심화
Advanced

HMATICS

단기간 고속 성장을 위한 필수 코스

저자 이경민 (서울과학고 32기)

검토 김성준 (서울과학고 32기)

Part 1.

수학1/2 공통과정

머리말

우선 본 책을 선택해주신 독자 여러분께 우선 감사의 말씀을 드립니다. 저는 2021년 기준 고등학교에 재학중인 한 학생일 뿐입니다. 그래서 그런지, 사실 이 책을 쓰기까지 참 많은 고민을 했습니다. 이 책을 쓴다고 보는 사람이 얼마나 많을지, 시간 낭비는 아닐지 등 여러 가지 고민이 들더군요. 특히 저도 이 책을 쓰는 시점에서 입시를 앞둔 한 수험생이고, 저같은 사람이 얼마나 많을지 생각해보았습니다. 아무도 상상하지 못한 시도였고, 실패하더라도 한 번쯤 도전해보고 싶었습니다. 사실 이 책은 전문가 분들이 쓰신 책에 비하면 경쟁력이 많이 떨어지는게 현실일 것입니다. 하지만 이 여정에서 저는 학생의 시선에서 '내가 가장 잘 이해할 수 있는 방법'으로 이 책의 내용을 펼치고자 하였습니다. 이 책을 접하는 학생들, 그리고 현재의 시점에서는 저의 친구들이 이 책을 통해 조금이나마 수학에 대한 지식을 얻어간다면 저는 그것만으로 만족합니다.

이 책은 개념을 베이스로 하되, 문제 난이도는 엄선하여 만든 난이도 있는 문제들로 구성하였습니다. 특히, 이 책의 각 문제를 풀다보면 자신의 실력이 어느 정도인지를 스스로 판가름할 수 있을 것입니다. 쉬운 기본 문제부터 마지막 종합 테스트에서는 어렵고 사고력을 요하는 문제들 위주로 제작하였습니다. 본 교재를 통해 여러분의 현재의 위치를 스스로 파악하고 길러나가는 계기가 되기를 바랍니다. 또한, 이 책이 완성되기까지 도움을 주신 **김성준** 님께도 감사드립니다. 진심을 다해 만든 첫 번째 작품인만큼, 많은 사람들에게 널리 알려지길 바라며, 본 교재를 시작합니다.

저자 이경민 드림

효율적으로 교재를 이용하는 방법

이 책은 일종의 [수학익힘책] 같은 책입니다.

이 책에는 [수학I]과 [수학II]에 기재되어 있는 모든 개념들과 일부 [미적분] 개념이 포함되어 있습니다. 각 문제의 난이도는 쉬운 경우 단원평가 수준부터 킬러 문제 수준까지 매우 다양합니다.

이 책으로 시작하는 학생은 다음 방법을 따를 것을 권장합니다.

① 개념을 읽고 예제 문제를 풀어본다. (4~6등급 수준)

☞ 이 과정에서 막히는 학생은 교과서를 통해 기본 개념을 정확하게 바로잡고 올 것을 권장합니다.

② 각 도전문제를 풀어본다. (2~4등급 수준)

☞ 이 과정에서 막히는 학생은 타 교재를 통해 문제를 여러번 연습해볼 것을 권장합니다.

③ 연습문제를 풀어본다. (1~3등급 수준)

☞ 이 과정에서 막히는 학생은 시중의 상위권 교재를 통해 응용 연습을 해 볼 것을 권장합니다.

④ 종합테스트(상위권 최적화)를 풀어본다. (1등급 수준)

☞ 이 과정은 대부분의 학생들에게 어려운 과정일 것입니다.

사설 모의고사, 심화 교재, 기출문제 등을 통해 실력을 증진해보면 좋을 듯 싶습니다.

또한, 답안지의 일부 문제에는 문제 풀이 시 중요한 팁을 기술한 **| 만점** TIP **|**이 있으니 꼭 활용하시기 바랍니다. 본 교재는 일반적인 수능형 문제부터 논술형 문제, 증명 문제 등 다양한 형태의 문제를 담고 있습니다. 문제를 풀면서 자신이 부족한 단원이 어디인지, 능숙한 단원은 어디인지 스스로 잘 파악하여 앞으로의 입시에서 좋은 성과를 거두길 바랍니다.

cf. 이 책은 실제 대학 교재 및 원서 등에서 활용하는 LATEX 디자인을 활용하였습니다.

목차 Index

1 함수
Functions

2 수열
Series

3 극한과 연속성
Limit & Continuity

4 미분
Differentation

5 적분
Integral

I 함수
Functions

학습목표

- 지수함수와 로그함수를 이해하고 활용할 수 있다.
- 삼각함수를 이해하고 활용할 수 있다.

Contents

1 지수함수와 로그함수 *Exponential & Logarithmic Functions*

1.1 지수

중학교 때 배운 '지수'의 정의를 기억하는가? 일반적으로 어떤 수를 거듭제곱을 이용해서 a^b로 나타낼 때, a는 **밑**, b는 **지수**라고 한다. 이제부터는 b가 유리수인 경우에 대하여 생각해보자.
어떤 수를 $\sqrt[a]{b}$라고 나타내면 이 수는 a제곱해서 b가 되는 수를 의미한다. 다른 의미로 $x=\sqrt[m]{n}$이라 하면 $x^m=n$으로 받아들일 수 있다. 이 때, **x는 n의 m제곱근**이라고 한다. 예를 들어, $\sqrt[4]{16}$은 16의 네제곱근으로 그 값은 2이다.

$Y=\sqrt[a]{X^b}$를 지수 형태로 나타내보자. $Y^a=X^b$이므로 양변에 $\dfrac{1}{a}$제곱을 취하면 $Y=X^{\frac{b}{a}}$이다.
따라서, 다음이 성립한다.

$$\sqrt[a]{x^b}=x^{\frac{b}{a}}$$

그 외에도 다음 성질들이 있다. 이를 **지수법칙**이라고 한다.

가. $a^m\times a^n=a^{m+n}$, $\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$

나. $(ab)^n=a^nb^n$, $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$

다. $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$

$\sqrt[4]{64}$과 같은 수를 간단히 나타낼 수 있을까? $64=2^6$이므로 $\sqrt[4]{2^6}=2^{\frac{6}{4}}=2^{\frac{3}{2}}=2\times 2^{\frac{1}{2}}=2\sqrt{2}$로 나타낼 수 있다. 이처럼 근호 안에 있는 수가 소인수분해가 될 경우 **근호를 지수 형태로 바꾸어** 간단히 나타낼 수 있다.

마지막으로, 분모의 유리화에 대해 알아보자. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$와 같은 수의 분모를 유리화하기 위해서는 b를 소인수분해했을 때, **b의 소인수의 각 지수가 모두 n의 배수가 되도록** 근호 내의 분자와 분모에 적당한 수를 곱하면 된다.

연습 $\sqrt[3]{\dfrac{5}{12}}$의 분모를 유리화해보자. $12=2^2\times 3$이므로 지수가 모두 3의 배수가 되게 하기 위해 $2^3\times 3^3$으로 만들어야 하므로 근호 내의 분자와 분모에 $2\times 3^2=18$를 곱하면 된다.
따라서, $\sqrt[3]{\dfrac{5}{12}}=\sqrt[3]{\dfrac{5\times 18}{12\times 18}}=\sqrt[3]{\dfrac{90}{216}}=\dfrac{\sqrt[3]{90}}{6}$으로 유리화할 수 있다.

예제 1 다음 값을 각각 간단하게 나타내시오.

(1) $\sqrt[5]{32}$ (2) $\sqrt[3]{\dfrac{16}{27}}$ (3) $4^{-\frac{3}{2}}$ (4) $12^{\frac{7}{3}}$

1.2 로그

로그는 거듭제곱과 비슷한 개념으로 해석할 수 있다. 보통 log라는 기호를 써서 나타낸다. 로그는 일반적으로 다음과 같이 정의된다.

$$x=\log_a b\text{일 때, } b=a^x\text{이다.}$$

여기서 a를 **밑**, b를 **진수**라고 한다. 예를 들어, $x=\log_2 8$라고 하면 $2^x=8$이므로 $x=3$이다.
로그의 성질에는 다음과 같은 것들이 있다.

가. $\log_a x+\log_a y=\log_a xy$, $\log_a x-\log_b y=\log_a \frac{x}{y}$

나. $\log_{a^m} b^n=\frac{n}{m}\log_a b$, $\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$

다. $\log_a 1=0$, $\log_a a=1$

라. $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$, $\log_{\frac{1}{a}} b=\log_a \frac{1}{b}=-\log_a b$

로그의 값이 존재할 조건은 다음과 같다.

$$a>0,\ a\neq 1,\ b>0\text{일 때, 로그값이 존재한다.}$$

특히 밑이 10인 로그를 **상용로그**라고 한다. 상용로그값은 **상용로그표**를 이용하여 구할 수 있다. 예를 들어, log1.95의 값은 소수점 첫째자리까지 범위인 1.9가 적혀있는 줄과 소수점 둘째자리가 적혀있는 5가 적혀있는 줄이 만나는 수인 0.2900이다.

$\ddots$	3	4	5	$\cdots$
1.8	.2625	.2648	.2672	$\cdots$
1.9	.2856	.2878	.2900	$\cdots$
2.0	.3075	.3096	.3188	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

상용로그표는 log1.00부터 log9.99의 값까지만 구할 수 있기 때문에 진수가 그보다 크거나 작으면 10의 거듭제곱을 이용하여 구할 수 있다.

연습 예를 들어, $\log 183=\log 100+\log 1.83=2+0.2625=2.2625$으로 구할 수 있다. 또, $\log a$의 값을 안다면 $\log a+\log\frac{10}{a}=\log 10=1$이므로

$$\log\frac{10}{a}=1-\log a$$

임을 알 수 있다.

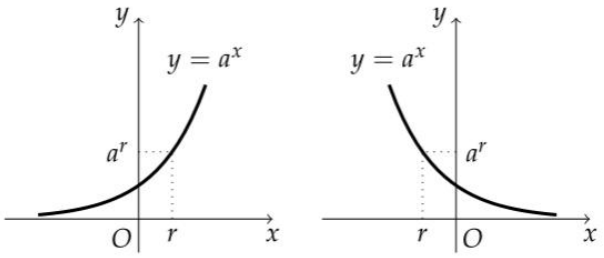
예제 2 $\log 432=a\log 2+b\log 3+c\log 6$이다. 자연수 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수를 구하시오.

예제 3 $\log_{250}10+\log_{40}10$의 값을 구하시오. (단, $\log 2.5=0.3979$이다.)

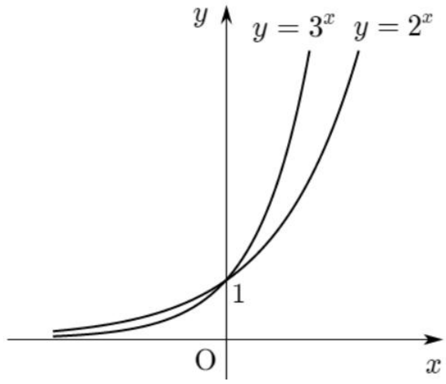
예제 4 $\log_{2x}(-x+3)$의 값이 존재하지 않기 위한 x의 조건을 설명하시오.

1.3 지수함수와 대소관계

지수함수는 $y=a^x$의 꼴로 나타내는 함수이다. 이 때, 밑 a의 값은 <u>**0보다 크며**</u>, a의 값에 따른 그래프는 다음과 같다.



$a>1$ $0<a<1$



a의 값에 관계없이 $a^0=1$이므로 그래프는 $(0,\ 1)$을 지난다. a의 절댓값이 커지면 x의 값이 조금만 변화해도 a^x의 값이 크게 변하기 때문에 그래프가 더욱 가파르게 된다. 그림에서도 $a>1$일 때는, a, x값이 커질수록 그래프가 가팔라진다. 반면, $0<a<1$이면, a, x값이 작아질수록 그래프가 가파르다.

$y=a^x$는 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$의 그래프와 **$y$축에 대하여 대칭**이다. 이는 $\left(\frac{1}{a}\right)^x=a^{-x}$이기 때문이다. 또한, 그래프가 점점 가까워지는 직선을 **점근선**이라 하는데, 지수함수의 경우 점근선은 $y=0$이다.

이제 지수함수의 그래프를 이용하여 지수꼴로 표현된 수를 비교할 수 있다. 위의 경우 2^{-4}와 3^{-4}의 크기를 비교하자. $x<0$이면 $y=2^x$가 $y=3^x$의 그래프보다 위에 있으므로 $2^{-4}>3^{-4}$이다. 또한, 지수가 같고 밑이 다르면 y좌표가 더 큰 것이 더 크고, 지수가 다르고 밑이 같으면

$y=a^x$에 대하여 $a>1$이면 x가 커질수록 y값이 크며, $0<a<1$이면 x가 커질수록 y값이 작다.

다만 지수만으로 비교가 불가능할 경우, 밑을 같게 하여 비교할 수 있다.

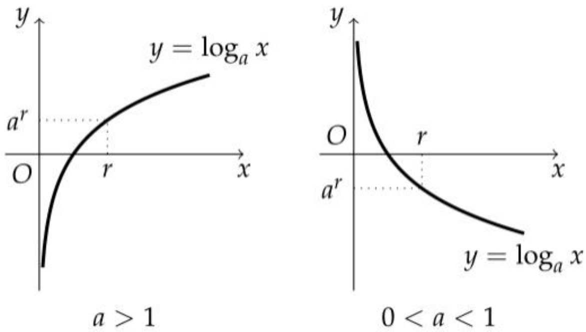
연습 $\left(\frac{1}{3}\right)^3$와 9^{-2}의 크기를 비교하려면 $\left(\frac{1}{3}\right)^3=3^{-3}$, $9^{-2}=3^{-4}$이고 $3^{-3}>3^{-4}$이므로 $\left(\frac{1}{3}\right)^3>9^{-2}$이다.

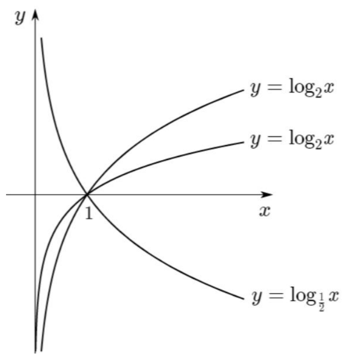
예제 5 $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}<8^a$를 만족하는 최소의 정수 a의 값을 구하시오.

도전 1 $y=3^x$의 그래프가 점 $(t,\ a)$를 지나면 $y=\left(\frac{1}{9}\right)^x$의 그래프는 $(t,\ b)$를 지난다. b를 a에 대한 식으로 나타내시오.

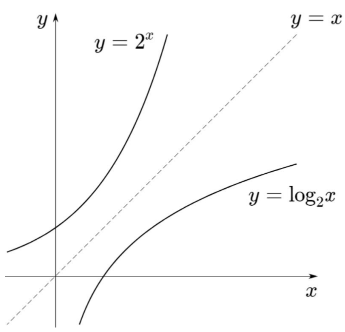
1.4 로그함수와 대소관계

로그함수는 $y=\log_a x$의 꼴로 나타내는 함수이다. 지수함수와 달리 로그의 조건에 의해 정의역이 0 이상의 실수 전체의 집합으로 $x>0$인 부분에서만 그래프가 그려진다.





$\log_1 x=0$이므로 a의 값에 관계없이 그래프는 $(1,\ 0)$을 지난다. a의 절댓값이 커지면 x의 값이 크게 변해야 a^x의 값이 변하기 때문에 그래프가 더욱 완만해진다. 또한, 로그함수 $y=\log_a x$는 $y=\log_{\frac{1}{a}} x$과 **x축에 대하여 대칭**이다. 이는 $\log_{\frac{1}{a}} x=-\log_a x$이기 때문으로, 실제로 그림에서 $y=\log_2 x$와 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$의 그래프는 x축에 대해 대칭이다. 또한, 로그함수의 점근선은 $x=0$이다.



a의 값이 같을 때, 로그함수는 지수함수와 **$y=x$의 그래프에 대하여 대칭적**이다. $y=\log_a x$는 $y^a=x$로 나타낼 수 있다. 지수함수는 $y=x^a$의 꼴로 나타내지므로 로그함수와 지수함수의 밑이 서로 같을 때, 두 함수는 서로 **역함수 관계**이다. 역함수는 $y=x$에 대해서 대칭이므로 밑이 같은 로그함수와 지수함수는 $y=x$에 대하여 대칭이다.

로그의 대소관계를 비교하자. 진수가 같을 경우에는 y좌표를 비교하면 되고, 밑이 같을 때, 밑이 $0<a<1$일 때는 진수(x)가 커질수록 y는 작아지고, $a>1$일 때는 진수가 커질수록 y도 커진다.

예제 6 $y=3\log_{\frac{1}{2}} x$와 x축에 대하여 대칭인 그래프는 $y=\log_a x$이다. a의 값을 구하시오.

예제 7 $y=\log_3 x+\log_9 x$의 역함수를 구하시오.

과제탐구 B

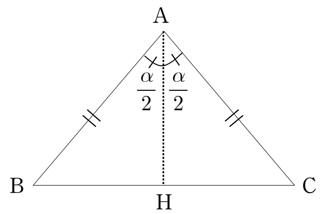
[개념의 수학적 활용]

다음은 흔히 2배각공식이라 알려져 있는 공식을 서술한 것이다.

$$\cos(2\theta)=\cos^2\theta-\sin^2\theta,\ \sin(2\theta)=2\sin\theta\cos\theta,\ \tan(2\theta)=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

예제 18을 보면 제2코사인법칙을 이용하여 $\cos\theta$의 값을 이용해서 $\cos(\theta/2)$의 값을 구할 수 있다. 이에 대한 방법을 다음과 같이 제시한다.

$\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형 ABC에 대하여 점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발 H를 생각하자. 제2코사인법칙에 의해



$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AB}^2-2\overline{AB}^2\cos\alpha$이고, ……… ①

$\overline{BC}=2\overline{BH}=2\overline{AB}\sin\frac{\alpha}{2}$이다. ………………… ②

따라서, ②를 제곱하여 ①과 같다고 둔 후, 양변을 $\overline{AB}^2$로 나누면

$2-2\cos\alpha=4\sin^2\frac{\alpha}{2}$이며, $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$임을 이용하면 $2-2\cos\alpha=4-4\cos^2\frac{\alpha}{2}$이고,

$\alpha=2\theta$를 대입하여 정리하면, $\cos(2\theta)=2\cos^2-1=\cos^2\theta-\sin^2\theta$이다.

(1) 제2코사인법칙을 이용하지 않고 위의 2배각공식을 증명해보자.

(2) 3배각공식이 존재할 지에 대해 생각해보고, 조사해보자.

[토론 주제] $\sin\alpha$, $\sin\beta$의 값이 주어졌을 때, $\sin(\alpha+\beta)$의 값을 구할 수 있을까?
마찬가지로, 두 삼각함수의 값이 주어졌을 때, 두 각의 합에 대한 삼각함수의 값을 정의할 수 있을까?

Ⅵ 정답 및 해설

Solutions

정답 및 해설

I. 함수

예제 1 (1) 2 (2) $\dfrac{2\sqrt[3]{2}}{3}$ (3) $\dfrac{1}{8}$ (4) $144\sqrt[3]{12}$

예제 2 2개

$a\log 2+b\log 3+c\log 6=\log 2^a+\log 3^b+\log(2\times 3)^c=\log 2^{a+c}3^{b+c}$이다.

따라서, $432=2^4\times 3^3$이므로 가능한 순서쌍 $(a,\ b,\ c)=(3,\ 2,\ 1),\ (2,\ 1,\ 2)$로 2개이다.

예제 3 1.041

$$\log_{250}10+\log_{40}10=\frac{1}{\log 250}+\frac{1}{\log 40}=\frac{1}{2+\log 2.5}+\frac{1}{2-\log 2.5}=\frac{4}{4-(\log 2.5)^2}\fallingdotseq 1.041$$

예제 4 $0<x<3,\ x\neq 1$

로그의 값이 존재하기 위해 밑은 $2x>0,\ x\neq 1$이고, 진수는 $-x+3>0$이다. 따라서, 정리하면 $0<x<3$이고, $x\neq 1$이다.

예제 5 -1

$\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-3}=(2^{-2})^{-3}=2^{-6}$이고, $8^a=2^{3a}$이므로, $3a>-6$이다. 따라서, 최소의 정수 $a=-1$이다.

도전 1 $b=\dfrac{1}{a^2}$

$3^t=a$이므로 $b=\left(\dfrac{1}{9}\right)^t=3^{-2t}=(3^t)^{-2}=\dfrac{1}{a^2}$이다.

예제 6 2

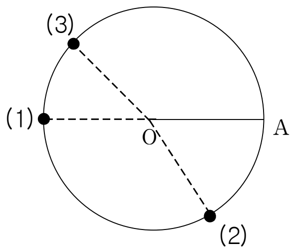
$y=3\log_{\frac{1}{2}}x$와 x축에 대하여 대칭인 그래프는 $y=-3\log_{\frac{1}{2}}x$인데, $\log_{\frac{1}{2}}x=-\log_2 x$이므로 대입하면 $y=\log_a x=3\log_2 x$이다. 따라서, $a=2$이다.

> **| 만점 TIP**
>
> 어떤 함수 $f(x)$의 x축 대칭인 그래프는 $-f(x)$이고, y축 대칭 그래프는 $f(-x)$이다. 또한, 원점 대칭인 그래프는 $-f(-x)$이다.

예제 7 $y=9^{\frac{x}{3}}$

$y=\log_3 x+\log_9 x=\log_9 x^2+\log_9 x=\log_9 x^3=3\log_9 x$이다. 따라서, 이 함수의 역함수는 $x=3\log_9 y$를 만족한다. $\dfrac{x}{3}=\log_9 y$이므로 로그의 정의에 의해 $y=9^{\frac{x}{3}}$이다.

예제 8



집필진 소개

대표 저자 **이경민**

주곡중학교 졸업
서울과학고등학교 재학
GTRC 고등수학(상) 기초 저자
HMATIC 수학I/II 공통과정 저자

수정 및 검토 **김성준**

서울과학고등학교 재학
(4·5단원 검토)

초판 | 2021.05
2판 | 2021.07
문제지+답안지 총 171면
정가 8,000원

단기간 고속성장! 한 번에 잡는 총정리 가이드
HMATIC - Part I. 수학1/2 고속코스 -