2020
학년도

28p - 53p　2020학년도 의예과 논술 기출

▷ 2020학년도 가톨릭대학교 의예과 기출

▶ 시험 전체 분석

□ 합격 커트라인

경쟁률	161.8		
실질경쟁률	비공개		
추가합격 인원	1		
내신 Cutline	최초합격자	최고	비공개
		평균	비공개
		최저	비공개
	최종등록자	최고	1.3
		평균	2.0
		최저	4.4
논술 Cutline	최초합격자	최고	100.0
		평균	97.1
		최저	94.3
	최종등록자	최고	100.0
		평균	97.0
		최저	94.3

□ 총평

제가 학교에 입학할 때 응시한 시험이네요. 그래서 이번 총평은 강사의 입장이 아닌, 제가 당시에 시험 쳤을 때의 입장에서 적어볼게요. 시험을 보기 전에 시험지에 문제 없는지 확인하라고 할 때 문제들을 스캔하잖아요? 그때 스캔을 대충 해보고 바로 이 생각이 들더라고요.

‘아, 이거 실수만 안 하면 해볼만하겠다. 실수만 하지 말자.“

위의 커트라인 자료를 보시면 알 수 있다시피 답을 다 맞추는 건 기본이고 서술도 잘 되어 있어야 합격할 수 있는 시험이었습니다. 그렇기 때문에 시험을 보는 내내 ’계산은 맞게 한건가? 맞게 접근한건가?‘를 계속 고민하면서 실수가 없도록 하였습니다. 또한, 한 문제당 투자해야 하는 시간을 산술적으로 계산하면 $100 \div 4 = 25$(분)인데, 저는 딱 봐도 1, 2번은 쉬워 보였기 때문에 1, 2번은 20분 안에 컷을 하려고 노력했습니다. 그렇게 하니까 3, 4번을 풀 때 다소 여유롭게 풀 수 있어서 다 풀고 10분 정도 남길 수 있었습니다. 10분 동안은 제가 서술한 것에서 감점당할 포인트는 없는지, 그리고 계산은 맞는지 다시 한번 검토했습니다. 그리고 3번의 풀이에서 제가 시그마 기호를 안 쓰고 단순히 항들을 나열해서 서술했는데 이왕 시간 남아서 서술 보완할 수 있는데 안 바꾸기엔 섭섭해서 시그마 기호로 바꿔서 서술했습니다. 이렇게 해서 시험을 마무리했네요.

올해는 2020학년도가 아닌 2021학년도와 유사한 느낌으로 출제할 것 같다는 느낌이 들지만 이런 식으로 쉽게 출제하는 학교의 경우에는 항상 ’실수하지 말자‘를 머릿속에 생각해야 하고, 문제가 쉽다고 매 문제마다 정성스럽게 풀면 은근 시간이 부족해져서 정작 집중해야 할 문제에 힘을 온전히 쏟을 수 없는 상황이 찾아올 수 있기 때문에 쉬운 문제는 제한시간을 이론값(전체시간/문제수)보다 5분 정도 짧게 잡아두고 빠르게 넘기는 것이 좋습니다.

▶ 문항별 상세분석 - 문제 1번

□ 문제

[문항1] 제시문 (ㄱ)~(ㄹ)을 읽고 논제에 답하시오.

(ㄱ) 두 함수 $f(x)=x^2+2nx+1$과 $g(x)=ke^x$에 대하여 점 A와 직선 l은 다음을 만족한다. (단, n은 1보다 큰 자연수, k는 0보다 작은 상수)

> 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 한 점 A에서 만나고 점 A에서 공통인 접선 l을 갖는다.

(ㄴ) 제시문 (ㄱ)의 직선 l이 x축, y축과 만나는 점을 각각 B, C라 하자.

(ㄷ) 제시문 (ㄱ)의 점 A를 지나고 직선 l에 수직인 직선 m이 x축과 만나는 점을 D라 하자.

(ㄹ) 제시문 (ㄱ), (ㄴ), (ㄷ)의 점 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}$에 대하여 삼각형 OBC와 삼각형 ABD의 넓이를 각각 a_n, b_n이라 하자. (단, O는 원점이다.)

논제. (170점) 제시문 (ㄹ)의 a_n, b_n에 대하여 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-b_n}{n^2}$의 값을 구하고 그 근거를 논술하시오.

□ Univ's Solution

접점 $A(x_1, x_2)$이라 하면, 곡선 $y = x^2 + 2nx + 1$과 곡선 $y = ke^x$가 접하기 위해서는 다음 두 조건을 만족해야한다.

1) $x^2 + 2nx + 1 = ke^x$ 2) $2x + 2n = ke^x$

이를 연립해서 풀면 $x_1 = 1 - 2n$ 또는 $x_1 = 1$이고 $y = ke^x$에서 k는 0보다 작은 상수이므로 ke^{x_1}은 음수이다.

그러므로 $x = 1 - 2n$이고 $(1-2n)^2 + 2n(1-2n) + 1 = 2 - 2n$이므로

점 A는 $A(1-2n, 2-2n)$이다. 점 A에서 그은 접선 l과 접선 l에 수직인 직선 m을 각각 구하면 다음과 같다.

$l : y - (2-2n) = (2-2n)(x-1+2n)$

$$m : y - (2-2n) = -\frac{1}{2-2n}(x-1+2n)$$

따라서 점 B, C, D는 $B(-2n, 0)$, $C(0, -4n^2+4n)$, $D(4n^2-10n+5, 0)$이다. 삼각형 OBC와 삼각형 ABD의 넓이 a_n과 b_n은

$$a_n = \frac{1}{2}2n(4n^2-4n) = 4n^3 - 4n^2$$

$$b_n = \frac{1}{2}(4n^2-8n+5)(2n-2) = 4n^3 - 12n^2 + 13n - 5$$

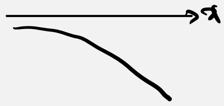
이다. 따라서

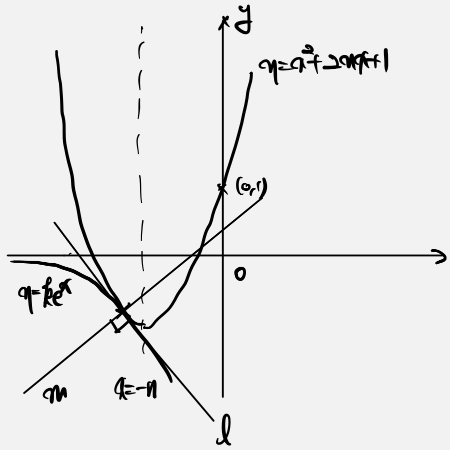
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n - b_n}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{(4n^3-4n^2)-(4n^3-12n^2+13n-5)}{n^2} = 8$$이다.

☐ Analysis's Algorithm

(실제 합격할 당시 시험장에서 했던 생각을 그대로 적어보려고 하였습니다.)

• 일단 제시문 (ㄱ)~(ㄷ)의 상황을 그림으로 대략적으로 표현해보자! 우선 $f(x)$부터 봐야할텐데 $(0, 1)$을 접점으로 갖고 축이 $x=-n$이고 n이 자연수이니까 축이 y축보다 왼쪽에 있겠네? 그리고 꼭짓점이 $(-n, 1-n^2)$ 이니까 꼭짓점은 제 3사분면에 위치하겠네? ($n>1$이기 때문에 꼭짓점의 y좌표가 0이 되는건 걱정 안 해도 됨!)

그리고 이제는 $g(x)$를 봐야겠다! $k<0$이니까  모양이겠다! 그러면 $f(x)$와 $g(x)$가 접하려면 아래의 [그림1]처럼 그려야겠네?



[그림1]

접할 조건 구하기 전에 전체적인 구조를 살펴서 전체적인 서술의 틀을 잡자! 문제의 구조를 살피면

$\boxed{\text{접할 조건 구하기}} \rightarrow \boxed{a_n \text{ 구하기}} \rightarrow \boxed{b_n \text{ 구하기}} \rightarrow \boxed{\text{답 계산}}$

이니까 이 순서로 적어주면 되겠다! a_n, b_n, 답 계산은 ①, ②, ③으로 넘버링하면 보기 좋을 듯! 그럼 이제 남은건 계산!

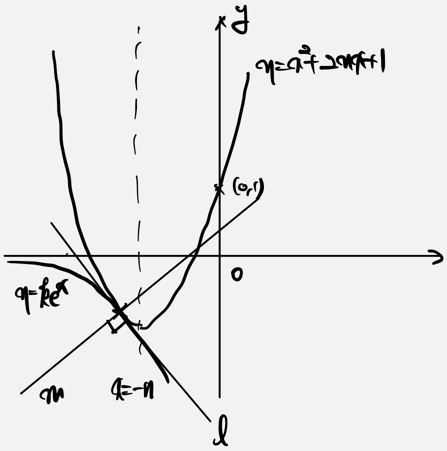
• 접할 조건 먼저 구하자. 한 점에서 접하려면 접점의 x좌표를 t로 setting하고 "함숫값 같다", "미분값 같다" 적용하면 되겠네! $k<0$인 거 조심해서 구해주자고! $\underset{(\text{계산})}{\dashrightarrow}$ $t=1-2n$.

그러면 l하고 m의 방정식이 다 나오겠다! l은 a_n과 관련돼 있고, m은 b_n과 관련돼 있으니까 l과 관련된 얘기는 "① a_n" 카테고리에 적고 m과 관련된 얘기는 "② b_n" 카테고리에 적으면 될 듯!

• l, m의 방정식 구하고 x절편, y절편 각각 구하고 넓이 구하면 되는데, 절댓값 씌워야 한다는 거 조심해서 계산하면 될 듯!

□ Analysis's Solution

(제가 실제로 학교 입학할 때 썼던 답안 그대로 적어보려고 하였습니다)



[그림1]

[그림1]과 같이 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 한 점 A에서 접하려면 $k<0$이어야 한다.

A의 x좌표를 t라 놓자.

$$\begin{cases} f(t)=g(t) \Rightarrow t^2+2nt+1=ke^t \cdots ① \\ f'(t)=g'(t) \Rightarrow 2t+2n=ke^t \cdots ② \end{cases}$$

$\therefore ①=② \Rightarrow t^2+2nt+1=2t+2n$

$\Rightarrow t^2+(2n-2)t-(2n-1)=0$

$\Rightarrow (t-1)(t+2n-1)=0$

$\therefore t=1-2n \ (\because k<0)$

$$\therefore \begin{cases} l: y=(2-2n)(x-1+2n)+(2-2n)=(2-2n)(x+2n) \\ m: y=-\frac{1}{2-2n}(x-1+2n)+(2-2n) \end{cases}$$

① a_n

$a_n=[\triangle OBC]=\frac{1}{2}\cdot\overline{OB}\cdot\overline{OC}$

1) B의 x좌표를 k라 하자.

$\Rightarrow 0=(2-2n)(k+2n)$

$\therefore k=-2n \Rightarrow B(-2n,0) \ (\because n>1 \Rightarrow 2-2n\neq 0)$

2) C의 y좌표를 p라 하자.

$\Rightarrow p=(2-2n)(0+2n)=4n(1-n) \Rightarrow C(0, 4n(1-n))$

$\therefore a_n=\frac{1}{2}\cdot|-2n|\cdot|4n(1-n)|=4n^2(n-1)$

② b_n

[그림1]에서 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\Rightarrow b_n=[\triangle ABD]=\frac{1}{2}\overline{AH}\cdot\overline{BD}$

1) $A: (1-2n, 2-2n)$ 이므로, $\overline{AH}=0-(2-2n)=2n-2$가 성립한다.

2) D의 x좌표를 r이라 하자.

$\Rightarrow 0=-\frac{1}{2-2n}(r-1+2n)+2-2n \Rightarrow r=1-2n+(2-2n)^2=4n^2-10n+5$

$\therefore b_n=\frac{1}{2}\cdot(2n-2)\cdot\{4n^2-10n+5-(-2n)\}=(n-1)(4n^2-8n+5)$

③ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-b_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^3-4n^2-(4n^3-12n^2+13n-5)}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{8n^2-13n+5}{n^2}=\boxed{8}$

□ 가져가야 할 Tip!

[Tip 1] “같은 점에서의 공통접선: '함숫값 같다‘ , '미분값 같다‘”

제시문 (ㄱ)을 해결할 때 적용되는 내용이죠? '함숫값 같다‘, '미분값 같다‘! 수능/논술 가릴 것 없이 자주 나오는 내용이므로 잘 정리해두면 좋을 것 같습니다.

[Tip 2] “이렇게 쉬운 문제가 출제되면 '디테일‘에 집중”

솔직히 이 문제? 완전 쉽죠. 그러면 이렇게 쉬우면 점수 안 깎이고 완벽하게 점수를 받나? 그건 또 아닙니다. 이렇게 쉬운 문제일수록 디테일이 중요합니다. 제가 시험 볼 때 주의하려고 했던 디테일을 적어볼게요. 여러분이 시험장에서 생각했던 것과 얼마나 일치하는지 확인해보세요.

Detail 01) $k<0,\ n>1$

별 거 아닌 조건 같지만 되게 중요한 조건입니다. '함숫값 같다‘, '미분값 같다‘를 풀면 $t=1,\ t=1-2n$이 나오는데 저 두 조건이 없다면 둘 중에 하나를 쳐낼 수 없습니다. 그렇기 때문에 서술을 할 때 반드시 $k<0,\ n>1$에 의해 왜 $t=1$은 안 되고 $t=1-2n$만 가능한지에 대한 서술이 필요합니다. 또한, $k<0$은 그러려니 하겠는데 왜 $n=1$은 포함을 안 시켰지?라는 생각이 든 분들이 있을 것입니다. 그것은 접선의 기울기가 $2-2n$인데 $n=1$이면 기울기가 0이어서 '기울기의 곱 = -1'로 처리할 수 없기 때문이죠. 이런 디테일은 항상 신경을 써줘야 합니다.

Detail 02) 법선 구할 때 원래의 직선의 기울기가 0이 될 수 없다는 것 언급

중요한 내용입니다. 법선 구할 때 원래의 직선의 기울기가 0이면 단순히 '기울기의 곱 = -1‘이라고 처리하면 안 되죠. 그렇기 때문에 원래의 직선의 기울기가 0이 될 수 없다는 것을 언급해주는 것이 좋습니다.

Detail 03) 삼각형의 넓이에서 길이니까 절댓값 취해야 한다는 것

x절편과 y절편을 구해서 삼각형의 넓이를 구하는 것이 핵심입니다. 여기서 저는 실제 시험에서 넓이 식을 쓸 때 x절편과 y절편에 절댓값을 취했습니다. 그래야 길이니까 절댓값으로 처리했다는 것을 보여줄 수 있으니깐요.

Detail 04) 마지막에 답 구할 때 최고차항 n^2으로 분모, 분자 나누기

수열의 극한이나 함수의 극한에서 $\frac{\infty}{\infty}$꼴의 극한을 구할 때 그냥 최고차항의 계수를 비교해서 답으로 많이 적습니다. 물론 이 문제처럼 간단한 것은 그렇게 해도 상관은 없기는 한데 조금 복잡한 형태에서는 단순히 직관으로 처리하기보다는 최고차항으로 분모, 분자를 나누어서 처리하는 정석적인 풀이로 서술하는 것이 좋습니다. 그런데, 저는 시험장에서 문제가 너무 쉽게 출제되다 보니까 노파심에 최고차항으로 나누어서 서술을 했었네요.