 수시논술

무리수 e를 다음과 같이 정의한다.

$$e = \lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = 2.718281828459045 \cdots$$

양의 실수로 이루어진 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n \to \infty}(a_n)^n = 2019$일 때,

극한값 $\lim_{n \to \infty} n(a_n - 1)$을 구하시오.

논제 8 : 실전논제 15min

2019학년도 한양대학교 의예과 수시논술

무리수 e를 다음과 같이 정의한다.

$$e=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=2.71828182845904\cdots$$

양의 실수로 이루어진 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}(a_n)^n=27$, $\lim_{n\to\infty}(b_n)^n=64$ 일 때, 극한값 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}a_n+\frac{2}{3}b_n\right)^n$ 을 구하시오.

논제 9 2021학년도 서강대학교 자연계열 1차 모의논술

모든 자연수 n에 대하여 $0 \le a_n \le b_n$이고 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이다.

a가 양의 실수일 때 모든 자연수 n에 대하여 다음 부등식이 성립한다.

$$(1+a)^{n+1} \ge \frac{n^2}{2}a^2$$

이 부등식을 이용하여 $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$을 보이시오.

논리적인 답안을 위해

논제조건과 **논제의 결론**을 파악하면 다음과 같다.

논제 9 2021학년도 서강대학교 자연계열 1차 모의논술

모든 자연수 n에 대하여 $0 \le a_n \le b_n$이고 $\lim_{n \to \infty} b_n = 0$이면 $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$이다.

a가 양의 실수일 때 모든 자연수 n에 대하여 다음 부등식이 성립한다.

[논제조건 ①] $(1+a)^{n+1} \ge \frac{n^2}{2}a^2$

[논제의 결론] 이 부등식을 이용하여 $\lim_{n \to \infty} \frac{n}{2^n} = 0$을 보이시오.

위 논제는

[논제조건] 이 **$\frac{n}{2^n}$에 관한 부등식을 도출할 수 있는 부등식 조건 $(1+a)^{n+1} \ge \frac{n^2}{2}a^2$** 이고

[논제의 결론] 이 주어진 부등식을 이용하여 $\lim_{n \to \infty} \frac{n}{2^n} = 0$임을 보이라는 것이므로

극한 $\lim_{n \to \infty} \frac{n}{2^n}$의 값을 직접 도출할 수 없는 경우에 해당함을 알 수 있다.

따라서 **극한값을 도출할 수 있는 정리**인

제시문의 정리(=**극한의 대소 관계**)를 이용하여 극한값을 도출해야 한다.

[정리의 조건 ①] 모든 자연수 n에 대하여 $0 \le a_n \le b_n$이고

[정리의 조건 ②] $\lim_{n \to \infty} b_n = 0$이면 **[정리의 결론]** $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$이다.

제시문의 정리(=**극한의 대소 관계**)를 이용하여

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{n}{2^n}$의 값을 도출할 때는

논제조건으로 주어진 $(1+a)^{n+1} \geq \dfrac{n^2}{2}a^2$ 또는 **항상 성립하는 조건**인 **절대부등식**을 근거로

[정리의 조건 ①] $0 \leq \dfrac{n}{2^n} \leq \dfrac{4}{n}$를 도출하고

[정리의 조건 ②] $\lim_{n\to\infty} 0 = \lim_{n\to\infty}\dfrac{4}{n} = 0$을 만족함을 보인 뒤,

[정리의 결론] '$\lim_{n\to\infty}\dfrac{n}{2^n} = 0$'을 도출하면 된다.

해설은 다음과 같다.

논제의 부등식에 $a=1$을 대입하고 양변에 $\dfrac{1}{2^{n-1}\cdot n}$을 곱하면

$$\frac{n}{2^n} \leq \frac{4}{n}$$

이고 $0 \leq \dfrac{n}{2^n}$이 성립하므로

$$0 \leq \frac{n}{2^n} \leq \frac{4}{n}$$

를 만족한다. 또, 극한값을 계산하면

$$\lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n} = 0$$

이다.

따라서 **극한의 대소 관계**에 의해

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n} = 0$$

이다.

논제 10 : 실전논제 10min 2018학년도 한양대학교 자연계열 오후 I 수시논술

수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = L$이고

모든 자연수 n에 대하여 $a_n \leq c_n \leq b_n$이면 $\lim_{n\to\infty} c_n = L$이다.

자연수 n에 대하여 $d_n = \int_0^1 (1-x^n)^{\frac{1}{n}} dx$라 할 때, 극한값 $\lim_{n\to\infty} d_n$을 구하시오.

예시답안

수학II & 미적분 (상)

※ 본 예시답안은 대학에서 제공한 모범답안이 아닌, 서지현선생님이 직접 작성한 답안입니다.

▸ **논제 3 – 2019학년도 인하대학교 자연계열 오전 수시논술**

(1) 점 $\mathrm{A}_n(a_n,\ \sqrt{a_n})$이 $\overline{\mathrm{OA}_n}=\dfrac{1}{n^2}$을 만족하므로

$$\sqrt{a_n^2+a_n}=\frac{1}{n^2}$$

이다. 양변을 제곱하여 한쪽으로 정리하면

$$a_n^2+a_n-\frac{1}{n^4}=0$$

이고 근의 공식을 이용하여 a_n (단, $a_n>0$)을 구하면

$$a_n=\frac{-1+\sqrt{1+\dfrac{4}{n^4}}}{2}$$

이다.

이때 논제에 주어진 극한을 계산하면

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}n^4a_n&=\lim_{n\to\infty}n^4\times\left\{\frac{-1+\sqrt{1+\dfrac{4}{n^4}}}{2}\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\dfrac{4}{n^4}}+1}\\&=1\end{aligned}$$

이다.

(2) 두 점 $\mathrm{A}_n(a_n,\ \sqrt{a_n})$과 $\left(0,\ \dfrac{1}{n^2}\right)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y=\frac{\sqrt{a_n}-\dfrac{1}{n^2}}{a_n}x+\frac{1}{n^2}$$

이다. 이를 정리하면

$$y=\frac{n^2\sqrt{a_n}-1}{n^2a_n}x+\frac{1}{n^2}$$

이고 이 직선의 x절편을 구하면

$$\left(-\frac{a_n}{n^2\sqrt{a_n}-1},\ 0\right)$$

이다.

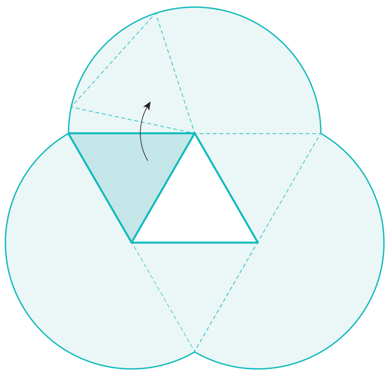
이때 논제에 주어진 극한을 계산하면

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}b_n&=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{1-n^2\sqrt{a_n}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n(n^2\sqrt{a_n}+1)}{1-n^4a_n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{-1+\sqrt{1+\dfrac{4}{n^4}}}{2}}{1-\dfrac{2}{\sqrt{1+\dfrac{4}{n^4}}+1}}\cdot(n^2\sqrt{a_n}+1)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{4}{n^4}}+1\right)\cdot(n^2\sqrt{a_n}+1)\\&=1\qquad(\because \text{ 논제 (1)에서 } \lim_{n\to\infty}n^4a_n=1)\end{aligned}$$

이다.

▸ **논제 4 – 2021학년도 홍익대학교 자연계열 오전 수시논술**

(1) $n=3$일 때 '회전 도형'이 훑고 지나간 영역을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



회전 도형이 훑고 지나간 면적은

한 변의 길이가 $\sqrt{3}$인 정삼각형 3개의 넓이와

반지름이 $\sqrt{3}$인 반원 3개의 넓이의 합과 같으므로

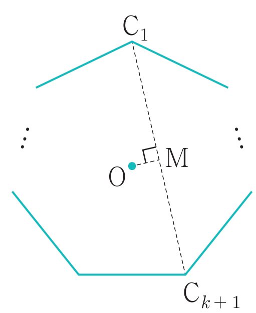
$$\frac{3\sqrt{3}}{4}\times 3+\frac{3\pi}{2}\times 3=\frac{9\sqrt{3}}{4}+\frac{9\pi}{2}$$

이다.

(2) n이 3 이상의 홀수이므로 $n=2k+1$이라 두자.

'고정 도형'의 꼭짓점을 시계방향 순서대로 C_1, C_2, $\cdots$, C_{2k+1}이라 두고

정n각형의 중심 O에서 선분 C_1C_{k+1}에 내린 수선의 발을 M이라 두자.

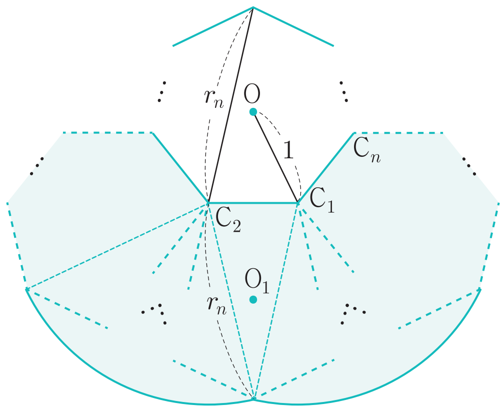


이때 정n각형의 가장 먼 두 꼭짓점 사이의 거리는

$$\begin{aligned} r_n &= \overline{C_1C_{k+1}} \\ &= 2\times\overline{C_1M} \\ &= 2\times\overline{C_1O}\times\cos(\angle OC_1M) \\ &= 2\cos\frac{\pi}{2n} \end{aligned}$$

이다.

(3) '회전 도형'이 훑고 지나간 영역을 그림으로 표현하면 다음과 같다.



'고정 도형'의 꼭짓점을 시계방향 순서대로 C_1, C_2, $\cdots$, C_n이라 둘 때,

회전 도형이 훑고 지나간 면적 S_n은

밑변의 길이가 $\overline{C_1C_2}$, 두 빗변의 길이가 $r_n = 2\cos\frac{\pi}{2n}$, 두 빗변의 끼인각이 $\frac{\pi}{n}$인 이등변 삼각형 n개의 넓이와

반지름이 $r_n = 2\cos\frac{\pi}{2n}$이고 중심각이 $\frac{3\pi}{n}$인 부채꼴 n개의 넓이의 합과 같으므로

$$S_n = 2n\cos^2\frac{\pi}{2n}\sin\frac{\pi}{n} + 6\pi\cos^2\frac{\pi}{2n}$$

이다.

이때 $\lim_{k\to\infty} S_{2k+1}$을 구하면

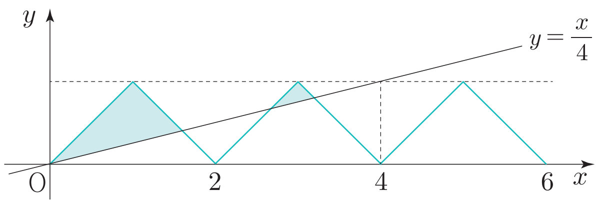
$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} S_{2k+1} &= \lim_{k\to\infty}\left\{2(2k+1)\cos^2\frac{\pi}{2(2k+1)}\sin\frac{\pi}{2k+1} + 6\pi\cos^2\frac{\pi}{2(2k+1)}\right\}\\ &= \lim_{k\to\infty}\left\{2\pi\cos^2\frac{\pi}{2(2k+1)}\frac{\sin\frac{\pi}{2k+1}}{\frac{\pi}{2k+1}} + 6\pi\cos^2\frac{\pi}{2(2k+1)}\right\}\\ &= 8\pi\end{aligned}$$

이다.

▸ 논제 5 – 2019학년도 성균관대학교 자연계열Ⅱ 수시논술

(1) 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{x}{4}$의 닫힌구간 $[1,\ 2]$에서의 교점의 좌표는 $\left(\dfrac{8}{5},\ \dfrac{2}{5}\right)$이고

닫힌구간 $[3,\ 4]$에서의 교점의 좌표는 $\left(\dfrac{16}{5},\ \dfrac{4}{5}\right)$이다.



이때 구간 $[0,\ 2]$에서 색칠된 부분의 넓이는

함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 영역의 넓이에서

세 꼭짓점이 $(0,\ 0)$, $(2,\ 0)$, $\left(\dfrac{8}{5},\ \dfrac{2}{5}\right)$인 삼각형의 넓이를 뺀 값이므로

$$\frac{1}{2}\times 2\times 1-\frac{1}{2}\times 2\times\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$$

이다.

또 구간 $[2,\ 4]$에서 색칠된 부분은 구간 $[0,\ 2]$에서 색칠된 부분과 닮음이고

두 도형의 닮음비는 점 $(1,\ 1)$과 점 $\left(\dfrac{8}{5},\ \dfrac{2}{5}\right)$를 이은 선분의 길이와

점 $(3,\ 1)$과 $\left(\dfrac{16}{5},\ \dfrac{4}{5}\right)$를 이은 선분의 길이비인

$$3:1$$

이다.

따라서 두 도형의 넓이비가 $9:1$임을 이용하여 구간 $[2,\ 4]$에서 색칠된 부분의 넓이를 구하면

$$\frac{3}{5}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{15}$$

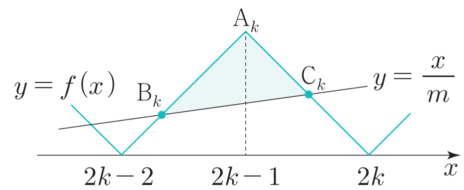
이다.

이때 $g(4)$는 위에서 구한 두 삼각형의 넓이의 합이므로

$$g(4)=\frac{3}{5}+\frac{1}{15}=\frac{2}{3}$$

이다.

(2) 구간 $[2k-2,\ 2k]$ (단, $1 \le k \le n$)에서



함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{x}{m}$가 만나는 두 교점을

B_k, C_k (단, (B_k의 x좌표)<(C_k의 x좌표))라 두자.

이때 함수 $f(x)=\begin{cases} x-2k+2 & (2k-2 \le x \le 2k-1) \\ -x+2k & (2k-1 < x \le 2k) \end{cases}$와 $y=\frac{x}{m}$를 연립하여 두 교점 B_k, C_k의 좌표를 구하면

$$B_k\left(\frac{m}{m-1}(2k-2),\ \frac{1}{m-1}(2k-2)\right),\quad C_k\left(\frac{2mk}{m+1},\ \frac{2k}{m+1}\right)$$

이다.

구간 $[2k-2,\ 2k]$에서의 색칠된 부분인 직각삼각형 $A_kB_kC_k$는

밑변의 길이가 $\overline{A_kC_k}=\sqrt{2}\times\left(1-\frac{2k}{m+1}\right)$이고 높이가 $\overline{A_kB_k}=\sqrt{2}\times\left(1-\frac{2k-2}{m-1}\right)$이므로

직각삼각형 $A_kB_kC_k$의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{A_kC_k}\times\overline{A_kB_k}=\frac{(m-2k+1)^2}{m^2-1}$$

이다.

직각삼각형 $A_kB_kC_k$의 넓이를 이용하여 $g(m)$을 구하면

$$\begin{aligned} g(m) &= \sum_{k=1}^{n}\frac{(m-2k+1)^2}{m^2-1} \\ &= \frac{1}{m^2-1}\sum_{k=1}^{n}\{4k^2-4k(m+1)+(m+1)^2\} \\ &= \frac{1}{m^2-1}\times\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}-\frac{2}{m-1}\times n(n+1)+\frac{m+1}{m-1}\times n \quad \cdots\cdots ㉠ \end{aligned}$$

이고 $3(n-g(m))$을 계산하여 정리하면

$$\begin{aligned} 3(n-g(m)) &= -3\left(\frac{1}{m^2-1}\times\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}-\frac{2}{m-1}\times n(n+1)+\frac{2}{m-1}\times n\right) \\ &= -3\left\{\left(\frac{1}{m-1}-\frac{1}{m+1}\right)\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}-\frac{2}{m-1}\times n(n+1)+\frac{2}{m-1}\times n\right) \\ &= \frac{1}{m+1}\times n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{m-1}\times(n-1)n(2n-1) \end{aligned}$$

이다. 따라서 $h(n)=n(n+1)(2n+1)$이다.

(3) 논제 (2)의 ㉠을 이용하여 논제에 주어진 극한을 계산하면

$$\lim_{m\to\infty}\frac{g(m)}{m}$$

$$=\lim_{m\to\infty}\left\{\frac{1}{m(m^2-1)}\times\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}-\frac{2}{m(m-1)}\times n(n+1)+\frac{m+1}{m(m-1)}\times n\right\}$$

$$=\lim_{m\to\infty}\left\{\frac{1}{1\left(1-\frac{1}{m^2}\right)}\times\frac{2\frac{n}{m}\left(\frac{n}{m}+\frac{1}{m}\right)\left(\frac{2n}{m}+\frac{1}{m}\right)}{3}-\frac{2}{1\left(1-\frac{1}{m}\right)}\times\frac{n}{m}\left(\frac{n}{m}+\frac{1}{m}\right)+\frac{1+\frac{1}{m}}{1\left(1-\frac{1}{m}\right)}\times\frac{n}{m}\right\}\quad\cdots\cdots㉡$$

이다.

이때 $\lim_{m\to\infty}\frac{n}{m}$만 계산해보자.

$2n-1\le m<2n+1$이므로

$$\frac{n}{2n+1}\le\frac{n}{m}\le\frac{n}{2n-1}$$

이고

$$\lim_{m\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{m\to\infty}\frac{n}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2-\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}$$

이므로 제시문 (다)에 의해

$$\lim_{m\to\infty}\frac{n}{m}=\frac{1}{2}$$

이다.

이를 이용하여 ㉡을 계산해보면

$$㉡=\frac{1}{6}$$

이다.

▸ 논제 6 – 2011학년도 서강대학교 자연계열 2차 수시논술 변형

논제에 주어진 극한을 계산하면

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+b_n}{2a_n-3b_n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n+b_n}{a_n}}{\frac{2a_n-3b_n}{a_n}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{a_n-b_n}{a_n}}{-1+\frac{3a_n-3b_n}{a_n}}\\&=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}2-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}\times\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)}{\lim\limits_{n\to\infty}(-1)+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{a_n}\times\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)}\\&=\frac{2-0\times 2}{-1+0\times 2}\\&=-2\end{aligned}$$

이다.

(별해) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{b_n}{a_n}\right)=0$이 성립하므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}1-\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{b_n}{a_n}\right)=1$$

이다.

이를 이용하여 논제에 주어진 극한을 계산하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+b_n}{2a_n-3b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}}{\lim\limits_{n\to\infty}2-3\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}}=-2$$

이다.

▸ 논제 7 - 2019학년도 한양대학교 자연계열 오후 II 수시논술

$\lim_{n\to\infty}(a_n)^n = 2019$를 이용하면

$$\lim_{n\to\infty} n \ln a_n = \ln 2019$$

이고 이를 이용하면

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\ln a_n &= \lim_{n\to\infty} n\ln a_n \times \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\\ &= \ln 2019 \times 0\\ &= 0\end{aligned}$$

이다. 따라서 $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$이다.

한편 $\lim_{n\to\infty}(a_n)^n = 2019$를 변형하면

$$\lim_{n\to\infty}(1+(a_n-1))^{\frac{1}{a_n-1}\cdot n(a_n-1)} = 2019$$

이고 이를 이용하면

$$\lim_{n\to\infty}\ln(1+(a_n-1))^{\frac{1}{a_n-1}\cdot n(a_n-1)} = \ln 2019$$

이다. 이를 정리하면

$$\lim_{n\to\infty} n(a_n-1)\ln(1+(a_n-1))^{\frac{1}{a_n-1}} = \ln 2019$$

이다.

두 극한값 $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$, $\lim_{n\to\infty} n(a_n-1)\ln(1+(a_n-1))^{\frac{1}{a_n-1}} = \ln 2019$를 이용하여

논제에 주어진 극한을 계산하면

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n(a_n-1) &= \lim_{n\to\infty} n(a_n-1)\ln(1+(a_n-1))^{\frac{1}{a_n-1}} \times \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(1+(a_n-1))^{\frac{1}{a_n-1}}}\\ &= \ln 2019 \times \frac{1}{\ln e}\\ &= \ln 2019\end{aligned}$$

이다.

▸ **논제 8 – 2019학년도 한양대학교 의예과 수시논술**

$\lim_{n\to\infty}(a_n)^n=27$을 이용하면

$$\lim_{n\to\infty}n\ln a_n=\ln 27$$

이고 이를 이용하면

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\ln a_n&=\lim_{n\to\infty}n\ln a_n\times\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\\&=\ln 27\times 0\\&=0\end{aligned}$$

이다. 따라서 $\lim_{n\to\infty}a_n=1$이다.

한편 $\lim_{n\to\infty}(a_n)^n=27$을 변형하면

$$\lim_{n\to\infty}\{1+(a_n-1)\}^{\frac{1}{a_n-1}\cdot n(a_n-1)}=27$$

이고 이를 이용하면

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+(a_n-1)\right)^{\frac{1}{a_n-1}\cdot n(a_n-1)}=\ln 27$$

이다. 이를 정리하면

$$\lim_{n\to\infty}n(a_n-1)\ln\left(1+(a_n-1)\right)^{\frac{1}{a_n-1}}=\ln 27$$

이다.

두 극한값 $\lim_{n\to\infty}a_n=1$, $\lim_{n\to\infty}n(a_n-1)\ln\left(1+(a_n-1)\right)^{\frac{1}{a_n-1}}=\ln 27$을 이용하여 극한값 $\lim_{n\to\infty}n(a_n-1)$을 구하면

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}n(a_n-1)&=\lim_{n\to\infty}n(a_n-1)\ln\left(1+(a_n-1)\right)^{\frac{1}{a_n-1}}\times\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln\left(1+(a_n-1)\right)^{\frac{1}{a_n-1}}}\\&=\ln 27\times\frac{1}{\ln e}\\&=\ln 27\end{aligned}$$

이다.

위와 마찬가지 방법으로 $\lim_{n\to\infty}b_n=1$, $\lim_{n\to\infty}n(b_n-1)=\ln 64$가 성립함을 알 수 있다.

앞에서 도출된 네 개의 극한값 $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$, $\lim_{n\to\infty} n(a_n - 1) = \ln 27$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 1$, $\lim_{n\to\infty} n(b_n - 1) = \ln 64$를 이용하여

논제에 주어진 극한을 계산하면

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}a_n+\frac{2}{3}b_n\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\left\{1+\left(\frac{1}{3}a_n+\frac{2}{3}b_n-1\right)\right\}^{\frac{1}{\frac{1}{3}a_n+\frac{2}{3}b_n-1}\cdot n\left(\frac{1}{3}a_n+\frac{2}{3}b_n-1\right)} \\ &= \lim_{n\to\infty}\left\{1+\left(\frac{1}{3}a_n+\frac{2}{3}b_n-1\right)\right\}^{\frac{1}{\frac{1}{3}a_n+\frac{2}{3}b_n-1}\cdot\left\{\frac{1}{3}n(a_n-1)+\frac{2}{3}n(b_n-1)\right\}} \\ &= e^{\frac{1}{3}\ln 27+\frac{2}{3}\ln 64} \\ &= 48\end{aligned}$$

이다.

▸ 논제 9 - 2021학년도 서강대학교 자연계열 1차 모의논술

논제의 부등식에 $a=1$을 대입하고 양변에 $\dfrac{1}{2^{n-1}\cdot n}$을 곱하면

$$\frac{n}{2^n} \le \frac{4}{n}$$

이고 $0 \le \dfrac{n}{2^n}$이 성립하므로

$$0 \le \frac{n}{2^n} \le \frac{4}{n}$$

를 만족한다.

극한값을 계산하면

$$\lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n} = 0$$

이다.

따라서 극한의 대소 관계에 의해

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n} = 0$$

이다.

▸ 논제 10 – 2018학년도 한양대학교 자연계열 오후 I 수시논술

$0 \le x \le 1$일 때, $x \le x^{\frac{1}{n}} \le 1$이 성립하므로

$$1-x^n \le (1-x^n)^{\frac{1}{n}} \le 1 \quad (\because\ 0 \le 1-x^n \le 1)$$

이 성립한다. 따라서

$$\int_0^1 (1-x^n)\,dx \le \int_0^1 (1-x^n)^{\frac{1}{n}}\,dx \le \int_0^1 1\,dx$$

이고 이를 정리하면 $1-\frac{1}{n+1} \le d_n \le 1$이다.

극한값을 계산하면

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

$$\lim_{n\to\infty}1=1$$

이다.

따라서 극한의 대소 관계에 의해

$$\lim_{n\to\infty}d_n=1$$

이다.