

심화

Advanced

SYMMATICS

단기간 고속 성장을 위한 필수 코스

저자 이경민 (서울과학고 32기)

검토 김성준 (서울과학고 32기)

Part 1.

수학1/2 공통과정

머리말

우선 본 책을 선택해주신 독자 여러분께 우선 감사의 말씀을 드립니다. 저는 2021년 기준 고등학교에 재학중인 한 학생일 뿐입니다. 그래서 그런지, 사실 이 책을 쓰기까지 참 많은 고민을 했습니다. 이 책을 쓴다고 보는 사람이 얼마나 많을지, 시간 낭비는 아닐지 등 여러 가지 고민이 들더군요. 특히 저도 이 책을 쓰는 시점에서 입시를 앞둔 한 수험생이고, 저같은 사람이 얼마나 많을지 생각해 보았습니다. 아무도 상상하지 못한 시도였고, 실패하더라도 한 번쯤 도전해보고 싶었습니다. 사실 이 책은 전문가 분들이 쓰신 책에 비하면 경쟁력이 많이 떨어지는게 현실일 것입니다. 하지만 이 여정에서 저는 학생의 시선에서 '내가 가장 잘 이해할 수 있는 방법'으로 이 책의 내용을 펼치고자 하였습니다. 이 책을 접하는 학생들, 그리고 현재의 시점에서는 저의 친구들이 이 책을 통해 조금이나마 수학에 대한 지식을 얻어간다면 저는 그것만으로 만족합니다.

이 책은 개념을 베이스로 하되, 문제 난이도는 엄선하여 만든 난이도 있는 문제들로 구성하였습니다. 특히, 이 책의 각 문제를 풀다보면 자신의 실력이 어느 정도인지를 스스로 판가름할 수 있을 것입니다. 쉬운 기본 문제부터 마지막 종합 테스트에서는 어렵고 사고력을 요하는 문제들 위주로 제작하였습니다. 본 교재를 통해 여러분의 현재의 위치를 스스로 파악하고 길러나가는 계기가 되기를 바랍니다. 또한, 이 책이 완성되기까지 도움을 주신 김성준 님께도 감사드립니다. 진심을 다해 만든 첫 번째 작품인만큼, 많은 사람들에게 널리 알려지길 바라며, 본 교재를 시작합니다.

저자 이경민 드림

효율적으로 교재를 이용하는 방법

이 책은 일종의 [수학익힘책] 같은 책입니다.

이 책에는 [수학I]과 [수학II]에 기재되어 있는 모든 개념들과 일부 [미적분] 개념이 포함되어 있습니다. 각 문제의 난이도는 쉬운 경우 단원평가 수준부터 킬러 문제 수준까지 매우 다양합니다.

이 책으로 시작하는 학생은 다음 방법을 따를 것을 권장합니다.

① 개념을 읽고 예제 문제를 풀어본다. (4~6등급 수준)

☞ 이 과정에서 막히는 학생은 교과서를 통해 기본 개념을 정확하게 바로잡고 올 것을 권장합니다.

② 각 도전문제를 풀어본다. (2~4등급 수준)

☞ 이 과정에서 막히는 학생은 타 교재를 통해 문제를 여러번 연습해볼 것을 권장합니다.

③ 연습문제를 풀어본다. (1~3등급 수준)

☞ 이 과정에서 막히는 학생은 시중의 상위권 교재를 통해 응용 연습을 해 볼 것을 권장합니다.

④ 종합테스트(상위권 최적화)를 풀어본다. (1등급 수준)

☞ 이 과정은 대부분의 학생들에게 어려운 과정일 것입니다.

사실 모의고사, 심화 교재, 기출문제 등을 통해 실력을 증진해보면 좋을 듯 싶습니다.

또한, 답안지의 일부 문제에는 문제 풀이 시 중요한 팁을 기술한 | 만점 TIP |이 있으니 꼭 활용하시기 바랍니다. 본 교재는 일반적인 수능형 문제부터 논술형 문제, 증명 문제 등 다양한 형태의 문제를 담고 있습니다. 문제를 풀면서 자신이 부족한 단원이 어디인지, 능숙한 단원은 어디인지 스스로 잘 파악하여 앞으로의 입시에서 좋은 성과를 거두길 바랍니다.

cf. 이 책은 실제 대학 교재 및 원서 등에서 활용하는 LATEX 디자인을 활용하였습니다.

목차 Index

1

함수

Functions

지수함수와 로그함수	6
삼각함수	10
연습문제	15
과제탐구	17

2

수열

Series

등차수열과 등비수열	20
수열의 합	23
수학적 증명법	28
연습문제	30
과제탐구	33
수학I 종합테스트	35

3

극한과 연속성

Limit & Continuity

함수의 극한과 연속	38
수열의 극한과 급수	44
연습문제	48
과제탐구	52

4

미분

Differentiation

미분법	55
미분에 관한 정리	59
도함수의 활용	61
연습문제	65
과제탐구	59

5

적분

Integral

부정적분	72
정적분	74
적분의 성질	78
연습문제	81
과제탐구	84
수학II 종합테스트	86

I | 함수

Functions

학습목표

- 지수함수와 로그함수를 이해하고 활용할 수 있다.
- 삼각함수를 이해하고 활용할 수 있다.

Contents

1.1 지수함수와 로그함수

- 1.1 지수
- 1.2 로그
- 1.3 지수함수와 대소관계
- 1.4 로그함수와 대소관계
- 1.5 지수방정식과 로그방정식

1.2 삼각함수

- 2.1 일반각과 호도법
- 2.2 삼각함수
- 2.3 삼각함수의 그래프
- 2.4 사인법칙과 코사인법칙

1 지수함수와 로그함수

Exponential & Logarithmic Functions

1.1 지수

중학교 때 배운 ‘지수’의 정의를 기억하는가? 일반적으로 어떤 수를 거듭제곱을 이용해서 a^b 로 나타낼 때, a 는 밑, b 는 지수라고 한다. 이제부터는 b 가 유리수인 경우에 대하여 생각해보자. 어떤 수를 $\sqrt[b]{a}$ 라고 나타내면 이 수는 a 제곱해서 b 가 되는 수를 의미한다. 다른 의미로 $x = \sqrt[m]{n}$ 이라 하면 $x^m = n$ 으로 받아들일 수 있다. 이 때, x 는 n 의 m 제곱근이라고 한다. 예를 들어, $\sqrt[4]{16}$ 은 16의 네제곱근으로 그 값은 2이다.

$Y = \sqrt[a]{X^b}$ 를 지수 형태로 나타내보자. $Y^a = X^b$ 이므로 양변에 $\frac{1}{a}$ 제곱을 취하면 $Y = X^{\frac{b}{a}}$ 이다. 따라서, 다음이 성립한다.

$$\sqrt[a]{x^b} = x^{\frac{b}{a}}$$

그 외에도 다음 성질들이 있다. 이를 **지수법칙**이라고 한다.

가. $a^m \times a^n = a^{m+n}, \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

나. $(ab)^n = a^n b^n, \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

다. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$\sqrt[4]{64}$ 과 같은 수를 간단히 나타낼 수 있을까? $64 = 2^6$ 이므로 $\sqrt[4]{2^6} = 2^{\frac{6}{4}} = 2^{\frac{3}{2}} = 2 \times 2^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$ 로 나타낼 수 있다. 이처럼 근호 안에 있는 수가 소인수분해가 될 경우 **근호를 지수 형태로 바꾸어** 간단히 나타낼 수 있다.

마지막으로, 분모의 유리화에 대해 알아보자. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ 와 같은 수의 분모를 유리화하기 위해서는 b 를 소인수분해했을 때, b 의 소인수의 각 지수가 모두 n 의 배수가 되도록 근호 내의 분자와 분모에 적당한 수를 곱하면 된다.

연습 $\sqrt[3]{\frac{5}{12}}$ 의 분모를 유리화해보자. $12 = 2^2 \times 3$ 이므로 지수가 모두 3의 배수가 되게 하기 위해 $2^3 \times 3^3$ 으로 만들어야 하므로 근호 내의 분자와 분모에 $2 \times 3^2 = 18$ 를 곱하면 된다.

따라서, $\sqrt[3]{\frac{5}{12}} = \sqrt[3]{\frac{5 \times 18}{12 \times 18}} = \sqrt[3]{\frac{90}{216}} = \frac{\sqrt[3]{90}}{6}$ 으로 유리화할 수 있다.

예제 1 다음 값을 각각 간단하게 나타내시오.

(1) $\sqrt[5]{32}$ (2) $\sqrt[3]{\frac{16}{27}}$ (3) $4^{-\frac{3}{2}}$ (4) $12^{\frac{7}{3}}$

1.2 로그

로그는 거듭제곱과 비슷한 개념으로 해석할 수 있다. 보통 \log 라는 기호를 써서 나타낸다. 로그는 일반적으로 다음과 같이 정의된다.

$$x = \log_a b \text{ 일 때, } b = a^x \text{ 이다.}$$

여기서 a 를 **밑**, b 를 **진수**라고 한다. 예를 들어, $x = \log_2 8$ 라고 하면 $2^x = 8$ 이므로 $x = 3$ 이다. 로그의 성질에는 다음과 같은 것들이 있다.

가. $\log_a x + \log_a y = \log_a xy, \log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$

나. $\log_a b^n = \frac{n}{m} \log_a b, \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

다. $\log_a 1 = 0, \log_a a = 1$

라. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}, \log_{\frac{1}{a}} b = \log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$

로그의 값이 존재할 조건은 다음과 같다.

$$a > 0, a \neq 1, b > 0 \text{ 일 때, 로그값이 존재한다.}$$

특히 밑이 10인 로그를 **상용로그**라고 한다. 상용로그값은 **상용로그표**를 이용하여 구할 수 있다. 예를 들어, $\log 1.95$ 의 값은 소수점 첫째자리까지 범위인 1.9가 적혀있는 줄과 소수점 둘째자리가 적혀있는 5가 적혀있는 줄이 만나는 수인 0.2900이다.

\therefore	3	4	5	...
1.8	.2625	.2648	.2672	...
1.9	.2856	.2878	.2900	...
2.0	.3075	.3096	.3188	...
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots

상용로그표는 $\log 1.00$ 부터 $\log 9.99$ 의 값까지만 구할 수 있기 때문에 진수가 그보다 크거나 작으면 10의 거듭제곱을 이용하여 구할 수 있다.

연습 예를 들어, $\log 183 = \log 100 + \log 1.83 = 2 + 0.2625 = 2.2625$ 으로 구할 수 있다. 또, $\log a$ 의 값을 안다면 $\log a + \log \frac{10}{a} = \log 10 = 1$ 이므로

$$\log \frac{10}{a} = 1 - \log a$$

임을 알 수 있다.

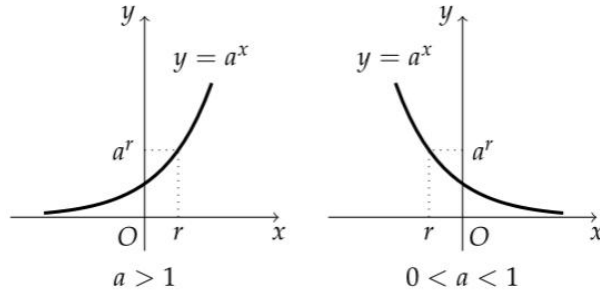
예제 2 $\log 432 = a \log 2 + b \log 3 + c \log 6$ 이다. 자연수 순서쌍 (a, b, c) 의 개수를 구하시오.

예제 3 $\log_{250} 10 + \log_{40} 10$ 의 값을 구하시오. (단, $\log 2.5 = 0.3979$ 이다.)

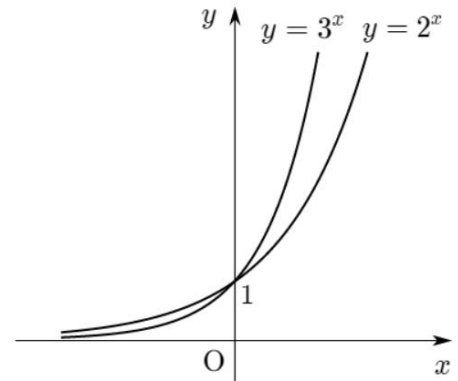
예제 4 $\log_{2x}(-x+3)$ 의 값이 존재하지 않기 위한 x 의 조건을 설명하시오.

1.3 지수함수와 대소관계

지수함수는 $y = a^x$ 의 꼴로 나타내는 함수이다. 이 때, 밑 a 의 값은 0보다 크며, a 의 값에 따른 그래프는 다음과 같다.



a 의 값에 관계없이 $a^0 = 1$ 이므로 그래프는 $(0, 1)$ 을 지난다. a 의 절댓값이 커지면 x 의 값이 조금만 변화해도 a^x 의 값이 크게 변하기 때문에 그래프가 더욱 가파르게 된다. 그림에서도 $a > 1$ 일 때는, a, x 값이 커질수록 그래프가 가팔라진다. 반면, $0 < a < 1$ 이면, a, x 값이 작아질수록 그래프가 가파르다.



$y = a^x$ 는 $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ 의 그래프와 y 축에 대하여 대칭이다. 이는

$\left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$ 이기 때문이다. 또한, 그래프가 점점 가까워지는

직선을 **점근선**이라 하는데, 지수함수의 경우 점근선은 $y = 0$ 이다.

이제 지수함수의 그래프를 이용하여 지수꼴로 표현된 수를 비교할 수 있다. 위의 경우 2^{-4} 와 3^{-4} 의 크기를 비교하자. $x < 0$ 이면 $y = 2^x$ 가 $y = 3^x$ 의 그래프보다 위에 있으므로 $2^{-4} > 3^{-4}$ 이다. 또한, 지수가 같고 밑이 다르면 y 좌표가 더 큰 것이 더 크고, 지수가 다르고 밑이 같으면

$y = a^x$ 에 대하여 $a > 1$ 이면 x 가 커질수록 y 값이 크며, $0 < a < 1$ 이면 x 가 커질수록 y 값이 작다.

다만 지수만으로 비교가 불가능할 경우, 밑을 같게 하여 비교할 수 있다.

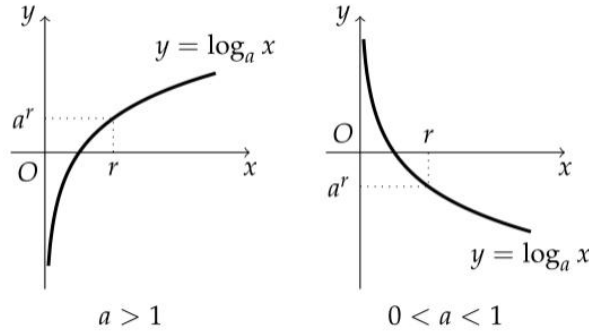
연습 $\left(\frac{1}{3}\right)^3$ 와 9^{-2} 의 크기를 비교하려면 $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = 3^{-3}$, $9^{-2} = 3^{-4}$ 이고 $3^{-3} > 3^{-4}$ 이므로 $\left(\frac{1}{3}\right)^3 > 9^{-2}$ 이다.

예제 5 $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3} < 8^a$ 를 만족하는 최소의 정수 a 의 값을 구하시오.

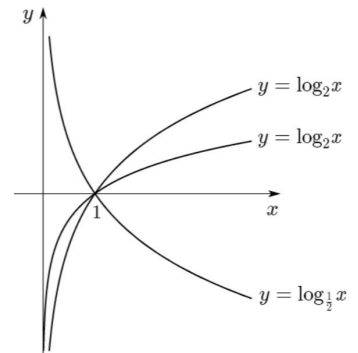
도전 1 $y = 3^x$ 의 그래프가 점 (t, a) 를 지나면 $y = \left(\frac{1}{9}\right)^x$ 의 그래프는 (t, b) 를 지난다. b 를 a 에 대한 식으로 나타내시오.

1.4 로그함수와 대소관계

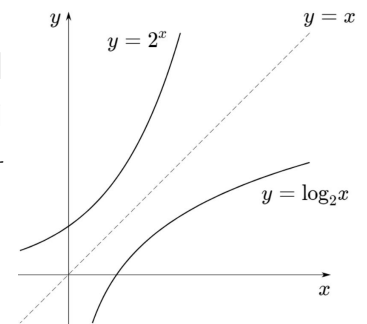
로그함수는 $y = \log_a x$ 의 꼴로 나타내는 함수이다. 지수함수와 달리 로그의 조건에 의해 정의역이 0 이상의 실수 전체의 집합으로 $x > 0$ 인 부분에서만 그래프가 그려진다.



$\log_1 x = 0$ 이므로 a 의 값에 관계없이 그래프는 $(1, 0)$ 을 지난다. a 의 절댓값이 커지면 x 의 값이 크게 변해야 a^x 의 값이 변하기 때문에 그래프가 더욱 완만해진다. 또한, 로그함수 $y = \log_a x$ 는 $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ 과 x 축에 대하여 대칭이다. 이는 $\log_{\frac{1}{a}} x = -\log_a x$ 이기 때문으로, 실제로 그림에서 $y = \log_2 x$ 와 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 의 그래프는 x 축에 대해 대칭이다. 또한, 로그함수의 점근선은 $x = 0$ 이다.



a 의 값이 같을 때, 로그함수는 지수함수와 $y = x$ 의 그래프에 대하여 대칭적이다. $y = \log_a x$ 는 $y^a = x$ 로 나타낼 수 있다. 지수함수는 $y = x^a$ 의 꼴로 나타내지므로 로그함수와 지수함수의 밑이 서로 같을 때, 두 함수는 서로 역함수 관계이다. 역함수는 $y = x$ 에 대해서 대칭이므로 밑이 같은 로그함수와 지수함수는 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.



로그의 대소관계를 비교하자. 진수가 같을 경우에는 y 좌표를 비교하면 되고, 밑이 같을 때, 밑이 $0 < a < 1$ 일 때는 진수(x)가 커질수록 y 는 작아지고, $a > 1$ 일 때는 진수가 커질수록 y 도 커진다.

예제 6 $y = 3\log_{\frac{1}{2}} x$ 와 x 축에 대하여 대칭인 그래프는 $y = \log_a x$ 이다. a 의 값을 구하시오.

예제 7 $y = \log_3 x + \log_9 x$ 의 역함수를 구하시오.

다음은 흔히 2배각공식이라 알려져 있는 공식을 서술한 것이다.

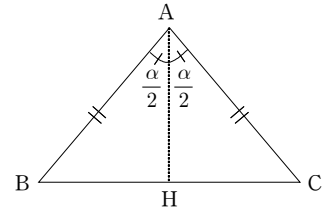
$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta, \sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta, \tan(2\theta) = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$$

예제 18을 보면 제2코사인법칙을 이용하여 $\cos\theta$ 의 값을 이용해서 $\cos(\theta/2)$ 의 값을 구할 수 있다. 이에 대한 방법을 다음과 같이 제시한다.

$\overline{AB} = \overline{AC}$ 인 이등변삼각형 ABC에 대하여 점 A에서 \overline{BC} 에 내린 수선의 발 H를 생각하자. 제2코사인법칙에 의해

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AB}^2 - 2\overline{AB}^2 \cos\alpha \text{이고,} \dots\dots\dots \text{①}$$

$$\overline{BC} = 2\overline{BH} = 2\overline{AB}\sin\frac{\alpha}{2} \text{이다.} \dots\dots\dots \text{②}$$



따라서, ②를 제곱하여 ①과 같다고 둔 후, 양변을 \overline{AB}^2 로 나누면

$$2 - 2\cos\alpha = 4\sin^2\frac{\alpha}{2} \text{이며, } \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \text{임을 이용하면 } 2 - 2\cos\alpha = 4 - 4\cos^2\frac{\alpha}{2} \text{이고,}$$

$\alpha = 2\theta$ 를 대입하여 정리하면, $\cos(2\theta) = 2\cos^2 - 1 = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ 이다.

(1) 제2코사인법칙을 이용하지 않고 위의 2배각공식을 증명해보자.

(2) 3배각공식이 존재할 지에 대해 생각해보고, 조사해보자.

[토론 주제] $\sin\alpha, \sin\beta$ 의 값이 주어졌을 때, $\sin(\alpha + \beta)$ 의 값을 구할 수 있을까?

마찬가지로, 두 삼각함수의 값이 주어졌을 때, 두 각의 합에 대한 삼각함수의 값을 정의할 수 있을까?

VI | 정답 및 해설

Solutions

정답 및 해설

I. 함수

예제 1 (1) 2 (2) $\frac{2\sqrt[3]{2}}{3}$ (3) $\frac{1}{8}$ (4) $144\sqrt[3]{12}$

예제 2 2개

$$a \log 2 + b \log 3 + c \log 6 = \log 2^a + \log 3^b + \log (2 \times 3)^c = \log 2^{a+c} 3^{b+c} \text{이다.}$$

따라서, $432 = 2^4 \times 3^3$ 이므로 가능한 순서쌍 $(a, b, c) = (3, 2, 1), (2, 1, 2)$ 로 2개이다.

예제 3 1.041

$$\log_{250} 10 + \log_{40} 10 = \frac{1}{\log 250} + \frac{1}{\log 40} = \frac{1}{2 + \log 2.5} + \frac{1}{2 - \log 2.5} = \frac{4}{4 - (\log 2.5)^2} \approx 1.041$$

예제 4 $0 < x < 3, x \neq 1$

로그의 값이 존재하기 위해 밑은 $2x > 0, x \neq 1$ 이고, 진수는 $-x + 3 > 0$ 이다. 따라서, 정리하면 $0 < x < 3$ 이고, $x \neq 1$ 이다.

예제 5 -1

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-3} = (2^{-2})^{-3} = 2^{-6} \text{이고, } 8^a = 2^{3a} \text{이므로, } 3a > -6 \text{이다. 따라서, 최소의 정수 } a = -1 \text{이다.}$$

도전 1 $b = \frac{1}{a^2}$

$$3^t = a \text{이므로 } b = \left(\frac{1}{9}\right)^t = 3^{-2t} = (3^t)^{-2} = \frac{1}{a^2} \text{이다.}$$

예제 6 2

$y = 3 \log_{\frac{1}{2}} x$ 와 x 축에 대하여 대칭인 그래프는 $y = -3 \log_{\frac{1}{2}} x$

인데, $\log_{\frac{1}{2}} x = -\log_2 x$ 이므로 대입하면 $y = \log_a x = 3 \log_2 x$ 이

다. 따라서, $a = 2$ 이다.

| 만점 TIP

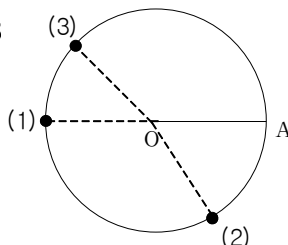
어떤 함수 $f(x)$ 의 x 축 대칭인 그래프는 $-f(x)$ 이고, y 축 대칭 그래프는 $f(-x)$ 이다. 또한, 원점 대칭인 그래프는 $-f(-x)$ 이다.

예제 7 $y = 9^{\frac{x}{3}}$

$y = \log_3 x + \log_9 x = \log_9 x^2 + \log_9 x = \log_9 x^3 = 3 \log_9 x$ 이다. 따라서, 이 함수의 역함수는 $x = 3 \log_9 y$ 를

만족한다. $\frac{x}{3} = \log_9 y$ 이므로 로그의 정의에 의해 $y = 9^{\frac{x}{3}}$ 이다.

예제 8



집필진 소개

대표 저자 **이경민**

주곡중학교 졸업
서울과학고등학교 재학
GTRC 고등수학(상) 기초 저자
HMATIC 수학/II 공통과정 저자



수정 및 검토 **김성준**

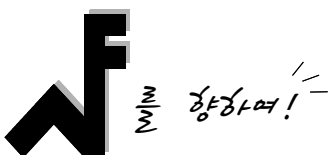
서울과학고등학교 재학
(4·5학년 검토)



초판 | 2021.05

2판 | 2021.07

문제지+답안지 총 171면
정가 8,000원



단기간 고속성장! 한 번에 잡는 총정리 가이드
HMATIC - Part I. 수학1/2 고속코스 -